ISSN 1694 - 8173

Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясы
Национальная академия наук Кыргызской Республики
National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic

КР УИА Математика институтунун Кабарлары

Вестник Института математики НАН КР

Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR

№1

БИШКЕК – 2019

ВЕСТНИК ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ НАН КР №1, 2019 г.

Журнал издается с 2018 г.

Учредитель журнала – Институт математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Журнал зарегистрирован Министерством юстиции Кыргызской Республики
Рег. Свидетельство № 10153

Адрес редакции: 720071, Кыргызская Республика,
г. Бишкек, проспект Чуй 265а, Институт математики НАН КР

Тел.: (+996) 312 64-26-73

E-mail: math_nas@mail.ru

Сайт: math.aknet.kg

MSC 54E15, 54C10

О РАВНОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ НА ВЕЩЕСТВЕННО ПОЛНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Борубаев А.А., Бекболсунова А.Б.
Институт математики НАН КР
КГТУ им. И. Раззакова

Бул макалада Тихонов мейкиндиктеринин анык толук кенейишинин бир калыптуу мейкиндигиндеги окшоштуктары каралды. Анык толук мейкиндиктер классы топологиялык мейкиндиктердин негизги класстарынын бири болуп саналат.

Урунттуу сөздөр: Бир калыптуу мейкиндиктер, анык толук мейкиндиктер классы, топологиялык мейкиндиктер.

В работе рассматриваются равномерные аналоги вещественно полных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур. Класс вещественно полных пространств является одним из основных классов топологических пространств, топологическое пространство

Ключевые слова: Равномерные пространства, класс вещественно полных пространств, равномерно функциональное пространство.

In the paper, uniform analogs of real complete extensions of Tikhonov spaces by uniform structures are considered. The class of real complete spaces is one of the main classes of topological spaces.

Keywords: Uniform space, class of real complete spaces, uniformly functional space.

Вещественно полные пространства были введены Э. Хьюиттом [1]. Основные свойства «вещественно полных» или в другой терминологии «полных по Хьюитту» пространств изложены в книге [2]. Максимальные вещественно полные расширения тихоновских пространств называют «хъиттовские расширении». Тихоновские пространства первые построены Э.Хьюиттом [1]. Анализ равномерных аналогов других важнейших классов топологических пространств и построение всех расширений таких классов тихоновских пространств рассмотрены в [3].

Определение 1. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно функциональным пространством, а равномерность U - функциональной, если равномерность U порождается некоторым семейством функций $C_U(X)$, т.е. U порождается семейством покрытий вида $(f\alpha : f\epsilon C_U(X), \alpha\epsilon E_R)$, где $f{:}\ X\to R$, E_R– естественная равномерность числовой прямой R.

Предложение 1. Для каждой равномерности U на X существует равномерность U_F на X такая, что U_F является максимальной функциональной равномерностью, содержащихся в равномерности U.

Доказательство. Пусть $C_U(X)$ множество всех равномерно непрерывных функций где $f{:}X(X,U) \to (R,\ E_R)$. Через U_F обозначим равномерность, порожденную покрытии вида $\{f^{-1}\alpha : f \epsilon C_U(x), \alpha \epsilon E_R\}$. Тогда легко видеть, что U_F является искомой равномерностью X.

Определение 2. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно вещественно полным, если оно равномерно функционально и полно.

Теорема 1. Пусть (X,U) – равномерно функциональное пространство. Тогда его пополнение $(\tilde{X},\ \tilde{U})$ является равномерно вещественно полным, а его топологическое пространство (X,τ_U) будет вещественно полным пространством.

Доказательство. Пусть $C_U(X)$ – множество всех равномерно непрерывных функций $X(X,U) \to (R,\ E_R)$. Для каждого $f \in C_U(X)$ через R^f обозначим копию числового пространства R, через $\Delta f = \Delta\{f : f \in C_U(X)\}$ - диагональное произведение отображений $\{\, f : f \in C_U(X)\}$. Тогда отображение

$\Delta f{:}(X,U) \to \prod\{(R^f, E_R^f)\}$ – равномерно непрерывно. Так, как пространство (X,U) –равномерно функционально, множество отображений $C_U(X)$ порождает равномерность U, то $C_U(X)$ – порождает также и тихоновское топологическое пространство $(X,\ \tau_U)$. Тогда отображение $\Delta f{:}(X,U) \to \prod\{(R^f, E_R^f)\}$ –является гомеоморфным вложением (см.[2]). Так, как U - слабейшая равномерность на X, при которой все отображение $f \in C_U(X)$ - равномерно непрерывно, то диагональное отображение $\Delta f{:}\ (X,U) \to \prod\{(R^f, E_R^f)\}$ также является равномерно гомеоморфным вложением.

Тогда образ $\Delta f((X,U))$ рассмотрим, как равномерное подпространство равномерного пространства $\prod\{(R^f, E_R^f)\}$ $f \in C_U(X)$. Через $\tilde{X}$ обозначим замыкание множества $\Delta f(X)$ в произведении $\prod\{(R^f, E_R^f)\}$. Тогда $\tilde{X}$ как замкнутое подпространство пространства $\prod\{(R^f, f \in C_U(X)\}$ является вещественно полным пространством (см [2]).Через $\tilde{U}$ обозначим равномерность на $\tilde{X}$, индуцированную равномерностью $\prod\{(E^f, f \in C_U(X)\}$. Равномерное пространство $(\tilde{X}, \tilde{U})$ является пополнением равномерного пространства (X,U) и оно является равномерно вещественно полным пространством. Теорема 1 доказана.

Пусть (X,U) – произвольное равномерное пространство. Тогда по Предложению 1 существует максимальная функциональная равномерность U_F, содержащаяся в U. По Теореме 1 пополнение $(\tilde{X}, \tilde{U})$ равномерного пространства (X,U) является равномерно вещественно полным, а его топологическое пространство $(\tilde{X}, \tilde{U})$ будет вещественно полным пространством. Его мы обозначим через $\vartheta_U X$ и назовём хьюиттовским расширением равномерного пространства (X,U).

Если U - максимальная равномерность тихоновского пространства X, то $\vartheta_U X$ совпадает с классическим хьиттовским расширением ϑX тихоновского пространства X (см.[2]).

Теперь пусть X - произвольное вещественно полное пространство. Через C(X) обозначим множество всех непрерывных функций $f: X \to R$. Множество C(X) порождает максимальную функциональную равномерность U_F . Покажем, что равномерность U_F является полной. По внешней характеристике вещественно полных пространств, пространство X является замкнутым подпространством произведения $\prod\{(R^f, f \in C(X)\}$ множества копий R^f вещественной прямой R (см.[2]). Через U обозначим равномерность на X индуцированную произведением $\prod\{(E_R^f, f \in C(X)\}$ множеств естественных равномерностей E_R^f вещественной прямой R^f. Равномерное пространство (X,U) является полным, как замкнутое подпространство полного равномерного пространства $\prod\{(R^f, E_R^f): f \in C(X)\}$. Равномерность U порождается семейством сужений проекций $pr_f \prod\{R^f: f \in C(X)\} \to R^f$. Так как $pr_f \in C(X)$, для каждого $f \in C(X)$, то $U \subseteq U_F$. Следовательно, U_F является полной максимальной функциональной равномерностью на X. Значит, топология пространства X также определяется этой максимальной функциональной равномерностью U_F.

Определение 3. Равномерное пространство (X,U) называется предмаксимальным функциональным равномерным пространством, если его пополнение $(\tilde{X}, \tilde{U})$ является равномерно вещественно полным, а равномерность $\tilde{U}$ – максимальной функциональной равномерностью.

Пусть X - произвольное тихоновское пространство. Теперь построим всех вещественно полных расширений тихоновского пространства с посредством равномерных структур.

Через V(X) обозначим множество всех предмаксимальной равномерностей тихоновского пространства X. Множества V(X) частично упорядочено по включению. Через H(X) обозначим множество (отождествляя эквивалентные расширения см. [2],[3]) всех вещественно полных расширений тихоновского пространства X. Множество H(X) также частично упорядочено естественным образом (см. [2],[3]).

Как показано выше, на каждом вещественно полном расширении HX тихоновского пространство X существует единственная полная максимальная функциональная равномерность ϑ. Она индуцирует на X предмаксимальную функциональную равномерность $\vartheta \in V(X)$. Как показано выше, каждой равномерности соответствует единственное вещественно полное расширение H_U, X, полученное как пополнение равномерного пространства (X, U). Легко видеть что, это соответствие между частично упорядоченными множествами H(X) и V(X) сохраняет частичный порядок.

Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 2. Частично упорядоченные множества V(X) и H(X) изоморфны.

Лемма. Всякое равномерно вещественно полное пространства равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству произведения некоторого множества копий вещественной прямой с естественной равномерностью.

Доказательство. Пусть (X,U) – произвольное равномерно вещественно полное пространство. По его определению оно полно U – максимальная функциональная равномерность. Пусть $C_U(X)$ - множество всех равномерно непрерывных функций $f: (X, U) \to (R, E_R)$, а $\Delta F = \{f: f \in f C_U(X)\}$ - диагональное произведение $\prod\{R^F,\ E_R^f): f \in C_U(X)\}$, где (R^f, E_R^F) - копия равномерного пространства (R, E_R) для каждого $f \in C_U(X)$. Легко проверяется, что отображение $\Delta F: (X, U) \to \prod\{(R^F, E_R^F)\}$ является равномерно гомеоморфным вложением. То, что ΔF - гомеоморфное вложение указано в ([2]). Равномерная гомеоморфность вложения отображения ΔF следует из того, что равномерность порождается семейством функций $C_U(X)$. Так как равномерное пространства (X,U) полно, то полон и его образ $\Delta\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{U})$, а полное подпространство любого равномерного пространство замкнуто. Лемма доказана.

Теорема 3. Для каждого равномерного пространства (X,U) существует ровно одно (с точностью до равномерного гомеоморфизма) равномерно вещественно полное пространство $(\vartheta_U X, \vartheta_U)$, обладающее следующими свойствами:

(1) Существует равномерно гомеоморфное вложение $i: (X, U_F) \to (\vartheta_U X, \vartheta_U)$, для которого $(\vartheta_U X, \vartheta_U)$ является пополнением равномерного пространства (X, U_F), где U_F – максимальная функциональная равномерность, содержащихся в U.

(2) Какова бы ни была равномерно непрерывная функция $f\colon (X,U) \to (R,E_R)$, найдется равномерно непрерывная функция $\tilde{f}\colon (\vartheta_U X, \vartheta_U) \to (R,E_R)$ такая, что $\tilde{f}\,i = f$.

Пространство $(\vartheta_U X, \vartheta_U)$ удовлетворяет также условию:

(3) Для каждого равномерно непрерывного отображения $f\colon (X,U) \to (\gamma, \mathrm{M})$ равномерного пространства (X,U) в произвольное равномерно вещественно полное пространство (γ, M) найдется равномерное отображение $\tilde{f}\colon (\vartheta_U X, \vartheta_U) \to (\gamma, \mathrm{M})$, такое, что $\tilde{f}\,i = f$.

Доказательство. Пусть (X,U) – произвольное равномерное пространство, U_F – максимальная функциональная равномерность содержащихся в U (существует по предложению 1). Через $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ обозначим пополнение равномерного пространство (X, U_F). По теореме 1 равномерное пространства $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ является равномерно вещественно полным, т.е. условие (1) выполнено.

Пусть $f\colon (X,U) \to (R,E_R)$ – произвольная равномерно непрерывная функция. Тогда отображение $f\colon (X,U_F) \to (R,E_R)$ также будет равномерно непрерывным. Через $\tilde{f}$ обозначим продолжение отображения f на пополнения $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ пространства (X, U_F), а $i\colon (X,U_F) \to (\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ – естественное равномерно гомеоморфное вложение. Тогда $\tilde{f} = \tilde{f}\,i$ условие (2) выполнено.

Из условий (1), (2) и леммы следует, что равномерно вещественно полное пространства $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ удовлетворяет также условию (3).

Пусть $(\vartheta_U', X, \vartheta_U',)$ - какое-нибудь равномерно вещественно полное пространство, для которого выполняется условия (1) и (2). Тогда $(\vartheta_U', X, \vartheta_U',)$ удовлетворяет также условию (3), откуда следует, что $(\vartheta_U', X, \vartheta_U',)$ равномерно гомеоморфно $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$. Теорема 3 доказана.

Равномерно вещественно полное пространство $(\vartheta_U, X, \vartheta_U)$ назовем хьюиттовым пополнением равномерного пространства (X,U). Оно, вообще говоря, отличается от пополнения $(\tilde{X}, \tilde{U})$ равномерного пространства (X,U).

Пример. Пусть R - пространство действительных чисел. Через E_R – обозначим естественную равномерность пространства R, E_F – максимальную функциональную равномерность на R, а также через E_p– максимальную предкомпактную равномерность на R, содержащихся в E_R. Тогда $E_pCE_RCE_FE_p \neq E_R$ и $E_R \neq E_F$. Первое неравенство следует из того, что E_p – неполная равномерность, E_R – полная равномерность. Второе неравенство следует из того, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна на R, но не является равномерно непрерывной на (R,E_R). Поэтому существует равномерное покрытие $\alpha \in E_R$, такое, что $f\alpha \notin E_R$, но по построению E_F покрытие $f^{-1}\alpha \in E_F$. Поэтому $E_R \neq E_F$ равномерные пространства (R,E_F) и (R,E_R) является равномерно вещественно компактные пространствами, (R,E_R) – не является равномерно вещественно компактными.

Список использованных источников

1. Hewitt E. Ringsofreal-valued continuous functions I. Trans. Amer. Math.Soc., 64(1948), 45-99.

2.Энгелькинг Р. Общая топология Москва: Мир, 1986. — 752 с.

3.Борубаев А.А. Равномерная топология- Бишкек: Издательство «Илим» ,2013.

2010 MSC: 11C99, 34D20

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Оморов Р.О.

Институт физики им. акад. Ж. Жеенбаева НАН Кыргызской Республики

Макалада үзгүлтүксүз жана дискреттик сызыктуу интервалдык динамикалык системалар үчүн иштелип чыккан авторго таандык *Робасттык туруктуулуктун алгебралык усулу* каралат. Бул усулдун макалада берилген теоремалары колдонулган адабияттардын тизмесиндеги автордун эмгектеринде далилденген. Дискреттик системалар үчүн Харитоновдун теоремасынын дискреттик аналогу табылган. Усулдун натыйжаларынын ырастыгы интервалдык системалардын робасттык туруктуулугунун проблемасын изилдеген Биаластын теоремасына жана башка изилдөөчүлөрдүн контр мисалдарына карата көрсөтүлгөн.

Урунттуу сөздөр: интервалдык динамикалык система, робасттык туруктуулук, интервалдык сыпаттачу полином, Харитоновдун бурчтук полиномдору, интервалдык матрица, сепараттык бурчттук коэффициенттер, Харитоновдун теоремасынын дискреттик аналогу, кезектешүүнүн чекити жана интервалы.

В работе рассматриваются оригинальные результаты, полученные автором для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названные *Алгебраическим методом робастной устойчивости*. Сформулированы соответствующие теоремы, доказанные в работах автора, указанных в списке использованных источников. Для дискретных систем получен дискретный аналог теоремы Харитонова. Достоверность результатов метода апробирована на контрпримерах к известной теореме Биаласа и других исследователей проблем робастной устойчивости интервальных систем.

Ключевые слова: интервальная динамическая система, робастная устойчивость, интервальный характеристический полином, угловые полиномы Харитонова, интервальная матрица, сепаратные угловые коэффициенты, дискретный аналог теоремы Харитонова, точка и интервал перемежаемости.

In this work the original results received by the author for continuous and discrete linear interval dynamic systems, called the *Algebraic method of robust stability* are presented. The corresponding theorems proved in the works of the author specified in the list of references are formulated. For discrete systems the discrete analog of the theorem of Kharitonov is received. The reliability of results of a method is approved on the counterexamples to the known theorem of Bialas and other researchers of problems of robust stability of interval systems.

Keywords: the interval dynamic system, robust stability, interval characteristic polynom, angular polynoms of Kharitonov, interval matrix, separate slopes, discrete analog of theorems of Kharitonov, point and interval of variables.

Введение. Работа В.Л. Харитонова [1] вызвала огромный интерес к проблеме исследований робастности интервальных динамических систем [2-5]. В современной теории интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления [1-3, 6]:

- алгебраическое или Харитоновское направление;
- частотное или направление Цыпкина – Поляка.

В настоящей работе рассматривается *алгебраический метод* исследования робастности как непрерывных, так и дискретных интервальных динамических систем, основы которого заложены в работах [7-10].

Постановка задачи. Рассматриваются линейные динамические системы порядка n, непрерывная

$$\dot{x} = Ax, x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

и, дискретная

$$x(m+1)=Ax(m),\ m=1,2,3,\ldots, \qquad (2)$$

где $x = x(t) \in R^n$, $x(m)$ - вектора состояния, $A \in R^{nxn}$- интервальная матрица с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1,n},$ представляющими интервальные величины $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ с угловыми значениями $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$.

Требуется определить условия робастной устойчивости систем (1) и (2).

I. Непрерывные системы

Основные результаты. В основополагающих для рассматриваемого метода работах [7, 9] получены результаты в виде строго доказанных теоремы 1 и леммы к ней о робастной устойчивости систем (1) по условиям гурвицевести четырех угловых полиномов Харитонова, составленных по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов системы (1):

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n = 0\,. \qquad (3)$$

Приведем теорему 1 и лемму.

Теорема 1. Для того чтобы положение равновесия x=0 системы (1) было асимптотически устойчиво при всех $A \in D$ или, чтобы интервальная матрица A была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловые полиномы Харитонова, составленные по последовательным сепаратным угловым коэффициентам $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ характеристических полиномов (3) системы (1).

Данная теорема доказана на основе следующей леммы.

Лемма. Сепаратные угловые коэффициенты $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$ образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (3), либо при угловых значениях элементов $a_{ij}, i, j = \overline{1,n},$ матрицы A, либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов $b_i, (\underline{b}_i, \overline{b}_i, i = \overline{1,n})$, в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования.

К теореме 1, доказательство которой приведено в приложениях работ [7, 9], необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

Замечание. Из основного аргумента доказательства теоремы 1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (1).

Случай соответствующий приведенному *замечанию* может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (3) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых коэффициентов до количества менее четырех.

Справедливость доказанной теоремы 1 подтверждается аннулированием известныхконтрпримеров к теореме Биаласа [4].

Так, теорема 1 апробирована на различных контрпримерах теоремы Биаласа, в частности из работы [5], где рассматривается матрица

$$A = \Omega_r = \begin{bmatrix} -0.5 - r & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $r \in [0,1]$, для которой подтверждена справедливость теоремы 1.

Но в случае матрицы $A = \Omega_r$ из [5] можно наглядно рассмотреть справедливость приведенного выше замечания к теореме 1.

Действительно, в данном случае последовательные сепаратные угловые коэффициенты образуют неполное множество угловых коэффициентов, поскольку

$$\begin{gathered} b_1 = -\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1.5 + r = b_2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ii} a_{jj} - \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} a_{ji}, \\ b_3 = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij} a_{jk} a_{kj} - \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{ij} a_{jk} a_{ki} - a_{11} a_{22} a_{33} = 4r + 2.06, \end{gathered} \tag{5}$$

отсюда сепаратные угловые коэффициенты:

$\underline{b}_1 = 1.5; \overline{b}_1 = 2.5; \underline{b}_2 = 1.5, \overline{b}_2 = 2,5; \underline{b}_3 = 2.06, \overline{b}_3 = 6.06.$

Соответственно, угловых полиномов Харитонова в данном случае будет только два

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 2.06 = f_2(\lambda), \\ f_3(\lambda) &= \lambda^3 + 2.5\lambda^2 + 2.5\lambda + 4.06 = f_4(\lambda), \end{aligned} \tag{6}$$

т.е. полного набора 4-х угловых полиномов, указанных в работах [7, 9] не будет.

Поэтому, по угловым полиномам (6) система (1) будет всюду при $r \in [0,1]$ устойчива, хотя известно, что при $r \in [0.5 - \sqrt{0.06}, 0.5 + \sqrt{0.06}]$ эта система неустойчива.

II. Дискретные системы

Как известно, публикация работы [1] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитонова [2, 3, 6, 8, 10, 11]. Так в работе [2] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». Но здесь же отмечается, что в настоящее время получены [12] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитонова. Но эти аналоги теорем Харитонова имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов [2]. Эти ограничения были сняты в работах [8, 10, 11], где получены аналоги теорем Харитонова с использованием теоремы Шура [13]. Также в [8, 10, 11] сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [1] по интервальным матрицам и многогранникам матриц. Далее, рассматривается обобщение результатов, полученных в работе [8, 10] с учетом выводов приведенных выше для непрерывных систем. Для дискретных систем, используя z - преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$f(z) = \det(zI - A) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i}, b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \underline{b}_i \le \overline{b}_i. \tag{7}$$

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура [13] , т.е. условиями вида

$$|b_0| > |b_n| \ , \qquad (8)$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_i(z) = \left[b_0 f(z) - b_n f(1/z) z^n\right] / z, ..., f_{i+1}(z) = \left[b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(1/z) z^{n-1}\right] / z, \qquad (9)$$

где $b_{0,i}, b_{n,i}$ - соответственно старший и младший коэффициенты i-го $(i = \overline{1, n-2}$ полинома $fi(z)$.

Определение. Точками перемежаемости для коэффициентов $b_i, i = \overline{0,n}$ будем называть – точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (7), через единичную окружность на плоскости корней, а *интервалами перемежаемости* – соответственно интервалы, в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга (рис.1).

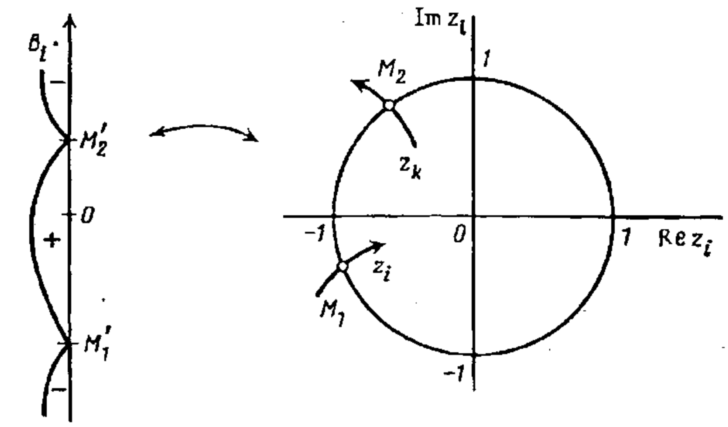

Рис. 1. Точки (M_1', M_2') и интервалы перемежаемости $(-\infty, M_1')^-$, $(M_1', M_2')^+$, $(M_2', +\infty)^-$ — для коэффициента b_i

В работах [8, 10] сформулированы основные результаты по определению условий робастной устойчивости дискретных интервальных систем в виде соответствующих теорем 1-6. При этом следует отметить, что, как указано выше на с.3, для случая непрерывных систем [7, 9], справедливость *теоремы 5* имеет ограничение обусловленное *Замечанием* к теореме 1 работ [7, 9], т.е. *теорема 5* верна при полном наборе из 4-х различных полиномов Харитонова.

Справедливость результатов [8, 10, 11] относительно аналога сильной теоремы Харитонова продемонстрированы на известных контрпримерах из [2] и др.

Таким образом, алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем будет следующим.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 1 [7, 9], оптимизацией по элементам $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij},]\ i, j = \overline{1,n}$, интервальной матрицы А, находятся сепаратные угловые коэффициенты $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]\ i = \overline{0,n}$, интервального характеристического полинома (7).

2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (7)

$$f_1(z): \{\underline{b}_0, \underline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4 ...,\}\ f_2(z): \{\underline{b}_0, \overline{b}_1, \overline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4 ...,\};$$

$$f_3(z): \{\overline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4 ...,\}\ f_4(z): \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \overline{b}_4 ...,\};$$

3. Составляются n неравенств вида (П.2), указанных в Приложении работы [8].

4. Относительно каждого коэффициента $b_i, i = \overline{0,n}$, считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки перемежаемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем n неравенствам (см. п.3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки перемежаемости по всем коэффициентам $b_i, i = \overline{0,n}$, не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае – неустойчив.

Список использованных источников

1. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. - С. 2086-2088.
2. Джури Э.И. Робастность дискретных систем //Автоматика и телемеханика. 1990. №5. - С.4-28.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем// Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т.32. - Москва: ВИНИТИ, 1991. – С. 3-31.

4. Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices// Int. J. Control 1983. V.37.№4.-P. 717-722.
5. Barmish B.R., Hollot C.V. Counter-example to a recent result on the stability by S. Bialas // Int. J. Control. 1984. V.39. №5. – P. 1103-1104.
6. Оморов Р.О. Робастная устойчивость интервальных динамических систем. – Бишкек: Илим, 2018. – 104 с.
7. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I.Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №1. - С.22-27.
8. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. II.Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем//Теория и системы управления. 1995. №3. - С.3-7.
9. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems. I. Robustness in Continuous Linear Interval Dynamic Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. No 3. – P. 69-74.
10. Omorov R.O. Robustness of Interval Dynamic Systems. II. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. T. 34. No 4. – P. 1-5.
11. Оморов Р.О. О дискретном аналоге теоремы Харитонова //Наука и новые технологии, 2002, №3. - С. 5-10.
12. Kraus F.J., Anderson B.D., Jury E.I., Mansour M. On the robustness of low order Shurpolynomials // IEEE Trans. Circ. Systems. 1988. – V. CAS-35, N5.
13. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. – Москва: Физматгиз, 1958. – 724 с.
14. Omorov R. Robust stability of interval dynamic systems: algebraic method // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 29.

2010 MSC: 37D99, 37H20

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ И БИФУРКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Оморов Р.О.
Институт физики им. акад. Ж. Жеенбаева НАН КР

Макалада динамикалык системалардын сезбестигин изилдегенге багытталган жана Андронов-Понтрягин сезбестик түшүнүгүнө негизделген жаңы “Топологиялык сезбестиги усулу” каралат. Максималдык сезбестиктин жана минималдык сезгичтиктин мүмкүн болушуунун зарыл жана жетиштүү шарттары, ошондой эле динамикалык системаларда бифуркациялардын пайда болушунун шарттары берилет. Бул усул динамикалык системалардын сезбестигин жана бифуркацияларын изилдегенге жана ошондой эле ар кандай физикалык табияттагы синергетикалык системалардын жана хаостун ушул касиеттерин изилдегенге колдонууга мүмкүн. Автордун көптөгөн эмгектеринде бул усул ар кандай синергетикалык системаларды изилдегенге колдонулган, мисалдары төмөнкү системаларга: Лоренц жана Рёсслер аттракторлоруна, Белоусов-Жаботинский системасына, Чуа чынжырына, “жырткыч-курман” системасына, Хенон өзгөртмөсүнө, Хопф бифуркациясына жана башкаларга.

Урунттуу сөздөр: динамикалык система, топологиялык сезбестик, синергетикалык система жана хаос, Андронов-Понтрягин боюнча сезбестик, бифуркация, системалардын максималдык сезбестиги жана минималдык сезгичтиги, гиперболикалык жана гиперболикалык эмес өзгөчө чекиттер.

Рассматривается метод исследования грубости динамических систем, основанный на понятии грубости по Андронову-Понтрягину и именуемый «методом топологической грубости». Сформулированы необходимые и достаточные условия достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости, а также возникновения бифуркаций топологических структур динамических систем. Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы. В работах автора метод апробирован на примерах многих синергетических систем, таких как аттракторы Лоренца и Ресслера, систем Белоусова-Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа и др.
Ключевые слова: динамическая система, топологическая грубость, синергетическая система и хаос, грубость по Андронову-Понтрягину, бифуркация, максимальная грубость и минимальная негрубость систем, гиперболические и негиперболические особые точки.

The method of a research of roughness of dynamic systems based on a concept of roughness according to Andronov-Pontryagin and called "method of topological roughness" is considered. Necessary and sufficient conditions of approachibility of the maximum roughness and minimum not roughness and also emergence of bifurcations of topological structures of dynamic systems are formulated. The method can be used for researches of roughness and bifurcations of dynamic systems and also synergetic systems and chaos of various physical nature. In works of the author the method is approved on examples of many synergetic systems, such as Lorenz and Rössler's attractors, Belousov-Zhabotinsky's systems, Chua circuit, "predator prey", Henon's map, Hopf's bifurcations, etc.

Keywords: a dynamic system, topological roughness, a synergetic system and chaos, roughness according to Andronov-Pontryagin, bifurcation, the maximum roughness and the minimum not roughness of systems, hyperbolic and not hyperbolic special points.

Введение. В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову – Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε – близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1-3].

В данной статье рассматривается «метод топологической грубости», основы которого были заложены в работе [4], а дальнейшее развитие метода получило широкое применение при исследовании грубости и бифуркаций синергетических систем различной физической природы, в частности, при исследовании хаоса в этих системах [5-7].

Основы метода. В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре [8], в частности термин бифуркация впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А.Андроновым и его школой [1,2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

$$\dot{z}(t) = F(z(t)), \tag{1}$$

где $z(t) \in R^n$ - вектор фазовых координат, $F - n -$мерная дифференцируемая вектор - функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову – Понтрягину в некоторой области G если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \tag{2}$$

являются $\varepsilon -$ тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n – мерном фазовом пространстве также, что $D \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$

$\exists \varepsilon, \delta > 0$:

если $\|f(\tilde{z})\| < \delta, |df_i(\tilde{z})/d\tilde{z}_j| < \delta, i, j = \overline{1,n},$ то $|\|z\| - \|\tilde{z}\|| < \varepsilon,$ или

$$(\tilde{D},(2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D,(1)), \tag{3}$$

иначе, разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [4] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{M\}$ – матрицы М - нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости на отношениях пары δ и ε.

Определение 1. *Грубая в области G система (1) называется максимально грубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина δ – близости систем (1) и (2), приводящая к ε – тождественности, будет (для каждого ε>0) максимальна.*

Определение 2. *Негрубая в области G система (1) называется минимально негрубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина ε – тождественности систем (1) и (2), при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого δ>0) минимальна.*

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в работе [4].

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (z_0) была максимальна грубой, а в окрестности негиперболической – минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:*

$$M^* = \arg\min C\{M\},$$

где М - матрица приведения линейной части А системы (1) в особой точке (z_0) к диагональному (квазидиагональному) базису, $C\{M\}$ - число обусловленности матрицы М.

Замечание 1. *Как следует из определений 1 и 2, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для* *которых $C\{M\} = \infty$. Иначе, множество грубых и негрубых систем образуют непрерывныемножества. При этом, системами с $C\{M\}\} = \infty$ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц линейного приближения А.*

Очевидно, число обусловленности C{M} как меру грубости можно использовать для кусочно-гладких динамических систем, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей. Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

Теоретические результаты «метода топологической грубости», полученные в работах [4-7], позволяют управлять грубостью синергетических систем, соответствующая теорема доказана в работе [4].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев, разработанных в работах [4, 5]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В докторской диссертации автора доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы в области G многомерной (n>2) ДС при значении параметра $q = q^*$, $q \in R^p$ возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:*

- либо 1), в рассматриваемой области G, ДС существуют негиперболические (негрубые) особые точки (ОТ), или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство

$$C\{M(q^*)\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i\{M(q)\}, \quad (4)$$

где p – количество ОТ или ПЦ в области G,

- либо 2), в области G ДС , имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие

$$C\{M(q^*)\} = \infty. \qquad (5)$$

Замечание 2. *Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (4) или (5) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория – ОТ или ПЦ, удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания («странные аттракторы»), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (4) удовлетворяют ОТ, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (4) отвечают ПЦ.*

Заключение. Рассмотренный в данной работе «метод топологической грубости» является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода по исследованию грубости и бифуркаций систем были апробированы для большого количества, как синергетических систем различной природы – Лоренца, Ресслера, Чуа, Белоусова-Жаботинского, «хищник-жертва» и др., так и динамических систем более широкого класса, в частности, при исследованиях колебательных систем и бифуркаций Хопфа, в частности, при исследовании аттрактора отображения Хенона [5-7, 9-11].

Список использованных источников

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т.14, №5. С. 247-250.

2. Аносов Д.В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды .МИАН СССР.Т.169). Москва: Наука, 1985. С. 59-93.

3. Piexoto M.M. On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol.69, No. 1. P.199-222.
4. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и Телемеханика. 1991. № 8. С. 36-45.
5. Оморов Р.О. Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР, 2009. № 3. С. 144-148.
6. Оморов Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии, 1997. № 2. С. 26-36.
7. Оморов Р.О. Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. 2012. № 2. С. 5-12.
8. Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными управлениями / Пер. с франц. под ред. А.А.Андронова. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1947. - 392 с.
9. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение / Пер. с англ. Москва: Мир, 1990. 344 с.
10. Странные аттракторы. Сб. пер. с англ. / под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. - Москва: Мир, 1981. - 253 с.
11. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. / Пер. с англ. Москва: Мир, 1985. - 423 с.
12. Omorov R. Topological roughness and bifurcations of the dynamic systems // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 28.

MSC 37K20

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Панков П.С., Тагаева С.Б.
Институт математики НАН КР

Мурунку макалаларда таӊ калыштуу тартып жакындаткыч, тартып жакындаткычты жүзөгө ашыруунун ыкмалары өтө татаал болду. Бул макалада ал кубулуш үч уркуюп турган жери бар жылмакай бет боюнча тартуу күчүнүн таасиринен топ жумаланганы аркылуу көрсөтүлөт. Топ кыймылдаганы алдын ала айтылбайт. Дал келген дифференциалдык теӊдемелер системасы түзүлдү жана компьютерде болжол менен чыгарылды. Дагы, мындай бет темирден жасалды жана сыналды.

Урунттуу сөздөр: тартып жакындаткыч, жылмакай бет, кубулуш, дифференциалдык теӊдеме, айырмалык теӊдеме, теӊдемелер системасы, жүзөгө ашыруу

В предыдущей статье авторов явление странного аттрактора было продемонстрировано через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести. Такая поверхность была изготовлена из железа и испытана. Движение шарика оказывается непредсказуемым. В данной статье предложены другие системы дифференциальных и разностных уравнений для этой же цели.

Ключевые слова: аттрактор, гладкая поверхность, явление, дифференциальное уравнение, разностное уравнение, система уравнений, реализация

In the authors' preceding paper the phenomenon of strange attractor was demonstrated as rolling of a ball along a smooth surface with three juts by gravity effect. Such surface is made of iron and tested. The motion of the ball proves to be unpredictable. Other systems of differential equations are difference equations are proposed in this paper for same purpose.

Keywords: attractor, smooth surface, phenomenon, differential equation, difference equation, system of equations, implementation

1. Введение. В данной статье рассматриваются странные аттракторы. Отметим, что само это понятие является не чем-то заданным заранее, а возникающим в различных условиях. Соответственно этому, и возникают различные определения, после обнаружения новых явлений.

Первым примером явился аттрактор Лоренца, описываемый системой трех дифференциальных уравнений третьего порядка.

$$x'(t)=10(y(t)-x(t));$$

$$y'(t)=x(t)(28-z(t))-y(t);$$

$$z'(t)=x(t)y(t)-8/3\cdot z(t). \qquad (1)$$

Для его реализации требуется смесь трех химических компонент.

Соответственно появилось определение: странный аттрактор - притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы.

Ранее в опубликованных работах (см. например [1], [2], [3]) предлагались сложные электро-технические устройства для его реализации.

На основе методики [4], с использованием опыта составления систем дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы [5]-[8], мы продемонстрировали такое явление через скатывание шарика по гладкой поверхности с тремя выступами под воздействием силы тяжести [9]. Движение шарика оказывается непредсказуемым. Соответствующая система дифференциальных уравнений была составлена и приближенно решена на компьютере. Также, такая поверхность изготовлена из железа и испытана.

В данной статье предлагаются другие системы дифференциальных и разностных уравнений, дающие аналогичные явления.

2. Составление системы дифференциальных уравнений. Движение точки под действием силы, зависящей только от положения точки, по второму закону Ньютона выражается векторным уравнением

$$w''(t) = F(w(t)), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$w(0)=w_0,\ w'(0)=v_0. \tag{2}$$

Если точка движется по гладкой поверхности, высота которой выражается формулой $z=Z(x,y)$, над горизонтальной плоскостью, то получаем: вектор антиградиента $A(x,y)=-\{Z_x'(x,y),\ Z_y'(x,y),\ (Z_x'(x,y))^2+(Z_y'(x,y))^2\}$.

Разлагаем постоянный вектор гравитации $g=\{0,0,\ -1\}$ на касательный T и нормальный Q к поверхности.

$$T(x,y) = \frac{\langle A,g\rangle}{\langle A,A\rangle}A = \frac{\left(Z_x'(x,y)\right)^2+\left(Z_y'(x,y)\right)^2}{\left(Z_x'(x,y)\right)^2+\left(Z_y'(x,y)\right)^2+\left(\left(Z_x'(x,y)\right)^2+\left(Z_y'(x,y)\right)^2\right)^2}A(x,y) = \tag{3}$$

$$= -\frac{1}{\left(Z_x'(x,y)\right)^2 + \left(Z_y'(x,y)\right)^2 + 1}\Big\{-Z_x'(x,y), -Z_y'(x,y), \left(Z_x'(x,y)\right)^2 + \left(Z_x'(x,y)\right)^2\Big\}.$$

Сила, действующая на точку, пропорциональна вектору $T(x,y)$.

Достаточно рассматривать ее компоненты, действующие по осям Ox и Oy, потому что из новых значений $X(t)$ и$Y(t)$ значение высоты получается из формулы $z=Z(x,y)$.

Система уравнений (1) принимает вид

$$x''(t) = \frac{Z_x'(x(t),y(t))}{\left(Z_x'(x(t),y(t))\right)^2 + (Z_x'(x(t),y(t)))^2 + 1}, \quad (4)$$

$$y''(t) = \frac{Z_y'(x(t),y(t))}{\left(Z_x'(x(t),y(t))\right)^2 + (Z_x'(x(t),y(t)))^2 + 1}.$$

Можно выбрать некоторое нечетное натуральное число $k>3$ и взять поверхность, задаваемую формулой

$$Z(x,y) = \sum_{j=1}^{k}\left(\left(x - \cos\left(\frac{2\pi}{k}j\right)\right)^2 + \left(y - \sin\left(\frac{2\pi}{k}j\right)\right)^2 + 0.01\right)^{-1} + x^2 + y^2. \quad (5)$$

За начальное условие можно взять точку около

$$(-a;0), 0 < a < 1. \quad (6)$$

Тогда точка сначала двигается близко к линии $(-a<x<0;\ y=0)$, потом близко к линии $(0<x<\varepsilon;\ y=0)$, $\varepsilon<a$, далее движение становится уже непредсказуемым.

3. Системы разностных уравнений. Для приближенного решения системы (4)-(5) с начальным условием (6) можно составлять различные системы разностных уравнений. Далее, при вычислениях для таких систем на различных компьютерах, с различными системами машинных чисел будут также получаться различные результаты. Отсюда следует, что алгоритм вычисления (с учетом дискретности набора машинных чисел) - представляет собой самостоятельный объект.

На основе идеи [10] предлагается

Определение. Если алгоритм вычисления с рациональными числами, дающий по исходным данным достаточно длинную последовательность чисел $\{x_n: n=1,2,3, \dots\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют такие числа $0<p<q$, что для всех $n \in N$ будет $|x_n| < q$;

2) для любого $m \in N$ существует такое $n>m$, что $|x_n| > p$;

3) последовательность $\{x_n: n=1,2,3, \dots\}$ не близка к периодической;

4) при малых изменениях исходных данных (переходе к соседним машинным числам) последовательность $\{x_n: n=1,2,3, \dots\}$ значительно изменяется (то есть имеет место вычислительная неустойчивость),

то такой алгоритм будем называть дискретным странным аттрактором.

4. Изготовление модели и ее испытание. По заданному нечетному числу k $(k = 5,7,9)$

1) Вырезать из тонкого железного листа правильный $2k$-угольник диаметром 60-100 см. Занумеруем его вершины 1-2-…-2k, а центр - 0.

2) Расположить многоугольник горизонтально и согнуть его так, чтобы отрезки 1-0, 3-0, 5-0, …, (2k–1)-0 имели большой наклон вниз к точке 0, а отрезки 2-0, 4-0, 6-0,…, (2k)-0 имели небольшой наклон вниз к точке 0.

3) Пустить стальной шарик из точки 2. Он должен покатиться к точке 0, потом подняться немного по направлению к точке (2+k), потом скатиться (неопределенно) на отрезок (2+k+1)-0 или на отрезок (2+k–1)-0, по этому отрезку скатиться к точке 0, подняться и т.д.

Список использованных источников

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - Москва: Наука, 1984. - 432 с.

2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. - пер. с англ. - Москва: Мир, 1985. - 529 с.

3. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение, пер. с англ. - Москва: Мир, 1988. - 240 с.

4. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

5. Pankov P.S., Tagaeva S.B. Mathematical modeling of distribution of discrete el-ectrical charges // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asympto-tical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniver-sary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 58.

6. Tagaeva S.B. Existence and stabilization of solution of system of differential equations describing arrangement of many discrete electrical charges on a segment //Интернет-журнал ВАК КР, 2017, № 1. - 6 с.

7. Tagaeva S. B. Example of trifurcation of distribution of repelling electrical charges // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual prob-lems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 89.

8. Тагаева С.Б. Экспериментальное исследование распределения элек-трических зарядов в ограниченных областях // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018. - С. 32.

9. Панков П.С., Тагаева С.Б. Компьютерное и реальное моделирование явления странного аттрактора системой дифференциальных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 17-23.

10. Кененбаева Г.М. Явление вычислительного расщепления в теории сингулярно-возмущенных систем // Научный журнал Министерства образования и науки «Поиск», Алматы, Казахстан. - № 4. - 2010. – С. 233-237.

MSC91F20

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОНЯТИЙ В КЫРГЫЗСКОМ ЯЗЫКЕ

Панков П.С., Карабаева С.Ж., Таалайбек кызы К.
Институт математики НАН КР

Мурда авторлордун катышуусу менен «мейкиндик бөлүктөрү» түшүнүгү жана кыргыз тилиндеги кээ бир «кыймыл этиштерди» компьютерде ишке ашыруу үчүн математикалык моделдери тургузулган. Бул макалада башка тилдерде эч окшоштугу жок мейкиндик объектилеринин айрым түшүнүктөрү жана кээ бир «мейкиндиктик өзгөртүү этиштери» үчүн математикалык моделдер тургузулду.

Урунттуу сөздөр: түшүнүктүн математикалык модели, түшүнүктүн компьютердик модели, мейкиндик объект, мейкиндик өзгөртүү.

Ранее с участием авторов были построены математические модели «частей пространства» и некоторых «глаголов перемещения» в кыргызском языке для компьютерной реализации. В статье построены математические модели для некоторых понятий для пространственных объектов, не имеющих аналогов в других языках, и для некоторых «глаголов пространственных преобразований».

Ключевые слова: математическая модель понятия, компьютерная модель понятия, пространственный объект, пространственное преобразование

Earlier, with participation of the authors, mathematical models of “parts of space” and some “verbs of shifting” in Kyrgyz language were built for computer implementation. Mathematical models for some notions for space objects (having no analogs in other languages) and for some “verbs of spatial transformations” are built in the paper.

Keywords: mathematical model of notion, computer model of notion, spatial object, spatial transformation

1. Введение. Ранее нами было предложено компьютерное независимое интерактивное представление естественных языков и с этой целью разработаны: новое определение языка, математической модели понятия, компьютерной модели понятия, составлены и такие модели для различных понятий: глаголов, существительных, прилагательных, некоторые из них реализованы на компьютер, см.[1]-[5].

В данной статье построены математические модели для некоторых понятий для пространственных объектов, не имеющих аналогов в других языках, и для некоторых «глаголов пространственных преобразований».

2. Носитель языка, как наблюдатель. Рассмотрим общую ситуацию. Человек впервые видит объект и имеет желание или необходимость назвать этот объект одним из известных ему слов.

(Необходимость возникает в юридических вопросах: протокол осмотра места происшествия, показания свидетеля).

Возможна обратная постановка проблемы. Имеется множество K в чем-то похожих объектов. Какие из этих объектов (из какого подмножества K_1) человек назовет данным словом?

Нас это интересует с точки зрения построения математических моделей понятий, которые, в свою очередь, будут использованы для компьютерной реализации.

Если в множестве K можно определить «близкие между собой» объекты, то можно говорить о «топологическом пространстве» объектов.

В теории распознавания образов есть гипотеза, что пространство K_1 является «компактным» (в неформальном смысле этого слова). Данная гипотеза используется для компьютерной реализации.

Л.Заде [6] показал, что для двух разных людей соответствующие пространства K_1 и K_2 могут быть близкими, но не совпадать, и ввел понятие «нечеткое» множество. Нами доказано путем экспериментов с носителями кыргызского языка на примере слов ҮСТҮ и АСТЫ, что пространства K_1 и K_2 могут быть и совершенно различными (этот факт раньше был известен юристам), см. [7]-[11].

Отсюда же следует неточность перевода, потому что в каждом языке пространство вида K_1 формируется независимо и они не совпадают в разных языках.

3. Изучение языка при помощи действий

Определение 1. Если малые по затратам энергии воздействия на объект вызывают существенно различные изменения во внутреннем состоянии объекта и большие по затратам энергии действия объекта, то такой (постоянно неустойчивый) объект называется «таасир этилүүчү» объект (для данного выражения нам не удалось подобрать краткий эквивалент на русском языке) или субъект. Такое целенаправленное, малое по затратам энергии воздействие на субъект называется командой. (Действия субъекта производятся за счет его внутренней энергии. Энергия поступает в субъект из других источников).

Данное определение объединяет людей и компьютеры.

Определение 2. Система команд, при помощи которых один субъект может добиваться от другого субъекта желаемых достаточно многообразных действий, называется универсальным языком.

Данное определение объединяет естественные и универсальные алгоритмические языки.

Рассмотрим прямоугольник (экран дисплея) и множества на нем (постоянные, подвижные, переменные). Между ними проверяются отношения: $A \subset B$; $A \cap B = \varnothing$. Каждое из множеств соответствует какому-либо понятию языка.

Определение 3. Последовательность по времени условий на множества, каждое из которых соответствует смыслу понятий, а вместе - удовлетворяемым только одним понятием, называется математической моделью понятия.

(Данное определение аналогично формуле изобретения).

На этом определении основано:

Определение 4. Пусть дано любое "понятие" (слово языка). Если имеется алгоритм, реализованный на компьютере, который:

- выполняет (случайно генерируемые) достаточно большое количество ситуаций, покрывающих все существенные аспекты "понятия" пользователю;

- дает команду, вовлекающее это "понятие" в каждую ситуацию;

- определяет действия пользователя и выполняет их результаты явно на дисплее;

- обнаруживает, соответствует ли результат выполнения данной команде, тогда такой алгоритм называется компьютерным диалоговым представлением "понятия".

Примечание. Команды должны содержать также другие слова. Но эти слова не должны давать никаких определений или объяснений "понятия".

4. Некоторые пространственные объекты в кыргызском языке. См. раздел 2. Будем рассматривать только предметы неизменной формы, независимо от их размеров и расположения, и только выпуклые (томпок) предметы.

Рассмотрим предмет, близкий к параллелепипеду, имеющий габариты $X \le Y \le Z$. В силу подобия, можно считать $Z=10$. Таким образом, получаем двумерную треугольную область в пространстве $\{X,Y\}$. К таким объектам можно отнести слова: по-кыргызски ЖУКА, ИЧКЕ, по-русски ТОНКИЙ.

Рассмотрим предмет, близкий к трехосному эллипсоиду, имеющий оси $X \le Y \le Z$. В силу подобия, можно считать $Z=10$. Таким образом, получаем двумерный треугольник в пространстве $\{X,Y\}$. К таким объектам можно отнести слова: по-кыргызски ТЕГЕРЕК, ТОГОЛОК, ЖУМУРУ, по-русски КРУГЛЫЙ.

10	Ж	Ж								
9	Ж	Ж								
8										
7										
6										
5										
4										
3										
2	И	И								
1	И									
Y X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ж - Жука; И - Ичке										

10	Е								О	О
9	Е								О	
8										
7										
6						У				
5					У					
4				У						
3			У							
2		У								
1										
Y X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Е - тЕгерек; О - тОголок; У - жУмуру										

В таблице представлены результаты экспериментов с носителями языка. Они показывают, что для данных слов нет аналогов в русском языке.

5. Некоторые преобразующие глаголы в кыргызском языке. См. раздел 3. Минимальная математическая модель для глагола БАЙЛА - два неподвижных

(окружность A, окружность B) и один подвижный объект (отрезок T).
Пользователь должен знать слова АЙЛАНА, ТАЯК. Команда:

Айланаларды таяк менен БАЙЛА!

Последовательность условий:

1) Начальное положение $A \cap B = \varnothing; A \cap T = \varnothing; T \cap B = \varnothing;$

2) Завершающее положение $A \cap T \neq \varnothing; T \cap B \neq \varnothing$

($A \cup B \cup T$ является связным множеством).

Минимальная математическая модель для глагола ТҮЗӨТ:

- два подвижных красных отрезка одинаковой длины, имеющие общую точку, между двумя неподвижными близкими синими прямыми. Команда:

Кызыл сызыкты ТҮЗӨТ!

Последовательность условий:

1) Начальное положение: угол между отрезками $130^0..160^0$.

2) Завершающее положение: угол между отрезками около 180^0.

(Изучается после глагола ТҮЗӨТ)

Минимальная математическая модель для глагола БҮКТӨ - два подвижных отрезка одинаковой длины, имеющие общую точку.

Сызыкты БҮКТӨ!

Последовательность условий:

1) Начальное положение: угол между отрезками $60^0..160^0$.

2) Завершающее положение: угол между отрезками около 0^0.

Список использованных источников

1. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Кыргыз тилин компьютерде көрсөтүү каражаттары // Ж. Баласагын атындагы КУУ жарчысы: Серия 3. Табигый-техникалык илимдер. Чыгарылышы 4(8). Математика. Информатика. Кибернетика. – Бишкек: КУУ, 2009. – 163-172-б.

2. Панков П.С., Баячорова Б.Ж., Жураев М. Кыргыз тилин компьютерде чагылдыруу: монография. – Бишкек: Турар, 2010. – 172 б.

3. Pankov P.S., Bayachorova B.J., Juraev M. Mathematical Models for Independent Computer Presentation of Turkic Languages // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 3, No.1, 2012. – Pp. 92-102.

4. Pankov P.S., Bayachorova B.J. Occam's razor in mathematical models of notions of Turkic languages // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. by Acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 155-158.

5. Bayachorova B.J., Pankov P.S. Mathematical models for independent computer presentation of complex expressions in natural languages // Вестник КРСУ, серия естественные и технические науки, 2016, том 16, № 5. – С. 19-21.

6. Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning // Information Sciences, 1975, Vol. 8, pp. 199-249, 301-357; Vol. 9, pp. 43-80.

7. Карабаева С.Ж. Единый алгоритм словоизменения и представление пространства в кыргызском языке. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2016. – 62 с.

8. Pankov P.S., Karabaeva S.J. Mathematical and computer models of spatial concepts in Kyrgyz language // Интернет-журнал ВАККР, 2016, № 3. – 7 с.

9. Karabaeva S.J., Pankov P.S. Independent computer presentation of spatial notions in Turkic languages // Пятая Международная конференция по компьютерной обработке тюркских языков «TurkLang 2017». – Труды конференции. Том 1. – Казань: Издательство АН Республики Татарстан, 2017. - С. 68-78.

10. Баячорова Б.Ж., Карабаева С.Ж. Эквивалентность и неопределенность математических высказываний и команд // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 121-127.

11. Pankov P.S., Karabaeva S.A. Mathematical models of spatial surrounding sin Kyrgyz language // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 67.

MSC 49J15

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ В МОДЕЛИ ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ В ПОЧТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ С УПРУГОСТЬЮ

Панков П.С., Акерова Дж.А.
Институт математики НАН КР

Термодинамиканын экинчи законун тактыктоонун негизинде буга чейин авторлор таасир этилүүчү системада материалдык чекитти сүрүлүүсүз жана сүрүлүүнүн негизинде кандайдыр бир аралыкка жылдырууда убакыттан көз каранды болгон энтропиянын өсүүсүнүн төмөнкү баасын алышкан. Бул макалада баштапкы чекитке кайтарылган итерип жиберүүдөгү кыймыл үчүн баалоо алынган.

Урунттуу сөздөр: энтропия, башкаруу, дифференциалдык теңдеме, таасир этилүүчү система, сүрүлүү, итерип жиберүү

Как уточнение второго закона термодинамики, ранее авторами были получены оценки снизу для возрастания энтропии при передвижении материальной точки без трения и с трением на определенное расстояние в зависимости от времени в перманентно неустойчивых системах. В данной статье получены оценки для движения с возвратом в начальную точку с отталкиванием.

Ключевые слова: энтропия, управление, дифференциальное уравнение, перманентно неустойчивая система, трение, отталкивание

As a specification of the second law of thermodynamic, earlier the authors derived estimations from below on increasing of entropy while motion of a material point both without friction and with friction over definite distance on depending on time in permanently unstable systems. Estimations for motion with returning to the initial point with repelling are obtained in this paper.

Keywords: entropy, control, differential equation, permanently unstable system, friction, repelling

1.Введение. Мы используем следующее определение (см. например [1]). *Энтропия* H - это функция состояния *термодинамической системы*, определяющая меру необратимого рассеивания энергии, ее изменение (в тех видах процессов, которые мы будем рассматривать) определяется по формуле $\Delta H = \sum \frac{\Delta Q}{\Theta}$, где ΔQ - количества переданной тепловой энергии или энергии, необратимо перешедшей в тепловую, Θ - абсолютные температуры.

Общепринятая гипотеза, называемая *второй закон термодинамики*: в замкнутых системах энтропия может только возрастать.

Ранее нами были выдвинуты гипотезы [4], [6], [7] о том, что при некоторых условиях возможны оценки снизу для количества увеличения энтропии и были получены оценки снизу для возрастания энтропии при передвижении материальной точки без трения и с учетом трения на определенное расстояние в зависимости от времени в перманентно неустойчивых системах [8].

В данной статье получены оценки для движения с возвратом в начальную точку с отталкиванием от упругой и неупругой плоскости.

Во втором разделе статьи введены необходимые определения и приведены наши гипотезы.

В третьем разделе поставлены соответствующие краевые задачи для дифференциального уравнения, описывающего движение точки в рамках теории оптимального управления, доказана одна оценка и высказана гипотеза о другой оценке.

2. Определения и гипотезы. На основании [2], где найдена нижняя оценка увеличения энтропии при обработке одного бита информации $\Delta H \geq k_b \Theta \ln 2$ (k_b- постоянная Больцмана), и замечания [3]: «чем быстрее пловец проплывет определенную дистанцию, тем больше энергии он затратит» в [4] нами были выдвинуты следующие гипотезы.

Пусть имеется физическая замкнутая система, в данный момент она находится в стационарном состоянии A и есть возможность перехода в другое стационарное состояние B.

<u>Гипотеза 1.</u> Существует такой отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), зависящий только от начального состояния системы, что для любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше некоторой положительной величины при любом переходе от состояния A к состоянию B за время T. Существует также такая константа C_0, что

$$\Delta H \geq \frac{C_0}{T^2} \qquad ([C_0] = [m][L]^2[\Theta]^{-1}),$$

где $[\cdot]$- размерность физической величины, m - масса, L - длина.

Если исходить из принципа детерминизма, то в замкнутой системе есть только один сценарий будущего, то есть не могут существовать различные возможности переходов. Поэтому мы предполагаем, что различные возможные действия внутри системы, переводящие ее из состояния A в состояние B, задаются некоторым внешним воздействием (управлением) достаточно малой энергии. Такую систему мы назвали "таасир этилүүчү" [5].

Приведем более конкретную формулировку гипотезы.

Пусть в некоторой инерциальной системе координат в момент времени t_1 в этой системе некоторая материальная точка массы m неподвижна и в момент времени $t_2 = t_1 + T$ она также неподвижна и находится на расстоянии X от начального положения.

<u>Гипотеза 2</u>. Существуют такие отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), и такая константа G_0, зависящие только от начального состояния системы, что для любого $T < T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше $\Delta H \geq \frac{G_0 m X^2}{T^2}$ $([G_0] = [\Theta]^{-1})$.

В данной статье эта гипотеза подтверждается для движения в поле тяжести с отталкиванием от упругого тела. Получена оценка для коэффициента.

3. Постановка и решение задач. Предположим, что неподвижная точка массы m находится на высоте h над абсолютно упругой плоскостью, она должна коснуться плоскости, вернуться в исходное положение и стать также неподвижной; имеются неограниченные возможности как ускорения, так и торможения точки, и при торможении вся энергия переходит в тепло при постоянной температуре (теплоемкость среды достаточно велика).

Тогда получаем следующую задачу оптимального управления:

$$y''(t) = \frac{u(t)}{m} - g \quad (0 \leq t \leq T),\ y(0) = h; y'(0) = 0;\ y(T) = h, x'(T) = 0 \quad (1)$$

с дополнительным условием: существует такой момент времени $w \in (0,T)$, что

$$y(w)=0;\ y'(w-0)>0;\ y'(w+0) = -y'(w-0).$$

Здесь управляющее воздействие (кусочно-непрерывная функция) $u(t)$ – сила $[u(t)] = [m][L]^2[\mathrm{T}]^{-2}$.

Требуется минимизировать функционал, показывающий количество энергии, перешедшей в тепло, то есть выделившейся при торможении.

Адиабатическое время (здесь - с нулевым приращением энтропии) получается при $u(t)\equiv 0$. Время падения точки с высоты h равно $\sqrt{\frac{2h}{g}}$, отсюда адиабатическое время $T_0 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Очевидно, что для наиболее быстрого прохождения точки нужно придать ей наибольшую скорость в начальный момент, после чего $u(t)\equiv 0$. Полагаем $y'(+0) = -v$, тогда $y(t) = h - vt - \frac{1}{2}gt^2$ $(y(t) > 0)$.

Получаем уравнение $h - vw - \frac{1}{2}gw^2 = 0$, и в силу симметрии $w = \frac{1}{2}T$, откуда $v = (h - \frac{1}{2}gw^2)/w = 2(h - \frac{1}{8}gT^2)/T$.

Кинетическая энергия точки в конце равна кинетической энергии точки в начале и она вся переходит в тепло. Таким образом, приращение энтропии пропорционально следующему выражению.

$$\Delta H \sim \frac{1}{2}m\left(2(h - \frac{1}{8}gT^2)/T\right)^2 = 2m\left((h - \frac{1}{8}gT^2)/T\right)^2, T < 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

При стремлении $T \to 0$ получаем $\Delta H \sim 2mh^2/T^2$, что подтверждает Гипотезу 2.

Рассмотрим случай абсолютно неупругой плоскости. Вся энергия удара о плоскость переходит в тепло, точка становится неподвижной.

Очевидно, что для наиболее быстрого прохождения точки нужно придать ей наибольшую скорость в начальный момент и в момент после удара, в остальные моменты времени $u(t)\equiv 0$. Полагаем $y'(+0) = -v_1, y'(w+0) = v_2$, тогда

$$y(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 (0 < t < w),$$

$$y(t) = v_2(t - w) - \frac{1}{2}g(t - w)^2 (w < t < T).$$

Получаем уравнения

$$h - v_1 w - \tfrac{1}{2} g w^2 = 0, v_2(T - w) - \tfrac{1}{2} g (T - w)^2 = h. \qquad (2)$$

Скорости сначала и после удара:

$y'(w - 0) = -v_1 - gw, y'(T - 0) = v_2 - g(T - w),$

при этом должно быть

$$v_2 - g(T - w) \geq 0. \qquad (3)$$

Приращение энтропии после двух торможений

$$\Delta H \sim \tfrac{1}{2} m (v_1 + gw)^2 + \tfrac{1}{2} m \left(v_2 - g(T - w)\right)^2. \qquad (4)$$

Решая уравнения (2) относительно v_1 и v_2 и подставляя в (4) и (3), получаем

$$\Delta H \sim \frac{1}{2} m \left((h - \frac{1}{2} g w^2)/w + gw\right)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2} m \left((h + \tfrac{1}{2} g (T - w)^2)/(T - w) - g(T - w)\right)^2, \qquad (5)$$

должно быть

$$(h + \tfrac{1}{2} g (T - w)^2)/(T - w) - g(T - w) \geq 0. \qquad (6)$$

После упрощений

$$\Delta H \sim \tfrac{1}{2} m \left(\left((h + \tfrac{1}{2} g w^2)/w\right)^2 + \left((h - \tfrac{1}{2} g (T - w)^2)/(T - w)\right)^2\right), \qquad (7)$$

должно быть

$$h - \tfrac{1}{2} g (T - w)^2 \geq 0. \qquad (8)$$

Минимизация выражения (7). Вычисляя производную в (7) и заменяя $p = \frac{1}{2} g$, получаем:

$$\Delta H_w{}' \sim m \left(\left(\frac{h + p w^2}{w}\right)\left(-\frac{h}{w^2} + p\right) + \left(\frac{h - p(T - w)^2}{(T - w)}\right)\left(-\frac{h}{(T - w)^2} - p\right)\right).$$

Это выражение обращается в ноль при $w=T/2$, отрицательно при w, близком к 0, и положительно при w, близком к T. Подставляя $w=T/2$ в (8), получаем $h - \frac{1}{2} g (T - w)^2 = h - \frac{1}{8} g T \geq h - \frac{1}{8} g T_0 = 0.$

Подставляя $w=T/2$ в (7), получаем, что, возможно, минимальное приращение энтропии

$$\Delta H \sim \frac{1}{2} m(((h+pw^2)/w)^2 + ((h-pw^2)/w)^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m((h+pw^2)^2 + (h-pw^2)^2)}{w^2} = \frac{m(h^2+(pw^2)^2)}{w^2}$$

$$= 4\frac{m(h^2+(pT^2/4)^2)}{T^2} \; .$$

При стремлении $T\to 0$ получаем $\Delta H \sim 4mh^2/T^2$, что подтверждает Гипотезу 2.

Список использованных источников

1. Мартин Н. Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. –Москва: Мир, 1988. – 350 с.

2. Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process // IBM Journal of Research and Development, vol. 5, 1961, pp. 183-191.

3. Landauer R., Bennett C. H. The Fundamental Physical Limits of Computation //Scientific American, July, 1985, pp. 48-56.

4. Панков П.С. Адиабатические показатели замкнутых систем // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 3. Естественно-технические науки. Физика и физическое образование, 2003. – С. 146-147.

5. Панков П., Баячорова Б., Жураев М. Кыргыз тилин компьютерде чагылдыруу. – Бишкек: Турар, 2010. – 172 б.

6. Pankov P., Akerova Dzh. Minimization in mathematical model of increment entropy in almost closed systems // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. Acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – P. 252.

7. Кененбаева Г.М., Акерова Дж.А., Кененбаев Э. Математические модели для оценки приращения энтропии // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018.

8. Панков П.С., Акерова Дж.А. Дифференциальные уравнения с управлением в модели возрастания энтропии в почти замкнутых системах с трением // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 23-30.

MSC 97U40

СОФТ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИНТЕРНЕТ-СОРЕВНОВАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ ЗАДАНИЯМИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Панков П.С., Джумабаев Э.Т.
Институт математики НАН КР, компания Mad Devs

Макалада ар түрдүү математикалык предметтер боюнча окуучулардын билимин эффекттүү жана калыс (кезектеги жана жыйынтык, ошондой эле мелдеш түрүндө) көзөмөлдөөнү түзүүчүлүк, сейректик, сырдуулук принциптеринин жана “жалпыланган маселе” аныктамасынын негизинде комплекстик электрондук экзамен катары куруу баяндалды.

Урунттуу сөздөр: электрондук экзамен, комплекстик экзамен, жалпыланган маселе, интерактивдүү маселе, түзүүчүлүк, сейректик, сырдуулук, математика

В статье описано построение усовершенствованного программного обеспечения для эффективного и объективного контроля (как текущего, так и заключительного, а также в форме соревнований) знаний учащихся по различным математическим дисциплинам в виде комплексного электронного экзамена, построенного на основе принципов формируемости, уникальности, конфиденциальности и понятия обобщенной задачи.

Ключевые слова: электронный экзамен, комплексный экзамен, обобщенная задача, интерактивная задача, формируемость, уникальность, конфиденциальность, математика

In the paper construction of software for effective and objective monitoring of students’ knowledge in various mathematical subjects (both current and final, also in form of competitions) as a complex electronic examination on the base of principles of generativity, uniqueness, confidentiality and general definition of “parameterized task” is described.

Key words: electronic examination, complex examination, parameterized task, interactive task, generativity, uniqueness, confidentiality, mathematics

Введение. В статье описано построение усовершенствованного программного обеспечения для разнообразного контроля знаний по различным разделам математики, с проверкой не только знаний, умений и навыков, но и логического мышления и интуиции, исключающее предварительное заучивание ответов и другие способы нарушения объективности и способствующее творческой работе преподавателей математических дисциплин.

1. Обзор публикаций по автоматизации контроля знаний. Насколько известно, в педагогической практике тестирование с закрытыми ответами впервые было применено во второй половине XIX века в Великобритании: давались вопросы и ряд ответов к каждому из них, от учащихся требовалось выбрать правильный ответ.

Такие формализованные тесты (также называемые тестами с закрытыми ответами, тестами множественного выбора) для контроля знаний начали широко использоваться в первой четверти XX века. В это же время были разработаны специальные бланки, механические и электромеханические устройства для ускорения проведения и автоматизации обработки результатов тестирования.

С появлением компьютеров в массовом пользовании в 70-е годы XX века были разработаны соответствующие программные средства. При этом выявились недостатки такой методики, например, как написано в [1]: «появляются программы — тестовые оболочки, которые, по мнению их создателей, можно одинаково успешно наполнить любым материалом … Пользователям таких тестовых оболочек остается составить банк контрольных заданий по своим дисциплинам с несколькими вариантами ответов к каждому заданию. Применение получающихся контролирующих программ насаждает крайне негативную методику проверки знаний с выбором ответа из списка, содержащего заведомо неверные утверждения, причем часть из них обычно провоцирует учащихся совершать типичные ошибки. Такая методика неоднократно подвергалась справедливой критике … и не имеет никаких иных причин существования, кроме неумения программировать».

Для частичного исправления ситуации были разработаны приемы предъявления большего количества ответов, из которых может быть несколько правильных, расширения базы с однотипными задачами, из которых случайным образом выбираются задачи для данного участника.

Развитие последнего приема привело к развитию в 1980-е годы программирования на компьютере «*случайного формирования заданий*», «*параметризованных вопросов*» для отдельных дисциплин, см. например [2], [3]. В 1990-е годы такой способ был обобщен в некоторых публикациях, например [4], [5], [6].

В ходе развития этого способа, с нашим участием, был разработан следующий комплекс требований к компьютерному контролю знаний, для обеспечения требований объективности, валидности и надежности:

- Формируемость: задание в полном виде не существует до начала экзамена (аналогичный термин «фасеточность»: задание комбинируется из случайных элементов);
- Уникальность: все экзаменуемые получают разные задания (аналогичный термин - «параллельность»).
- Полная конфиденциальность: до оценки компьютером ответа экзаменуемого, никто (в том числе и составители задач, и организаторы) не знает правильных ответов на предложенные задания.
- Представительность: компьютерная тестирующая программа должна быть формой не только контроля, но и представления знаний.
- Конкретность: ответ должен быть в виде числа (точного или приближенного), слова, действия, с однозначно определенным результатом.
- Способ оценивания приближенного ответа: требовать вычисление ответа «*с точностью $E= 0.1$ или 0.01 ...*», а оценивать его по правилу: если $|X- X_0|<2E$, где X – ответ, данный экзаменуемым, а X_0 – точный ответ или ответ, вычисленный компьютером с большой точностью, то засчитывается полный балл.
- Интерактивность (может быть осуществлена только на компьютере).

Для реализации этих требований были предложены определения:

"Обобщенная задача" – это алгоритм для получения нескольких однотипных задач с выбором параметров, исходными данными для алгоритма являются случайные числа, выбираемые в некоторых диапазонах; "настраиваемая обобщенная задача" - исходными данными для алгоритма являются диапазоны, выбираемые (преподавателем) в рамках некоторых базовых диапазонов, и случайные исходные данные, выбираемые в выбранных диапазонах.

В этих определениях, не умаляя общности, можно считать, что данные диапазоны являются диапазонами целых чисел. По целым числам, используя математические операции и понятие массива, можно также получить исходные данные в виде дробных чисел, векторов, матриц, многочленов для математики, а также варьировать логические условия задач.

2. Понятие комплексного экзамена. До публикации [7] термин “комплексный экзамен” понимался как соединение нескольких экзаменов по дисциплинам, входящим в одно направление или специализацию. В [7] было отмечено, что наличие и возможности современной компьютерной техники и существующие у современных студентов навыки по ее использованию позволяют автоматизировать комплексную проверку знаний.

Было предложено определение [8]. Компьютерный комплексный экзамен – это программное обеспечение или по современной терминологии - софт, позволяющее проводить всесторонний контроль знаний, умений и навыков по дисциплине, с возможностью выбора и настройки преподавателями (организаторами соревнования) различных типов заданий, автоматическим подведением итогов, уникальности заданий для каждого испытуемого (участника соревнования).

Возможны следующие опции при работе софта.

- Вид задания - на дисплее или письменный (распечатка).

- Допускается ли повторная попытка при неправильном ответе.

- Показывается ли правильный ответ при неправильном ответе.

- Нужен ли ввод пароля преподавателя, показывать ли окончательный результат учащемуся или только преподавателю (экзаменатору).

- Проверка: - самим студентом (самоконтроль), то есть использование софта в учебных целях; - преподавателем по выдаваемой вместе с текстами распечатке ответов (текущий контроль); - экзаменаторами после окончания экзамена и сдачи всех письменных работ (занесения всех ответов в компьютер) по распечатке ответов, которая выдается по специальному запросу, с фиксацией времени выдачи (вступительный или итоговый экзамен, соревнование).

В настоящей работе описан усовершенствованный софт, в котором некоторые необходимые действия производятся автоматически.

3. Типы обобщенных задач по математике. Мы предлагаем давать задачи не только на непосредственную проверку знания соответствующего правила (формулы), но и на небольшой перебор, чтобы (*) сделать способы решения более разнообразными и (**) дать шансы участникам, не имеющим соответствующих знаний. Также с целью (**) рекомендуется по возможности не употреблять терминов, а составлять задания так, чтобы участник мог догадаться о смысле.

В большинстве задач мы предлагаем выполнение и других действий, то есть «задач в задаче» с целями:

- научить участников более внимательно читать текст задачи;
- требовать ввод только одного числа, для упрощения софта;
- сделать набор получающихся задач более разнообразным;
- обеспечить целочисленность результата.

В свою очередь, последнее обеспечивается тремя основными способами:

- задача (на любую тему) составляется так, чтобы ответ был целочисленным;
- (более сложно) требуется округление до целого с недостатком или избытком;
- (еще более сложно) требуется округление до ближайшего целого (надо проследить, чтобы промежуточный ответ не был целым-с-половиной).

Во многих типах задач можно не программировать их решения, а двигаться от готового ответа к условию.

3.1. Задачи «традиционного» типа - текстовое условие, числовой ответ.

3.2. Интерактивные задачи, которые реализуются только на компьютере. Общая задача: имеется некоторая функция со скрытыми параметрами и есть возможность запросов, выбираемых самим экзаменуемым, о значениях функции в задаваемых точках. Найти скрытые параметры или какие-либо свойства функции.

«Вам нужно найти решение уравнения F(X) = 0, где F(X) - монотонная непрерывная функция» или «Вам нужно найти максимальное (минимальное) значение параболической функции …» «с точностью до 0.01», «Для этого Вы можете запрашивать значения функции F(X) при любых значениях аргумента».

Повторять: Вывести «Введите значение X или 0 для выхода»;
после ввода «0» - «Введите Ваше решение».

Возможна также зависимость оценки от количества запросов.

3.3. Задачи на «измеряющее воображение».

3.4. Мультимедийные задачи. Исходные данные даются во временной последовательности, в виде изображения или звука.

4. Построенные софты. По алгоритмам, часть из которых была описана выше, были написаны программы на языке *pascal*, и на их основе - софты на языке *Delphi*, обеспечивающие дружественный интерфейс. Пользователь мог выбирать один из трех языков: кыргызский, русский, английский для получения задания [9-10]. В этих софтах после прохождения экзамена участник должен был найти файл с указанным именем, где содержатся его результаты в зашифрованном виде, и переслать его в жюри. Это усложняло проведение соревнований и уменьшало количество возможных участников.

Для исправления данного недостатка нами был написан софт на языке *Python*. При его использовании участник только проходит экзамен, а его результаты автоматически сохраняются и потом просматриваются жюри. URL-адрес нашего тестирующего приложения генерируется облачным сервисом herokuapp.com, на котором хранится наше приложение.

Список использованных источников

1. Бурковская М.А. Зимина О.В., Кириллов А.И. Компьютерный контроль знаний в среде Academia XXI // Информатика и образование. – 2002, № 9. - С. 81-87.

2. Панков П.С., Саадабаев А.С. Мектеп окуучулардын XXI бүткүл союздук математикалык олимпиадасы // Эл агартуу, 1987, № 10. - 29-34-б.

3. Панков П.С. Обучающая и контролирующая программа по словоизменению в кыргызском языке на ПЭВМ. - Бишкек: Мектеп, 1992. - 20 с.

4. Kashy E., Sherrill B. M., Tsai Y., Thaler D., Weinshank D., Engelmann M., Morrissey D. J. CAPA, an integrated computer assisted personalized assignment system // American J. Phys. 61 (12), 1993, pp. 1124-1130.

5. Демушкин А.С., Кириллов А.И., Сливина Н.А., Чубров Н.А., Кривошеев А.О., Фомин С.С. Компьютерные обучающие программы // Информатика и образование. 1995. - № 3.

6. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Опыт и перспективы использования комплекса UNIQTEST уникальных тестовых заданий в учебном процессе // Образование и наука в новом геополитическом пространстве: Тез.докл. научно-практической конференции. – Бишкек: МУК, 1995. - С. 217.

7. Панков П.С., Джаналиева Ж.Р. Проектирование и развитие программных экзаменационных комплексов по математике и физике // Образование в XXI веке: ценности и перспективы: Материалы Междун. научно-практ. конф. Часть 2. - Бишкек: КАО, 2001. - С. 281-284.

8. Панков П.С., Копеев Ж.Б., Кусманов К. Разработка концепции компьютерного комплексного экзамена и его содержание для информатики и математики // Вестник МУК, 2012, № 1 (21) - С.15-19.

9. Кусманов К.Р., Копеев Ж.Б., Назарбаев Ф.Т. Опыт использования комплексных компьютерных экзаменов по математике и информатике // Материалы Международной научной конференции молодых ученых, магистрантов, студентов и школьников «XV Сатпаевские чтения», том 19. – Павлодар, 2015. – С. 283-290.

10. Назарбаев Ф.Т. Опыт проведения интернет-соревнований по математике с индивидуальными заданиями для учащихся // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 177-184.

2010 MSC: 34E15, 45M05

ИНТЕГРАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дауылбаев М.К., Конисбаева К.Т.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

Белгисиз функциянын экинчи туундусунун коэффициенты нөл болгон сингулярдуу өзгөргөн сызыктуу үчүнчү тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемелр үчүн эки чекиттүү интегралдык четтик маселе каралат. Сингулярдуу өзгөргөн бир тектүү дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы, кошумча баштапкы жана чектик функциялары тургузулду. Чыгарылыштын аналитикалык формуласы жана асимптотикалык баалоолору табылды.

Урунттуу сөздөр: интегро-дифференциалдык теңдемелер, сингулярдык өзгөрүүлөр, кичине параметр, баштапкы секирик.

Изучается двухточечная интегральная краевая задача для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка, когда коэффициент при второй производной равен нулю. Построены фундаментальная система решений, вспомогательные начальные и граничные функции сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения. Получены аналитическая формула и асимптотические оценки решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, сингулярные возмущения, малый параметр, начальный скачок.

A two-point integral boundary value problem for singularly perturbed third-order linear integro-differential equations is studiedin case when the coefficient for the second derivative is zero. A fundamental system of solutions, auxiliary initial and boundary functions of a singularly perturbed homogeneous differential equation are constructed. An analytical formula and asymptotic estimates of the solution are obtained.

Keywords: integro-differential equations, singular perturbations, small parameter, initial jump.

Рассмотрим сингулярно возмущенное линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + B(t)y' + C(t)y = F(t) +$$
$$+ \int_0^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)]dx \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$h_1 y \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha,\ \ h_2 y \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta,$

$$h_3 y \equiv y(1,\varepsilon) - \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} a_i(x) y^{(i)}(x,\varepsilon)dx = \gamma, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$- малый параметр, α, β, γ-известные постоянные.

Пусть выполнены условия:

I. Функции $B(t), C(t), F(t), a_i(t), i = 0,1$ на отрезке $0 \le t \le 1$, $H_0(t,x),\ H_1(t,x)$ в области $D = \{0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1\}$ будем считать достаточно гладкими, причем $B(t) < 0,\ \ 0 \le t \le 1$.

II. Корни «дополнительного харатеристческого уравнения» $\mu^2 + B(t) = 0$ удовлетворяют условиям$\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0, \mu_2(t) > \gamma_2 > 0$.

III. $a_1(1) \neq 1$.

Фундаментальная система решений сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения $L_\varepsilon y = 0$ имеет вид [2]:

$$y_1^{(i)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^i} exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \mu_1(x)dx\right)\left(\mu_1^i(t)y_{10}(t) + O(\sqrt{\varepsilon})\right), i = \overline{0,2},$$

$$y_2^{(i)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^i} exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1 \mu_2(x)dx\right)\left(\mu_2^i(t)y_{20}(t) + O(\varepsilon)\right), i = \overline{0,2}, \tag{3}$$

$$y_3^{(i)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(i)}(t) + O(\varepsilon), i = \overline{0,2},$$

где $y_{30}(t) = exp\left(-\int_0^t \frac{C(x)}{B(x)}dx\right)$, а $y_{10}(t), y_{20}(t)$- решение дифференциальной задачи: $2B(t)y_{i0}'(t) - \left(3\mu_i(t)\mu_i'(t) + C(t)\right)y_{i0}(t) = 0, y_{i0}(0) = 1, i = 1,2.$

Составим вспомогательные функции [2]:

$$K_1(t,s,\varepsilon) = \frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)},\ K_2(t,s,\varepsilon) = \frac{P_2(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{4}$$

где $P_1(t,s,\varepsilon),\ P_2(t,s,\varepsilon)$ - определители, получаемые из $W(s,\varepsilon)$ заменой его третьей строки строками $y_1(t,\varepsilon), 0, y_3(t,\varepsilon)$ и $0, y_2(t,\varepsilon), 0$. Сумма $K_1(t,s,\varepsilon)$ и

$K_2(t,s,\varepsilon)$ является функцией Коши. С помощью формул (4) для функций $K_1(t,s,\varepsilon)$, $K_2(t,s,\varepsilon)$ получаем асимптотические формулы:

$$K_1^{(i)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon\left(\frac{y_{30}^{(i)}(t)}{y_{30}(s)B(s)}\right.$$

$$\left. - \frac{\mu_1^i(t)y_{10}(t)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^i y_{10}(s)\mu_1(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))} exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_s^t \mu_1(x)dx\right)\right) +$$

$$+O\left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_s^t \mu_1(x)dx\right)\right), \qquad s \le t, i = \overline{0,2},$$

$$K_2^{(i)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon\left(\frac{\mu_2^i(t)y_{20}(t)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^i y_{20}(s)\mu_2(s)\left(\mu_2(s)-\mu_1(s)\right)} exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^s \mu_2(x)dx\right)\right) + +O\left(\sqrt{\varepsilon} + \right.$$

$$\left.\frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^s \mu_2(x)dx\right)\right), t \le s, i = \overline{0,2},$$

(5)

Введем граничные функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i = 1,2,3$, являющиеся решениями задачи $L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon) = 0, h_k\Phi_i(t,\varepsilon) = \delta_{ki}$, $i,k = 1,2,3$, где δ_{ki} - символ Кронекера. Для граничных функций с учетом (3) получаем асимптотическое представление:

$$\Phi_1^{(i)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(i)}(t)\mu_1(0) - \frac{y_{30}'(0)\mu_1^i(t)y_{10}(t)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}\mu_1(0)} exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx\right)$$

$$+ + \frac{\mu_2^i(t)y_{20}(t)h_3y_{30}(t)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}y_{20}(1)\left(1-a_1(1)\right)} exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\right) +$$

$$+O\left(\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-2}} exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \mu_1(x)dx\right) + \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-2}} exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1 \mu_2(x)dx\right)\right), \qquad (6)$$

$$\Phi_2^{(i)}(t,\varepsilon) = -\sqrt{\varepsilon}y_{30}^{(i)}(t) + \frac{y_{10}(t)\mu_1^i(t)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx\right) +$$

$$+\frac{\mu_2^i(t)y_{20}(t)(h_3y_{30}(t)-a_1(0))}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}\mu_1(0)y_{20}(1)(1-a_1(1))}exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-2}}exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\mu_1(x)dx\right)+\frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-2}}exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx\right)+\varepsilon\right),$$

$$\Phi_3^{(i)}(t,\varepsilon)=\frac{\mu_2^i(t)y_{20}(t)}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^i y_{20}(1)\left(1-a_1(1)\right)}exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx\right)$$

$$++O\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}}exp\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_t^1\mu_2(x)dx\right)\right)$$

IV. Пусть число 1 не является собственным значением ядра

$$H(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{1}\int_s^1 H_i(t,x)K_1^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{1}\int_0^s H_i(t,x)K_2^{(i)}(x,s,\varepsilon)dx$$

Теорема 1. Если выполнены условия I-IV, то краевая задача (1), (2) на отрезке [0,1] имеет единственное решение, выражаемое формулой

$$y(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^3 C_iQ_i(t,\varepsilon)+P(t,\varepsilon), \tag{7}$$

где

$$Q_i(t,\varepsilon)=\Phi_i(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_1(t,s,\varepsilon)\bar{\varphi}_i(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t K_2(t,s,\varepsilon)\bar{\varphi}_i(s,\varepsilon)ds,$$

$$P(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_1(t,s,\varepsilon)\bar{F}(s,\varepsilon)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_1^t K_2(t,s,\varepsilon)\bar{F}(s,\varepsilon)ds, \tag{8}$$

$$\bar{\varphi}_i(s,\varepsilon)=\int_0^1\sum_{j=0}^{1}\bar{H}_j(s,x,\varepsilon)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)dx,$$

$$\bar{F}(s,\varepsilon)=F(s)+\int_0^1 R_\varepsilon(s,p,1)F(p)dp,\bar{H}_j(s,x,\varepsilon)$$

$$=H_j(s,x)+\int_0^1 R_\varepsilon(s,p,1)H_j(p,x)dp,$$

$R_\varepsilon(t,s,1)$ - резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$, представимая в виде асимптотической формулы $R_\varepsilon(t,s,1) = R_0(t,s,1) + O(\varepsilon)$, постоянные C_i, $i = 1,2,3$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1 h_1 Q_1(t,\varepsilon) + C_2 h_1 Q_2(t,\varepsilon) + C_3 h_1 Q_3(t,\varepsilon) = \alpha - h_1 P(t,\varepsilon), \\ C_1 h_2 Q_1(t,\varepsilon) + C_2 h_2 Q_2(t,\varepsilon) + C_3 h_2 Q_3(t,\varepsilon) = \beta - h_2 P(t,\varepsilon), \\ C_1 h_3 Q_1(t,\varepsilon) + C_2 h_3 Q_2(t,\varepsilon) + C_3 h_3 Q_3(t,\varepsilon) = \gamma - h_3 P(t,\varepsilon) \end{cases}$$

Теорема 2. Если выполнены условия I-IV, то для решений задачи (1), (2) справедливы следующие асимптотические оценки при $\varepsilon \to 0$:

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(|\alpha| + \sqrt{\varepsilon}|\beta| + |\gamma| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$

$$+\frac{C}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}\left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$

$$+\frac{C}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}}\left(|\alpha| + \sqrt{\varepsilon}|\beta| + |\gamma| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right), i = 0,1,2,$$

где C > 0 – некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Доказательство теоремы следует из формулы (7) с учетом оценок

$$\left|Q_k^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C + \frac{C}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{C}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}}, k = 1,3,$$

$$\left|Q_2^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C\sqrt{\varepsilon} + \frac{C}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{C}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}}, i = 0,1,2,$$

$$\left|P^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\left(1 + \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}} + \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{i-1}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\sqrt{\varepsilon}}}\right),$$

получаемых из (8) в силу (5), (6). Из теоремы 2 получаем, что

$$y''(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), y'(1,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Отсюда следует, что решение задачи (1), (2) в точке $t = 0$ обладает явлением начального скачка первого порядка, а в точке $t = 1$ - нулевого порядка.

Подтверждение

Авторы были частично поддержаны грантом МОН РК №AP05132587 «Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывным и кусочно-постоянным аргументом» (2018-2020) Комитета по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список использованных источников

1.Kassymov K.A., Nurgabyl D.N., Uaisov A.B. Asymptotic estimates for the solutions of boundary value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives // Ukrainian Mathematical Journal. Vol. 65, No 5, 2013, P. 694-708.

2. Дауылбаев М.К., Ергалиев М.Г. Асимптотическое поведение решения краевой задачи для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. //Труды международной научно-практической конференции «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике: теория, методика и опыт», Тараз, 27-28 сентября 2013 г. С. 161-165.

MSC 45A05, 45B 05

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТИЛТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Асанов А., Каденова З.А.
Кыргызско-Турецкий Университет Манас, ИМ НАН КР

Бул макалада өсүүчү функциянын туундусу жана тескери эмес квадраттык формалар методунун жардамында биринчи түрдөгү эки өзгөрүлмөлүү Стильтьесанын сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн чечимдеринин жалгыздыгы теоремасы далилденди.

Урунттуу сөздөр: сызыктуу интегралдык теңдеме, биринчи түрдөгү, эки өзгөрмө, жалгыздык.

В данной работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции и методом неотрицательных квадратичных форм доказывается единственность решений для одного классе линейных интегральных уравнений Стильтьеса первого рода с двумя независимыми переменными.

Ключевые слова. Линейные интегральные уравнения, первый род, две независимых переменных, единственность.

In the present article the theorem about uniqueness of the linear integral equations Stielties of the first two independent variables with method of nonnegative quadratic forms and the consept of derivative with respect to increasing function.

Keywords: linear integral equations, first kind, two variables, uniqueness.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+$$

$$+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$= f(t,x),(t,x)\in G=\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t\le T,\ a\le x\le b\}, \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ являются строго возрастающие непрерывные функции соответственно в области $[a,b]$ и $[t_0,T]$,

$$K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y),\ t_0\le t\le T, & a\le y\le x\le b; \\ B(t,x,y),\ t_0\le t\le T, & a\le x\le y\le b, \end{cases} \qquad (2)$$

$A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $M(t,x,s)$, $N(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$ - известные функции определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):\quad t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\},$$
$$G_2=\{(t,x,y):\quad t_0\le t\le T,\quad a\le x\le y\le b\},$$
$$G_3=\{(t,x,s):\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le x\le b\},$$
$$G_4=\{(t,x,s,y):\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\},$$

$f(t,x)$- известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$. Решение $u(t,x)$ ищется в $L^2_{\phi,\psi}(G)$, где $L^2_{\phi,\psi}(G)$, $v(t,x)\in L^2_{\phi,\psi}(G)$, тогда и только тогда когда

$$\int_G |v(t,x)|^2 d\phi(x)d\psi(t)<\infty.$$

Различные вопросы интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1-8] и [10-11]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [6], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [1] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование, многопараметрического семейства решений. В [4] изучены вопросы регуляризации и единственности решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В работах [10-11] с помощью понятия производной по возрастающей функции [9] изучены скалярные и системы интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого и третьего рода.

Обозначим

$$P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y),\ (s,y,z)\in G_1, \tag{3}$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$1)\ P(s,b,a)\in C[t_0,T],\ P(s,b,a)\ge 0,$$

$$P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\in C(G),\ \ P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\le 0, \forall\ (s,y)\in G,$$

$$P'_{\varphi(z)}(s,b,z)\in C(G),\ \ P'_{\varphi(z)}(s,b,z)\ge 0,\ \forall\ (s,z)\in G,$$
$$P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\in C(G_1),\ \ P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\le 0,\ \forall\ \ (s,y,z)\in G_1,$$

$$H(T,y,t_0)\in C[a,b],\ H(T,y,t_0)\ge 0,\ \forall\ y\in[a,b],$$
$$H'_{\psi(s)}(s,y,t_0)\in C(G),\ H'_{\psi(s)}(s,y,t_0)\le 0,\ \forall(s,y)\in G,$$

$$H'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau)\in C(G),\ \ H'_{\psi|\tau|}(T,y,\tau)\ge 0\ \forall\ (y,\tau)\in G,$$

$$H''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau)\in C(G_3),\ \ H''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau)\le 0\ \forall\ \ (s,y,\tau)\in G_3;$$

и для любого

$$v(t,x)\in L_2(G),\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)d\varphi(y),\int_x^b B(t,x,y)v(t,y)d\varphi(y),\int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)d\psi(s)\in C(G),$$

где $C[t_0,T]$, $C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$ - пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,T]$, G, G_1 и G_3;

2) $C(T,b,t_0,a)\ge 0$,

$$C'_{\varphi(s)}(s,b,t_0,a)\in C[t_0,T],\ C'_{\varphi(s)}(s,b,t_0,a)\le 0\ \forall s\in[t_0,T],$$

$$C'_{\varphi(\tau)}(T,b,\tau,a)\in C[t_0,T],\ C'_{\varphi(\tau)}(T,b,\tau,a)\ge 0\ \forall\ \tau\in[t_0,T],$$

$$C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\in C[a,b],\ C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\le 0\forall\ y\in[a,b],$$

$$C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z)\in C[a,b],\ C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z)\ge 0\ \forall z\in[a,b],$$

$$C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\in C(G),\ C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\ge 0\ \forall\ (s,y)\in G,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\le 0\ \forall\ (y,\tau)\in G,$$

$$C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\in C(G),\ C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\le 0\ \forall\ (s,z)\in G,$$

$$C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\ge 0\ \forall\ (\tau,z)\in G,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(z)}(s,y,\tau,a)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(z)}(s,y,\tau,a)\ge 0\ \forall\ (s,y,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\le 0\ \forall\ (s,z,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\in C(G_1),\ C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\ge 0\forall\ (s,y,z)\in G_1,$$
$$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\in C(G_1),\ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\le 0\forall\ (\tau,y,z)\in G_1,$$

$$C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\in C(G_4),\ C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\ge 0\forall\ (s,y,\tau,z)\in G_4,$$
$$C''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,b,\tau,a)\in C(G_5),$$
$$C''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,b,\tau,a)\le 0\forall\ (s,\tau)\in G_5=\{(s,\tau):t_0\le\tau\le s\le T\},$$
$$C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\in C(G_6),$$
$$C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\le 0\forall(y,z)\in G_6=\{(y,z):a\le z\le y\le b\},$$

3) При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\right)\alpha_1^2+$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-H'_{\varphi(y)}(s,y,t_0)\right)\alpha_2^2+\frac{2}{(s-t_0)(y-a)}\left(-C(s,y,t_0,a)\right)\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left(-H''_{\psi(\tau)\varphi(s)}(s,y,\tau)\right)\alpha_3^2+\frac{2}{y-a}\left(-C'_{\varphi(\tau)}(s,y,\tau,a)\right)\alpha_3\alpha_1+$$

$$+\frac{2}{s-t_0}\left(-C'_z(s,y,t_0,z)\right)\alpha_2\alpha_4+\frac{1}{s-t_0}\left(-P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\right)\alpha_4^2+$$

$$+\left(-2C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(s,y,\tau,z)\right)\alpha_3\alpha_4\geq 0;$$

4) Если при почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется, хотя бы, один из следующих условий:

1) $\alpha_1=0$; 2) $\alpha_2=0$; 3) $\alpha_3=0$; 4) $\alpha_4=0$.

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (1) единственно в классе $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

Доказательство. В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+$$

$$+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=f(t,x),\ (t,x)\in G. \tag{4}$$

Обе части уравнения (4) умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_y^b B(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \tag{5}$$

Применяя формулу Дирихле из (5), имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y\left[A(s,y,z)+B(s,z,y)\right]u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \tag{6}$$

Учитывая обозначения (3), получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\varphi(z)d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y). \tag{7}$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, для первого интеграла получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\psi(z)d\varphi(y)d\varphi(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(z)\,u(s,y)d\varphi(y)d\varphi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^T P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\varphi(y)d\varphi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}P'_{\varphi(z)}(s,b,z)\left(\int_{z}^{b}u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\psi(z)d\varphi(s)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)^2 d\psi(z)d\varphi(y)d\varphi(s), \qquad (8)$$

где $P'_{\psi(z)}(t,x,s)$, $P'_{\varphi(x)}(t,x,s)$ частные производные по t и s соответственно. Дважды интегрируя по частям и применяя формулы Дирихле для второго интеграла, имеем

$$\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$
$$=-\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}H(s,y,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)d\tau u(s,y)d\varphi(s)d\varphi(y)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{T}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\varphi(y)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}H'_{\psi(s)}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\psi(s)d\varphi(y)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}H'_{\tau}(T,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{T}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(y)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}H''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(s)d\varphi(y). \qquad (9)$$

Для преобразования третьего интеграла, используем соотношение

$$C\nu''_{\psi(\tau)\phi(z)}=(C\nu)''_{\psi(\tau)\phi(z)}-\left(C'_{\psi(\tau)}\nu\right)'_{\phi(z)}-\left(C'_{\phi(z)}\nu\right)'_{\psi(\tau)}+C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}\nu.$$

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)=$$
$$=\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_{a}^{y}C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial z}\left(\int_{\tau}^{s}\int_{z}^{y}u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)d\varphi(z)d\psi(\tau)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T C(s,y,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T C'_\tau(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\psi(s)d\psi(\tau)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_z^b C'_z(s,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T\int_z^b C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\varphi(\tau)d\varphi(z).$$

Далее, имея в виду, что

$$C\nu\nu''_{\varphi(s)\varphi(y)}=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{\psi(s)\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\psi(s)}\nu^2\right)'_{\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_{\varphi(y)}\nu^2\right)'_{\psi(s)}+\frac{1}{2}C''_{\psi(s)\varphi(y)}\nu^2-C\nu'_{\varphi(y)}\nu'_{\varphi(s)}$$

и применением формулу Дирихле

получим $-\int_a^b\int_{t_0}^T C(T,b,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,\nu)d\xi\right)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(s)d\varphi(y)+$

$$+\frac{1}{2}C'_\tau(T,b,\tau,a)\left(\int_\tau^T\int_a^b u(\xi,\nu)d\xi d\nu\right)^2 d\psi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C'_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\left(\int_\tau^T\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'_\tau(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)d\psi(\tau)d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}C'_z(T,b,t_0,z)\left(\int_{t_0}^T\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)-$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C''_{\tau z}(T,b,\tau,z)\left(\int_\tau^T\int_z^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(z)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y C'''_{\tau zy}(T,y,\tau,z)\left(\int_\tau^T\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(\tau)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\tau zs}(s,b,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\psi(\tau)d\varphi(s)d\varphi(y)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)\times$$

$$\times d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y). \qquad (10)$$

Выражения (8), (9) и (10) подставляя в (7), получим

$$\frac{1}{2}(T,b,t_0,a)\left(\int_a^b\int_{t_0}^T u(\xi,\nu)d\xi d\nu\right)^2+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\left\{P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2-\right.$$

$$-C_{\psi(s)}(s,b,t_0,a)\left(\int_a^b\int_{t_0}^s u(\nu,\xi)d\nu d\xi\right)^2+$$

$$\left.+C_{\psi(s)}(T,b,s,a)\left(\int_s^T\int_a^b u(\xi,\nu)d\xi d\nu\right)^2\right\}d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\{H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2-C_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a)\left(\int_a^y\int_{t_0}^T u(\nu,\xi)d\nu d\xi\right)^2+\right.$$

$$\left.+C'_{\varphi(y)}(T,b,t_0,y)\left(\int_{t_0}^T\int_y^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\right\}d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y\left\{L\left(s,y,\tau,z,\int_a^y u(s,\nu)d\nu,\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi,\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left[P'_{\varphi(y)}(s,b,y)\left(\int_y^b u(s,\nu)d\nu\right)^2+H'_{\psi(s)}(T,y,s)\left(\int_s^T u(\xi,y)d\xi\right)^2+\right.$$

$$+C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\left(\int_{t_0}^{s}\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2-$$

$$C''_{\psi(s)\varphi(y)}(T,y,s,t_0)\left(\int_s^T\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2-$$

$$\left.-C''_{\varphi(y)\psi(s)}(s,b,t_0,y)\left(\int_{t_0}^{s}\int_y^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2+C''_{\psi(s)\varphi(y)}(T,b,s,y)\left(\int_s^T\int_y^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left[C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2-\right.$$

$$\left.-C'''_{\psi(\tau)\varphi(y)\psi(s)}(s,b,\tau,y)\left(\int_\tau^s\int_y^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{s-t_0}\left[C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^{s}\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2-\right.$$

$$\left.-C'''_{\psi(s)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,s,z)\left(\int_s^T\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\right]+$$

$$\left.+C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2\right\}d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}C''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,b,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^b u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\psi(\tau)d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^y C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^{T}\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)^2 d\varphi(z)d\varphi(y)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^{T} f(s,y)u(s,y)d\psi(s)d\varphi(y). \tag{11}$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$ Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4), из (11) имеем $\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)\,d\xi = 0,\ \forall (s,y)\in G$ или $\int_{a}^{y} u(s,v)\,dv = 0,\ \forall (s,y)\in G.$

Отсюда $u(t,x)=0,$ при всех $(t,x)\in G.$ Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода. //Журнал вычислительной математики и математический физики. 1979. Т.19. № 4. -С. 970-989.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. //ДАН СССР. 1959. Т.127. № 1. -С. 31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980, 286 с.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. // О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода // ДАН 2007. Т. 415. № 1. -С. 14-17.
5. Иманалиев М.И., Асанов А., Каденова З.А. Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными // ДАН 2014. Т. 454. № 5. -С. 518-522.
6. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. -Utrecht, VSP, 2003. 168 p.
7. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. -Utrecht, VSP,1998, 276 p.
8. Bukhgeim A.L. Volterra Equations and Inverse Problems, -Utrecht, VSP, 1999. 204 p.
9. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. //Журнал Естественных наук, КТУМ, Бишкек, 2001, №1, -С.18-64.
10. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго и первого рода. // Журнал Естественных наук, КТУМ, Бишкек, 2002, №2, -С.79-95.

11. Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса // Журнал Естественных наук, КТУМ, Бишкек, 2003, №4, -С.65-78.

2010 MSC: 34K20, 45J05

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО НЕЯВНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Искандаров С., Бокобаева З.Б.
Институт математики НАН Кыргызской Республики

Үчүнчү тартиптеги сызыктуу айкын эмес Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык тендеменин чыгарылыштарынын асимптотикалык турумдуулугунун жетиштүү шарттары табылат.

Урунттуу сөздөр: айкын эмес интегро-дифференциалдык тендеме, чыгарылыштардын асимптотикалык турумдуулугу.

Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного неявного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра.

Ключевые слова: неявное интегро-дифференциальное уравнение, асимптотическая устойчивость решений.

The sufficient conditions of asymptotic stability of solutions of linear implicit third-order Volterra, type intego-differential equation are established.

Keywords: implicit integro-differential equation, asymptotic stability of solutions.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0$; под асимптотической устойчивостью решений линейного вольтеррова ИДУ третьего порядка понимается стремление к нулю всех его решений и их первых и вторых производных при $t \to \infty$; ИДУ- интегро-дифференциальное уравнение; неявное ИДУ третьего порядка означает ИДУ третьего порядка, содержащее третью производную неизвестной функции в интегральном члене; АУ - асимптотическая устойчивость.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия АУ решений линейного неявного ИДУ третьего порядка вида:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+\right.$$
$$\left.+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right]d\tau=f(t),\ \ t\geq t_0. \tag{1}$$

Насколько нам известно, такая задача решается впервые.

Для решения выше сформулированной задачи в ИДУ (1) сделаем следующую нестандартную замену [1]:

$$x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \tag{2}$$

где $0<p,q$ – некоторые вспомогательные параметры; $0<W(t)$ – некоторая весовая функция, $y(t)$ – новая неизвестная функция. Тогда аналогично [1] ИДУ (1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \\ y'(t)+b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+\right. \\ \left.+P_1(t,\tau)x'(\tau)+P_2(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)\,y'(\tau)\right]d\tau=F(t),\quad t\geq t_0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$b_2(t)\equiv a_2(t)-p+W'(t)(W(t))^{-1},\quad b_1(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_1(t)-pa_2(t)+p^2-q],$$
$$b_0(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_0(t)-qa_2(t)+pq],\ P_0(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-qQ_2(t,\tau)+$$
$$+pqQ_3(t,\tau)],\ P_1(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)-pQ_2(t,\tau)+(p^2-q)Q_3(t,\tau)],$$
$$P_2(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_2(t,\tau)W(\tau)+(W'(\tau)-pW(\tau))Q_3(t,\tau)],$$
$$K(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}Q_3(t,\tau)W(\tau),\ F(t)\equiv (W(t))^{-1}f(t).$$

Далее исследование системы (3) проведем аналогично, как в [2], а именно дальнейшие преобразования проведем отдельно для каждого ее уравнения, затем их сложим.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t))$ системы (3) ее первое уравнение возводим в квадрат [3, с.28], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям и вследствие чего получаем тождество

$$V_1(t)\equiv\int_{t_0}^{t}[(x''(s))^2+(p^2-2q)(x'(s))^2+q^2(x(s))^2]ds+p(x'(t))^2+$$
$$+2qx(t)x'(t)+pq(x(t))^2\equiv V_1(t_0)+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds. \tag{4}$$

Для преобразования второго уравнения системы (3) сначала аналогично [3] введем следующие предположения и обозначения:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)\,(i=1...n)-$ некоторые срезывающие функции,

$$\begin{gathered}R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1},\ E_i(t)\equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1},\\ R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\quad (i=1,...,n),\end{gathered} \tag{R}$$

$c_i(t)\ \ (i=1,...,n)-$некоторые функции.

Теперь для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t))$ системы (3) ее второе уравнение умножаем на $y'(t)$ [4, с. 194-217], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия $(K),(f)$, функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t),$ условие (R), функции $c_i(t)$, используем леммы 1.4, 1.5 [5]. В итоге имеем следующее тождество:

$$\begin{gathered}V_2(t)\equiv 2\int_{t_0}^{t}(y'(s))^2ds+b_2(t)(y(t))^2+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\\ -2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\\ +\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\}\equiv V_2(t_0)+\int_{t_0}^{t}b_2'(s)(y(s))^2ds+\\ +\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau\right]ds+2\int_{t_0}^{t}y'(s)\{F_0(s)-\\ -b_1(s)x'(s)-b_0(s)x(s)-\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)+P_2(s,\tau)y(\tau)]d\tau\}ds,\end{gathered} \tag{5}$$

где $Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y'(\eta)d\eta\quad (i=1,...,n).$

Сложим тождества (4), (5) и для любого решения $(x(t),y(t))$ будем получать следующее тождество:

$$V(t)\equiv\int_{t_0}^{t}[(x''(s))^2+(p^2-2q)(x'(s))^2+q^2(x(s))^2]ds+p(x'(t))^2+$$

$$+2qx(t)x'(t)+pq(x(t))^2+2\int_{t_0}^{t}(y'(s))^2ds+b_2(t)(y(t))^2+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2+$$

$$+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\}\equiv V(t_0)+\int_{t_0}^{t}[(W(s))^2+b_2'(s)](y(s))^2ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\Big[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau\Big]ds+2\int_{t_0}^{t}y'(s)\{F_0(s)-$$

$$-b_1(s)x'(s)-b_0(s)x(s)-\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)+P_2(s,\tau)y(\tau)]d\tau\}ds, \qquad (6)$$

где $V(t)=V_1(t)+V_2(t).$

К последнему интегралу с $y'(s)$ в правой части тождества (6) применим неравенство $2x_1x_2\le x_1^2+x_2^2$ для $\forall x_1,x_2\in R.$ Тогда из (6) имеем следующее неравенство:

$$u(t)\equiv\int_{t_0}^{t}[(x''(s))^2+(p^2-2q)(x'(s))^2+q^2(x(s))^2]ds+p(x'(t))^2+$$

$$+2qx(t)x'(t)+pq(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}(y'(s))^2ds+b_2(t)(y(t))^2+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2+$$

$$+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau\}\le V(t_0)+\int_{t_0}^{t}[(W(s))^2+b_2'(s)](y(s))^2ds+ \qquad (7)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\Big[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau\Big]ds+\int_{t_0}^{t}\{F_0(s)-b_1(s)x'(s)-b_0(s)x(s)-$$

$$-\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)x'(\tau)+P_2(s,\tau)y(\tau)]d\tau\}^2ds.$$

Переходом от (7) к интегральному неравенству и применением леммы об интегральном неравенстве из [5] доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия: 1) $p>0,q>0,$ $W(t)>0;$ $p^2-2q>0;$ $p=\varepsilon_1+\varepsilon_2,$ $\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0;$ $pq=\mu_1+\mu_2,$ $\mu_1>0,$ $\mu_2>0;$ 2) $q^2\le\varepsilon_2\mu_2;$ 3) $b_2(t)\ge b_{20}>0,$

существует функция $b_2^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что

$b_2^{'}(t) \le b_2^*(t) b_2(t)$; 4) $A_i(t) \ge 0, B_i(t) \ge 0, B_i^{'}(t) \le 0, R_{i\tau}^{'}(t,\tau) \ge 0,$ существуют функции

$A_i^*(t) \in L^1(J, R_+), c_i(t), R_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такие, что

$A_i^{'}(t) \le A_i^*(t) A_i(t); (E_i^{(K)}(t))^2 \le B_i^{(K)}(t) c_i^{(K)}(t), R_{it\tau}^{''}(t,\tau) \le R_i^*(t) R_{i\tau}^{'}(t,\tau)$ $(i = 1...n; k = 0,1)$;

5) $(W(t))^2 + \left\{ |F_0(t)| + |b_1(t)| + |b_0(t)| + \int_{t_0}^{t} [|P_0(t,\tau)| + |P_1(t,\tau)| + |P_2(t,\tau)|] d\tau \right\}^2 \in L^1(J, R_+) \setminus \{0\})$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3) справедливы следующие утверждения:

$$x^{(K)}(t) \in L^2(J, R) \quad (k = 0,1,2), \tag{8}$$

$$y(t) = O(1), \tag{9}$$

а также для любого решения $x(t)$ ИДУ третьего порядка (1) верны предельные соотношения:

$$\lim_{t \to \infty} x^{(K)}(t) = 0 \quad (k = 0,1,2), \tag{10}$$

т.е. любое решение $x(t)$ ИДУ (1) АУ.

Для установления (10) применяется лемма Люстерника-Соболева [2], при этом используются соотношения (8), (9).

Список использованных источников

1. Искандаров С. О новом варианте метода нестандартного сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Бишкек: Илим, 2007.- Вып.37.- С.24-29.

2. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка //Там же.- Бишкек: Илим, 2012.- Вып.44.- С.44-51.

3. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра.- Бишкек: Илим, 2002.- 216 с.

4. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и аналитические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.- Бишкек, 2003.- 34 с.

5. Искандаров С. Об ограниченности и устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.- Фрунзе: Илим, 1979. - С.85-102.

MSC 18C05

ЭЛЕМЕНТЫ КАТЕГОРИИ КОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л.
Институт математики НАН КР,
Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына

Өзгөртүүлөрдө чыгарылышты сактоо принцибинин негизинде “предикат” түшүнүгүнүн жардамы менен теңдеменин жаңы жалпы түшүнүгүн киргизгенбиз. Бул макаланын максаты: корректүү тендемелердин категорияларынын элементтерин, белгилүү болгон “Адамар боюнча корректүүлүктү” кошуу менен, теңдемелердин категориясынын камтылган категориясы катары түзүү жана корректүүлүктү сактоо менен өзгөртүп түзүүлөрдүн мисалдарын келтирүү.
Урунттуу сөздөр: категория, морфизм, теңдеме, предикат, чыгарылыш, корректтүүлүк

Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия “предикат” на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений на основе известных категорий. Цель данной статьи: построить элементы категории корректных уравнений как подкатегории категории уравнений с включением известной «корректности по Адамару» и привести примеры преобразований с сохранением корректности.
Ключевые слова: категория, морфизм, уравнение, предикат, решение, коррректность

A new general notion of equation was introduced by us with assistance of the notion “predicate” on the base of the principle of preservation of solution while transformations and elements of the category of equations were constructed on the base of well-known categories. The aim of this paper is to construct elements of the category of correct equations including the known “Hadamard correctness” and to present examples of transformations with preserving of correctness.
Keywords: category, morphism, equation, predicate, solution, correctness

1. Введение. Термин «категория» в смысле оснований математики был введен в [1]. В дальнейшем он оказался удобным для изложения многих разделов математики, поскольку теория категорий рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев [2], ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками, см. [3].

Категория для одного из видов уравнений была построена в [4]. Нами предложены новое понятие уравнения и аксиоматика для уравнений в целом [5]-[6].

В данной статье эта аксиоматика уточняется для уравнений, обычно называемых «корректными». Приведены примеры.

2. Известные сведения из теории категорий. Теория категорий возникла из того, что с теоретико-множественной точки зрения совокупность всех множеств не является множеством - это приводит к противоречиям. Условно говорится, что «она слишком велика». То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики. Поэтому нельзя говорить, например, о «категории всех категорий».

Определение 1. Категория K задаётся

1) Совокупностью $A,B,C,$ ... объектов $Ob(K)$;

2) Совокупностью $f,g,h,$ ...морфизмов $Mor(K)$;

3) Операциями dom и cod, которые сопоставляют каждому морфизму f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются началом и концом f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f : A \to B$. В этом случае говорят, что f – морфизм из A в B.

4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов f и g, таких, что $cod(f) = dom(g)$, выдаёт некоторый морфизм $g \circ f : A \to C$ (она называется композицией g и f).

5) Операцией I, которая по каждому объекту A выдаёт некоторый морфизм $I_A : A \to A$ (он называется тождественным или единичным морфизмом объекта A).

Совокупность всех морфизмов из A в B в категории K обозначается $K(A, B)$. При этом должны выполняться следующие условия:

1. Ассоциативность композиции. Для любой тройки морфизмов f, g, h, $f{:}A \to B$; $g{:}B\to C$; $h{:}C \to D$ выполнено равенство $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

2. Свойства тождества. Для любого морфизма $f: A \to B$ выполнены равенства $f\circ I_A = f$, $I_B\circ f = f$.

Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

Категория множеств *Set*. *Ob(Set)* - непустые множества, *Mor(Set)* – функции, отображающие одни множества в другие.

Категория функций *Func* (операторов, преобразований, отображений). *Ob(Func) = Mor(Set)*, *Mor(Func)* – преобразования функций. В свою очередь, подкатегории этой категории используются в различных разделах математики.

Категория топологических пространств *Top*. *Ob(Top)* - топологические пространства, *Mor(Top)* - непрерывные отображения.

Понятия из этой категории используются, в том числе, в категории уравнений, и ее подкатегории - категории корректных уравнений.

3. Построение категории уравнений. Обычно уравнения подразделяются неформально на алгебраические, дифференциальные, интегральные, с начальными или краевыми условиями и т.д. Нами был использован тот факт, что уравнения и системы уравнений различных типов эквивалентны. Более того, известный прием понижения порядка автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, различные методы подстановок и преобразований аргумента, развиваемый в Кыргызстане метод преобразования решений, созданные в Кыргызстане метод дополнительного аргумента, метод сведения дифференциальных уравнений к системам операторно-разностных уравнений показали, что эквивалентными могут быть уравнения с различными решениями, и даже в различных пространствах. Поэтому мы расширили понятие «уравнение» с включением понятий «система уравнений», «уравнение с дополнительными условиями» для строгого и единообразного описания упомянутых методов и формулировки основных понятий, объектов и морфизмов категории уравнений и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями.

Категорию уравнений мы обозначили *Equa*.

<u>Определение 2</u>. *Ob(Equa)* - наборы {непустые множества X, Y, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B:X\rightarrow Y$}.

Решением уравнения $\{X, Y, P, B\}$ называется такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x)))$.

В частности, если *B*- тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x)"*.

Mor(Equa) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Также мы определили некоторые подкатегории категории *Equa*.

Категория уравнений для функций *Equa-Func*.

<u>Определение 3</u>. *Ob(Equa-Func)* - наборы { $X\in Ob(Func)$, $Y\in Ob(Func)$, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B:X\rightarrow Y$}. *Mor(Equa-Func)* - преобразования, в том числе следующие:

Преобразование аргумента. Для функции $x(t)$ вводится биективная замена $t=\psi(s)$, обозначается $z(s)=x(\psi(s))$ из нового пространства функций Z и вводится предикат P_1, такие, что $\{x\in X:P(x)\}=\{z\in Z: P_1(z)\}$.

Для уравнений с параметрами мы предложили

<u>Определение 4</u>. *Ob(Equa-Par)* - наборы {непустые множества X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, преобразование $B:X\rightarrow Y$}.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f\in F$ названо такое $y(f)\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x)))$. В частности, если *B*- тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x,y)"*.

Mor(Equa-Par) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме F), что решения (или их отсутствие) сохраняются.

4. Категория корректных уравнений. При нашем подходе «корректность» может быть только по параметру (в широком смысле). Для категории корректных уравнений с параметрами предлагается обозначение *Equa-Par-Top*.

<u>Определение 5</u>. *Ob(Equa-Par-Top)* - наборы {топологические пространства X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, непрерывное преобразование $B:X\to Y$}. При этом 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)\ (P(x,f)\wedge(y=B(x)))$;

2) элемент y непрерывно зависит от элемента f.

Mor(Equa-Par-Top) - преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

Пример 1. Если предикат записывается в виде $P(x,f)$ =" $A(x)=f$", где A-некоторый оператор, B - тождественное преобразование, то получаем «корректность по Адамару».

Пример 2. Если $x(t)$ - дифференцируемая функция, предикат записывается в виде $P(x,f)$ =" $x'(t)=a(t)x(t);\ x(0)=f\in\mathbf{R}$", B - тождественное преобразование, то получаем «непрерывную зависимость решения начальной задачи от начальных данных». Преобразование

$$P_1(x,f) = "x(t)-\int_0^t a(s)x(s)ds = f\ "$$

приводит к Примеру 1. Преобразование $P_2(x,f)$ =" $x(t)=a(t)\ (f+\int_0^t x(s)ds)$", $B_2(x(t))=x'(t)$ приводит к замене дифференциального уравнения интегральным с параметром.

Список использованных источников

1. Eilenberg S., MacLane S. A general theory of natural equivalences // Transactions of American Mathematical Society, 1945, 58: pp. 231–294.

2. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками: Автореферат дисс. … к. ф.-м.н. (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.

3. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп // Известия Академии наук, вып.4, 2007. - С. 1-6.

4. Rosický J. Equational categories // Cachiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - Pp.85-95.

5. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.

6. Kenenbaeva G.M., Askar kyzy L. Foundations of category of equations // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 46.

MSC 49J15

КИЧИНЕ ПАРАМЕТРДИ КАРМАГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕГЕ ЛАТТАНЫН ЫКМАСЫН КОЛДОНУУ

Назаркулова Б., Кененбаева Г.М., Өмүрзакова Г.К.
Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына

Бул иште кичине параметрди жогорку туундусунда кармаган четки шарттар менен берилген экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн курама ажыралыш ыкмасын анализдөө каралат. Берилген маселенин чыгарылышынын ажыралышы Латтанын ыкмасын пайдаланып табылды.

Урунттуу сөздөр: Кичине параметрлүү экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме, курама ажыралыш ыкмасы, Латтанын ыкмасы.

В этой работе рассматривается анализ метода составных разложений для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром с краевыми условиями. Найдено решение исходной задачи с использованием метода Латты.

Ключевые слова: Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром, метод составных разложений, метод Латты.

In this paper, an analysis of the method of composite expansions for an ordinary second-order differential equation with a small parameter with boundary conditions is considered. Found a solution to the original problem using the Latta method.

Key words: Ordinary second-order differential equations with a small parameter, composite decomposition method, Latta method.

Киришүү. Четки катмардын маселелерин изилдөөдө ар түрдүү ыкмалар колдонулат. Мисалы, аларга кайчылаштырылган асимптотикалык ажыралыш ыкмасы, курама ажыралыш ыкмасы [1] ж.б.

Курама ажыралыш ыкмасынын жөнөкөй формасын тургузууда ажыралышта көз каранды өзгөрүүчү негизинен суммадан турат деп болжолдойбуз.

Бул иште кичине параметрди жогорку туундусунда кармаган экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн курама ажыралыш ыкмасын Латтанын ыкмасын пайдаланып анализдөө каралат.

Курама ажыралыш жалпысынан төмөнкүчө берилет:

$$y(x,\varepsilon) = y^{o}(x,\varepsilon) + y^{i}(\xi,\varepsilon) - (y^{o})^{i}, \qquad (1)$$

мында y – көз каранды өзгөрмөлүү, $\varepsilon > 0$ - кичине параметр, x – сырткы өзгөрмөлүү, ξ – ички өзгөрмөлүү. (1) ажыралыш сырткы жана ички ажыралыштардын суммасынан, андан алардын жалпы бөлүгү болгон $(y^{o})^{i}$ же $\left(y^{i}\right)^{0}$ ду кемиткендин жыйынтыгынан келип чыгат.

Сырткы жана ички ажыралыштарды аныктап, аларга салыштыруу эрежесин пайдаланып, андан кийин курама ажыралышты тургузуунун ордуна курама ажыралыштын башкача ыкмасы Латта тарабынан сунуш кылынган.

Латтанын ыкмасы менен төмөнкү маселенин бир мүчөлүү бир калыпта ылайыктуу болгон чыгарылышынын ажыралышын табабыз:

$$\varepsilon y''(x) + (8x+1)y'(x) = 1, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad (2)$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \qquad (3)$$

мында α,β– каалагандай туруктуу сандар, $[0{,}1]$ кесиндисинде $y'(x)$ тин коэффициенти $8x+1 > 0$ болгондуктан, бир калыпта эместик $x = 0$ чекитинин аймагында болот. Бир калыпта болбогон аймакта $y(x)$ тин абалын сүрөттөш үчүн кеңейтилген $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$ өзгөртүүсүн пайдаланып ички ажыралышты $e^{-\xi} = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ функциясынын жардамы менен туюнтабыз.

(2) жана (3) маселеси өзгөрмөлүү коэффициентти кармайт, анда бир мүчөлүү ажыралыш y төмөнкү түрдө болот:

$$y = f_0(x) + e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}} \cdot h_0(x), \qquad (4)$$

мында $g(x)$ функциясы анализдин жыйынтыгында аныкталат, $x \to 0$ да x менен эквиваленттүү болот.

(4) ажыралышты (2) теңдемесине коёбуз:

$$\varepsilon\left[f_0''(x) + \left(\frac{g'(x)}{\varepsilon}\right)^2 \cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) - 2\left(\frac{g'(x)}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}\right) \cdot h_0'(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{g''(x)}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) + e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}} \cdot h_0''(x)\right] +$$

$$+(8x+1)\left[f_0'(x) - \frac{g'(x)}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) + e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}} \cdot h_0'(x)\right] = 1.$$

Бирдей даражадагы ε^0, $\varepsilon^0 e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}$ жана $\varepsilon^{-1} e^{-\frac{g(x)}{\varepsilon}}$ дун коэффициенттерин барабарлап $g(x)$, $f_0(x)$ жана $h_0(x)$ функцияларын аныкташ үчүн теңдемелерди алабыз:

$$h_0(x)g'(x)\big(g'(x) - (8x+1)\big) = 0, \qquad (5)$$

$$(8x+1)f_0'(x) = 1, \qquad (6)$$

$$h_0'(x)\big(8x+1-2g'(x)\big) - g''(x)h_0(x) = 0. \qquad (7)$$

Четки шарттар

$$f_0(1) = \beta, \qquad (8)$$

$$f_0(0) + h_0(0) = \alpha \qquad (9)$$

түрүндө болушат.

(5) тен $h_0(x) \neq 0$, анда

$g'(x) = 0$ же $g'(x) = 8x+1$ болот.

Биринчи $g'(x) = 0$ учурунан $g(x) = const$ келип чыгат да алынып салынат, себеби $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x} = 1$.

Натыйжада, $g'(x) = 8x + 1$ учурунан

$$g(x) = 4x^2 + x \tag{10}$$

болот.

(6) теңдемеси (8) шарты менен төмөнкү чыгарылышка ээ болот:

$$f_0(x) = \beta + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{8x+1}{9}\right|. \tag{11}$$

(11) ден $f_0(0) = \beta - \frac{1}{8}\ln 9$, анда (9) шарты

$$h_0(0) = \alpha - \beta + \frac{1}{8}\ln 9 \tag{12}$$

түрүнө келет.

(10) ду (7) тендемесине коюп (x) ке карата теңдемени алабыз

$$(8x+1)h_0'(x) = -8h_0(x).$$

Бул теңдеме (12) шарты менен төмөнкү чыгарылышка ээ болот.

$$h_0(x) = \frac{1}{8x+1}\left(\alpha - \beta + \frac{1}{8}\ln 9\right). \tag{13}$$

Эми (10), (11), (13) чыгарылыштарды (4) кө коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$y(x) = \beta + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{8x+1}{9}\right| + \left[\frac{1}{8x+1}\left(\alpha - \beta + \frac{1}{8}\ln 9\right)\right]e^{-\frac{4x^2+x}{\varepsilon}}. \tag{14}$$

Алынган ажыралыш бир калыпта ылайыктуу жана (3) четки шарттар орун алат:

$$y(0) = \beta - \frac{1}{8}\ln 9 + \alpha - \beta + \frac{1}{8}\ln 9 = \alpha,$$

$$y(1) = \beta + (\text{э.к.ч.}) = \beta,$$

мында кыскача (э.к.ч.) – экспоненциалдык кичине чоңдуктар үчүн колдонулат.

Эскертүү. (1) теңдемесинде $y'(x)$ тин коэффициенти тескери болгон учурун да кароого болот.

Латтанын ыкмасын пайдаланып төмөнкү теңдеменин четки шарттары менен бир мүчөлүү бир калыпта ылайыктуу болгон чыгарылышынын ажыралышын табабыз:

$$\varepsilon y''(x) - (2x^2 + x + 1)y'(x) = 4x + 1, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \tag{2}$$

мында $[0,1]$ сегментинде $y'(x)$ тин коэффициенти $-(2x^2 + x + 1) < 0$ болгондуктан, бир калыпта эместик $x = 1$ чекитинин аймагында болот. Ички өзгөрмөсүн $\xi = \frac{1-x}{\varepsilon}$ түрүндө белгилейбиз.

Каралган маселеде коэффициенттери өзгөрмөлүү, анда yажыралышты төмөндөгүдөй түрдө алабыз:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x) + e^{-\frac{(1-g(x))}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n(x)$$

жана $n = 0$ болгондо бир мүчөлүү бир калыпта ылайыктуу ажыралышы

$$y = f_0(x) + e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} h_0(x) \tag{3}$$

болот. (3) төн экинчи тартипке чейинки туундусун алып, андан кийин (1) теңдемесине коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\varepsilon f_0''(x) + g''(x) e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) + \left(\frac{g'(x)}{\varepsilon}\right)^2 \varepsilon e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} h_0(x) +$$

$$+2g'(x) e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0'(x) + +\varepsilon e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} h_0''(x) -$$

$$-(2x^2 + x + 1)\left[f_0'(x) - \frac{g'(x)}{\varepsilon} \cdot e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0(x) + e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}} \cdot h_0'(x)\right] = 4x + 1.$$

Бирдей даражадагы ε^0, $\varepsilon^0 e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}$ жана $\varepsilon^{-1} e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}$ дун коэффициенттерин барабарлап $g(x)$, $f_0(x)$ жана $h_0(x)$ функцияларын аныкташ үчүн теңдемелерди алабыз:

$$\varepsilon^{-1}e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}: \qquad \left(g'(x)\right)^2 h_0(x) - (2x^2+x+1)g'(x)h_0(x) =$$

$$= g'(x)h_0(x)[g'(x) - (2x^2+x+1)] = 0, \qquad (4)$$

$$\varepsilon^{0}e^{\frac{g(x)-1}{\varepsilon}}: \qquad g''(x)h_0(x) + 2g'(x)h_0'(x) - (2x^2+x+1)h_0'(x) =$$

$$= h_0'(x)[2g'(x) - (2x^2+x+1)] + g''(x)h_0(x) = 0, \qquad (5)$$

$$\varepsilon^0: \qquad -(2x^2+x+1)f_0'(x) = 4x+1 \qquad (6)$$

(4) төн $h_0(x) \neq 0$ болгондуктан

$g'(x) = 0$ же $g'(x) = 2x^2+x+1$ болот.

Биринчи $g'(x) = 0$ учурунан $g(x) = const$ келип чыгат да кароо учуруна тиешелүү болбойт. Натыйжада,

$$g(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + x. \qquad (7)$$

(3) ажыралышты (2) шартына коюп четки шарттарын алабыз:

$$y(0) = f_0(0) + e^{\frac{g(0)-1}{\varepsilon}}h_0(0) = f_0(0) + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}h_0(0) = \alpha + \text{э.к.ч.},$$

$$f_0(0) = \alpha, \qquad (8)$$

$$y(1) = f_0(1) + e^{\frac{g(1)-1}{\varepsilon}}h_0(1) = f_0(1) + e^{\frac{7}{6\varepsilon}}h_0(1) = \beta \qquad (9)$$

(6) теңдемеси (8) шарты менен

$$f_0(x) = \alpha - \ln|2x^2+x+1| \qquad (10)$$

чыгарылышка ээ болот жана

$f_0(1) = \alpha - \ln 4$

болот. (9) шартынан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$h_0(1) = (\beta - f_0(1))e^{-\frac{7}{6\varepsilon}} = (\beta - \alpha + \ln 4)e^{-\frac{7}{6\varepsilon}}. \qquad (11)$$

(7) ни (5) теңдемесине коюп төмөнкүнү алабыз:

$(2x^2+x+1)h_0'(x) + (4x+1)h_0(x) = 0.$

Бул теңдеменин чыгарылышы (11) шарты менен төмөнкүдөй болот:

$$h_0(x) = \frac{4}{2x^2+x+1}(\beta - \alpha + \ln 4)e^{-\frac{7}{6\varepsilon}}. \qquad (12)$$

(10) жана (12) чыгарылыштарды (3) ажыралышка коюп бир мүчөлүү бир калыпта ыңгайлуу ажыралышты алабыз:

$$y(x) = \alpha - \ln|2x^2+x+1| + \frac{4}{2x^2+x+1}(\beta - \alpha + \ln 4)e^{\frac{4x^3+3x^2+6x-13}{6\varepsilon}} + \cdots$$

Четки (2) шарттардын аткарылышын текшеребиз:

$$y(0) = \alpha - \ln 1 + 4(\beta - \alpha + \ln 4)e^{-\frac{13}{6\varepsilon}} = \alpha + \text{э.к.ч.} = \alpha,$$

$$y(1) = \alpha - \ln 4 + \beta - \alpha + \ln 4 = \beta.$$

Колдонулган адабияттар

1. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – Москва: Мир, 1984.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационные исчисление. –Москва: Наука, 1969.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – Москва: Наука, ч.1, 1973.
4. Назаркулова Б, Назаркулова Д.А. Методика решения некоторых задач методом сращиваемых асимптотических разложений// Учебно-методическое пособие для студентов 3-5 курсов КНУ им. Ж.Баласагына. – Б.: ИЦ “Текник”, 2008.

2010 MSC: 35A02, 35M10, 35S05.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ОТРАЖАЮЩИМ ОТКЛОНЕНИЕМ

Юлдашев Т. К.
Сибирский государственный университет науки и технологий

Интегралдык шарттары жана чагылдыруучу жантаюусу бар кубулган ядролуу Фредгольмдун экинчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемеси үчүн спектралдык параметрди киргизүүчү четтик маселенин регулярдык маанилери үчүн чыгарылыштарды түзүүнүн жана чыгарыла тургандыгынын маселелери каралган. Спектралдык

параметрлердин маанилери эсептелинди жана бул маанилерге тийиштүү чыгарылыштар түзүлдү. Коюлган маселенин чыгарыла тургандыгынын критерийлери коюлду.
Урунттуу сөздөр: интегро-дифференциалдык теңдемелер, аймактык эмес четтик маселелер, кубулган ядро, спектралдык параметрлер, чагылдыруучу жантаюу, чыгарыла тургандык.

Рассмотрены вопросы разрешимости и построения решений для регулярных значений спектральных параметроводной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром, интегральными условиями и отражающим отклонением. Вычислены значения спектральных параметров и построены соответствующие этим значениям решения. Установлены критерии разрешимости поставленной задачи.
Ключевые слова: Интегро-дифференциальное уравнение, нелокальная краевая задача, вырожденное ядро, спектральные параметры, отражающее отклонение, разрешимость.

The questions of solvability and construction of solutions for regular values of spectral parameters of a boundary value problem for a second-order Fredholm integro-differential equation with a degenerate kernel, integral conditionsand reflecting deviation are considered. The values of the spectral parameters are calculated and the solutions corresponding to these values are constructed. Established criteria for the solvability of the problem.
Keywords: Integro-differential equation, nonlocal boundary value problem, degenerate kernel, spectral parameters, reflecting deviation, solvability.

Интегро-дифференциальные уравнения являются математическими моделями протекания многих физических процессов и работы технических систем (см. напр. [1, 2]). В [3, 4] показаны приложения интегро-дифференциальных уравнений в теории систем автоматического регулирования. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром и нелокальными интегральными условиями рассматривались в [3-5]. В настоящей работе изучается разрешимость нелокальной интегральной задачи для однородного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром, спектральными параметрами и отражающим отклонением. В вопросе изучения разрешимости и построения решений важную роль играет наличие спектральных параметров. Вычисляются значения спектральных параметров, для которых устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи с нелокальными интегральными условиями и построятся соответствующие решения. Здесь отметим, что наличие отражения в аргументе приводит к изменениям в вопросе разрешимости задачи при иррегулярных значениях спектральных параметров.

К сожалению, из-за ограниченности объема статьи мы не можем привести здесь результаты, полученные для иррегулярных значений спектральных параметров.

На отрезке $[-T\,;T]$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$u''(t)+\lambda^2\,u(t)+\nu\,\int_{-T}^{T}K\,(t\,,s)u(\omega-s)d\,s=0 \tag{1}$$

при следующих интегральных условиях

$$u(T)+\int_{-T}^{T}u(t)d\,t=\alpha\,,u'(T)+\int_{-T}^{T}u'(t)\,t\,d\,t=\beta\,,u(t)=\psi(t), \tag{2}$$

$t\in[T\,;T+\omega]$, где $0<T$ −заданное действительное число, $0<\lambda$ −действительный спектральный параметр, $\alpha\,,\beta=const\,,\nu$ − действительный ненулевой спектральный параметр,

$\psi(t)\in[T\,;T+\omega]\,,K(t\,,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s),0\neq a_i(t)\,,\ b_i(s)\in C\,[-T\,;T]\,.$

Здесь предполагается, что каждая из систем функций $a_i(t)$ и $b_i(s), i=\overline{1\,,k}$, линейно независима.

С учетом вырожденности ядра уравнение (1) запишем в следующем виде

$$u''(t)+\lambda^2\,u(t)=-\nu\,\int_{-T}^{T}\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)u(\omega-s)d\,s\,. \tag{3}$$

С помощью обозначения

$$\tau_i=\int_{-T}^{T}b_i(s)u(\omega-s)d\,s \tag{4}$$

уравнение (3) перепишется в следующем виде

$$u''(t)+\lambda^2\,u(t)=-\nu\,\sum_{i=1}^{k}a_i(t)\tau_i\,. \tag{5}$$

Решая неоднородное дифференциальное уравнение (5), получим

$$u(t)=A_1\cos\lambda\,(t+T)+A_2\sin\lambda\,(t+T)+M\,(t), \tag{6}$$

где $A_1,\ A_2$ −неизвестные постоянные коэффициенты,

$$M(t)=-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i h_i(t)\,,h_i(t)=\int_{-T}^{T}\sin\lambda\,(t-s)\ a_i(s)d\,s\,,i=\overline{1\,,k}\ .$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (6) воспользуемся интегральными условиями (2) и относительно этих коэффициентов мы приходим к системе линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} A_1\sigma_1(\lambda) + A_2\sigma_2(\lambda) = \varphi_0\,, \\ A_1\sigma_3(\lambda) + A_2\sigma_4(\lambda) = \psi_0\,, \end{cases} \tag{7}$$

где

$\sigma_1(\lambda) = \lambda^{-1}(\lambda\cos 2\lambda T + \sin 2\lambda T)\,,$

$\sigma_2(\lambda) = \lambda^{-1}(-\cos 2\lambda T + \lambda\sin 2\lambda T + 1)\,,$

$\sigma_3(\lambda) = \lambda^{-2}(-\lambda T\cos 2\lambda T - \lambda T + (1+\lambda^2)\sin 2\lambda T)\,,$

$\sigma_4(\lambda) = \lambda^{-2}((1+\lambda^2)\cos 2\lambda T + \lambda T\sin 2\lambda T - 1)\,,$

$$\varphi_0 = \alpha - \left[M(T) + \int_{-T}^{T} M(t)\,dt\right],$$

$$\psi_0 = \beta - \left[M'(T) + \int_{-T}^{T} t\,M'(t)\,dt\right].$$

Для однозначного определения A_1 и A_2 из СЛУ (7) вычисляются значения спектрального параметра λ в коэффициентах $\sigma_i(\lambda)\,, i = \overline{1,4}$. Коэффициенты $\sigma_i(\lambda)\,, i = \overline{1,4}$ обращаются в нуль при некоторых значениях параметра λ из положительной полуоси $(0\,;\,\infty)$. Но, эти коэффициенты не могут одновременно обращаться в нуль. Множество значений спектрального параметра λ, состоящих из положительных решений уравнений $\sigma_i(\lambda) = 0$, обозначим $\Gamma_i\,,\ i = \overline{1,4}$. Нетрудно убедиться, что $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset\,,\ i, j = \overline{1,4}\,, i \neq j$.

Примем обозначение $\Gamma_5 = (0\,;\,\infty)\ /\ (\cup_{i=1}^{4}\Gamma_i)$.

Из СЛУ (7) получаем, что

$$A_1 = \frac{\psi_0}{\sigma_3(\lambda)} - \frac{\varphi_0}{\sigma_2(\lambda)}\frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_3(\lambda)}\,, A_2 = \frac{\varphi_0}{\sigma_2(\lambda)}\,, \lambda \in \Gamma_1\,, \tag{8}$$

$$A_1 = \frac{\varphi_0}{\sigma_1(\lambda)}\,,\ A_2 = \frac{\psi_0}{\sigma_4(\lambda)} - \frac{\varphi_0}{\sigma_1(\lambda)}\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_4(\lambda)}\,, \lambda \in \Gamma_2\,,$$

(9)

$$A_1 = \frac{\varphi_0}{\sigma_1(\lambda)} - \frac{\psi_0}{\sigma_1(\lambda)}\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_4(\lambda)}, A_2 = \frac{\psi_0}{\sigma_4(\lambda)}, \lambda \in \Gamma_3, \tag{10}$$

$$A_1 = \frac{\psi_0}{\sigma_3(\lambda)}, \ A_2 = \frac{\varphi_0}{\sigma_2(\lambda)} - \frac{\psi_0}{\sigma_2(\lambda)}\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}, \lambda \in \Gamma_4, \tag{11}$$

$$A_1 = \varphi_0\frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)} - \psi_0\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)}, A_2 = -\varphi_0\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)} + \psi_0\frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)}, \lambda \in \Gamma_5, \tag{12}$$

где $\sigma_5(\lambda) = \sigma_1(\lambda)\sigma_4(\lambda) - \sigma_2(\lambda)\sigma_3(\lambda) \neq 0, \lambda \in \Gamma_5$.

Подставляя (8)-(12) в (6), получаем

$$u(t, \nu, \lambda) = \alpha B_m(t) + \beta C_m(t) + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i D_{mi}(t), \lambda \in \Gamma_m, m = \overline{1,5}, \tag{13}$$

где

$$D_{mi}(t) = B_m(t)\left[h_i(T) + \int_{-T}^{T} h_i(t)dt\right] + B_m(t)\left[h'_i(T) + \int_{-T}^{T} h'_i(t)\,t\,dt\right] - h_i(t),$$

$$m = \overline{1,5}, B_1(t) = \frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_2(\lambda)} - \frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)}, C_1(t) = \frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)},$$

$$B_2(t) = \frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_1(\lambda)} - \frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)}, C_2(t) = \frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)},$$

$$B_3(t) = \frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_1(\lambda)}, C_3(t) = \frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)} - \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)},$$

$$B_4(t) = \frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_2(\lambda)}, C_4(t) = \frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)} - \frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)},$$

$$B_5(t) = \frac{1}{\sigma_5(\lambda)}[\sigma_4(\lambda)\cos\lambda(t+T) - \sigma_3(\lambda)\sin\lambda(t+T)],$$

$$C_5(t) = \frac{1}{\sigma_5(\lambda)}[-\sigma_2(\lambda)\cos\lambda(t+T) + \sigma_1(\lambda)\sin\lambda(t+T)],$$

$$h_i(t) = \int_{-T}^{T} \sin\lambda(t-s)\ a_i(s)ds, i = \overline{1,k}.$$

Подставляя (13) в (4), получаем систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\tau_i + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij}^m = \alpha\,\Phi_{mi} + \beta\Psi_{mi}, \ i = \overline{1,k}, \tag{14}$$

где $H_{ij}^m = \int_{-T}^{T} b_i(s)\, D_{mi}(\omega - s)\, d\,s$, $\Phi_{mi} = \int_{-T}^{T} b_i(s)\, B_{mi}(\omega - s)\, d\,s$,
$\Psi_{mi} = \int_{-T}^{T} b_i(s)\, C_{mi}(\omega - s)\, d\,s$, $m = \overline{1,5}$.

Рассмотрим следующие матрицы:

$$P_m(\nu,\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\nu\lambda^{-1}H_{11}^m & \nu\lambda^{-1}H_{12}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{1k}^m \\ \nu\lambda^{-1}H_{21}^m & 1+\nu\lambda^{-1}H_{22}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{2k}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \nu\lambda^{-1}H_{k1}^m & \nu\lambda^{-1}H_{k2}^m & \cdots & 1+\nu\lambda^{-1}H_{kk}^m \end{pmatrix},$$

$$i = \overline{1,k}\,, m = \overline{1,5},\ P_{mi}(\nu,\lambda) =$$

$$\begin{pmatrix} 1+\nu\lambda^{-1}H_{11}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{1(i-1)}^m & \Phi_{m1} & \nu\lambda^{-1}H_{1(i+1)}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{1k}^m \\ \nu\lambda^{-1}H_{21}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{2(i-1)}^m & \Phi_{m2} & \nu\lambda^{-1}H_{2(i+1)}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{2k}^m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \nu\lambda^{-1}H_{k1}^m & \cdots & \nu\lambda^{-1}H_{k(i-1)}^m & \Phi_{mk} & \nu\lambda^{-1}H_{k(i+1)}^m & \cdots & 1+\nu\lambda^{-1}H_{kk}^m \end{pmatrix}$$

СЛУ (14) однозначно разрешима при любых конечных правых частях, если выполняется следующее условие невырожденности определителя Фредгольма

$$\Delta_m(\nu,\lambda) = det P_m(\nu,\lambda) \neq 0\,. \tag{15}$$

Определитель $\Delta_m(\nu,\lambda)$ в (15) есть многочлен относительно $\nu\lambda^{-1}$ степени не выше k. Уравнение $\Delta_m(\nu,\lambda) = 0$ имеет не более k различных корней. Их обозначим через μ_l^m $(l=\overline{1,p_m}\,,\ 1 \le p_m \le k)$. Тогда$\nu = \nu_{n+l} = \lambda_n \mu_l^m$ называются иррегулярными значениями второго спектрального параметра ν, где $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ −множество натуральных чисел. Другие значения второго спектрального параметра $\nu \neq \lambda_n \mu_l^m$ называются регулярными. Примем следующие обозначения числовых множеств

$$\Omega_m(\nu,\lambda) = \{(\nu,\lambda) : \nu \neq \lambda_n \mu_l^m\,,\ \lambda \in \Gamma_m\}\,,\ l=\overline{1,p_m}\,,\ 1 \le p_m \le k\,, m = \overline{1,5}.$$

На регулярных спектральных множествах $\Omega_m(\nu,\lambda)$ решения СЛУ (14) записываются в виде

$$\tau_i = \alpha\,\frac{\Delta_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)} + \beta\,\frac{\hat{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)}\,, i = \overline{1,k}\,,(\nu,\lambda) \in \Omega_m\,, \tag{16}$$

где $\Delta_{mi}(\nu,\lambda) = det P_{mi}(\nu,\lambda)\,, \hat{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda) = det Q_{mi}(\nu,\lambda)$, матрица $Q_{mi}(\nu,\lambda)$

получается из матрицы $P_{mi}(\nu,\lambda)$ путём замены столбика Φ_{mi} на столбик $\Psi_{mi}, i=\overline{1,k}, m=\overline{1,5}$. Подставляя (16) в (13), получаем

$$u(t,\nu,\lambda)=\alpha V_m(t,\nu,\lambda)+\beta W_m(t,\nu,\lambda),(\nu,\lambda)\in\Omega_m, m=\overline{1,5}, \qquad (17)$$

где $V_m(t,\nu,\lambda)=B_m(t)-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)}D_{mi}(t)$,

$$W_m(t,\nu,\lambda)=C_m(t)-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\widehat{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)}D_{mi}(t).$$

Из функции (17) видно, что решения краевой задачи (1), (2) устойчивы по интегральным данным α и β. Действительно, если для каждого m положим, что $u_1(t,\nu,\lambda)$ и $u_2(t,\nu,\lambda)$ – два различных решения нелокальной интегральной задачи (1), (2), соответствующие двум различным значениям интегральных данных α_1 и α_2, β_1 и β_2, и

$$|\alpha_1-\alpha_2|<\delta_1, |\beta_1-\beta_2|<\delta_2, 0<\delta_1, \quad \delta_2=const,$$

то получаем $|u_1(t,\nu,\lambda)-u_1(t,\nu,\lambda)|\leq(|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|)\chi_{m0}<$

$$<(\delta_1+\delta_2)\chi_{m0}=\varepsilon,$$

где $\chi_{m0}=max\{\max_{-T\leq t\leq T}|V_m(t,\nu,\lambda)|; \max_{-T\leq t\leq T}|W_m(t,\nu,\lambda)|\}<\infty$.

Аналогично убедимся, что решения краевой задачи (1), (2) малы при $|\nu|<1(\nu\neq 0)$ и достаточно больших λ, если α и β малы. Действительно, если положим $|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2\chi_{mo}}, |\beta|<\frac{\varepsilon}{2\chi_{mo}}$, то имеем оценку

$$|u(t,\nu,\lambda)|\leq|\alpha|\chi_{m0}+|\beta|\chi_{m0}<\frac{\varepsilon}{2\chi_{m0}}\chi_{m0}+\frac{\varepsilon}{2\chi_{m0}}\chi_{m0}=\varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что справедлива

Теорема. *Нелокальная краевая задача* (1), (2) *на отрезке* $[-T;T]$ *однозначно разрешима при регулярных спектральных значениях из числового множества* Ω_m *для каждого* $m=\overline{1,5}$. *Решения этой задачи определяются формулой* (17) *и они устойчивы по интегральным данным* α и β. *Кроме того, если* α и β *малы, то и решения краевой задачи* (1), (2) *малы при* $|\nu|<1(\nu\neq 0)$ *и достаточно* *больших λ.*

Список использованных источников

1. Ушаков Е. И. Статическая устойчивость электрических цепей. – Новосибирск: Наука, 1988. – 273 с.

2. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J. Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math. Method. in the Appl. Sciences. – 2001. – Vol. 24. – P. 1043– 1053.

3.Юлдашев Т.К. Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54. – №12. – С. 1687–1694.

4.Юлдашев Т.К. О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Журн. вычисл. математики и мат. Физики. – 2019. – Т. 59. – № 2. – С. 252–263.

5.Yuldashev T. K. On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter // Lobachevskii Journ.of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – No. 2.–Pp.230–239.

2010 MSC:14A25, 97A10, 97G10, 97H10

НА ПУТИ К ЕДИНОМУ КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Бурова Е.С.

Кыргызско-Турецкий Университет «Манас»,

Американский Университет в Центральной Азии

Математиканын бөлүнүшү байыркы гректерден башталган. [1]Ал кезде, "расмий түрдө" геометриялык маселелерди чечүүдө алгебралык ыкмаларды колдонуу башталган. Аналитикалык геометриянын ыкмаларын дароо көрүнүктүү математиктер абдан жактырышкан жана анын өнүгүшүнө олуттуу салым кошушкан. Алардын арасында Ньютон, Клэро, Эйлер, Лагранж жана көптөгөн башкалар бар.

Биз албетте бирдиктүү Математика болуш керек дейбиз жана макалада мындай көз караштын пайдалуулугун далилдеген аргументтерди келтиребиз. Сунуш кылынган иште алгебра менен геометриянын биригүүсүнөн пайда болгон синергияны тастыктаган бир нече маселелер талданган.

Түйүндүү сөздөр: Алгебра, Геометрия, Математиканын бирдиктүү курсу, Аналитикалык Геометрия.

Разделение математики на алгебру и геометрию обусловлено исторически [1] и берет свое начало в Древней Греции. Однако с появлением на свет Аналитической Геометрии, «официально» использующей алгебраические методы для решения геометрических задач, эффективность такого подхода сразу оценили выдающиеся математики, такие как Ньютон, Клеро, Эйлер, Лагранж и многие другие.

Мы убеждены, что должен быть единый курс Математики, и мы приводим аргументы в пользу этого подхода. Анализу решений нескольких задач, подтверждающих синергию, возникающую при объединении Алгебры и Геометрии, посвящена предлагаемая работа.
Ключевые слова: Алгебра, Геометрия, Единый курс Математики, Аналитическая Геометрия.

The division of mathematics into algebra and geometry isdue historically [1] and originates in ancient Greece. However, with the advent of Analytical Geometry, "officially" using algebraic methods for solving geometric problems, the effectiveness of such an approach was immediately appreciated by outstanding mathematicians, such as Newton, Clairaut, Euler, Lagrange and many others.

We are convinced that there should be a unified course of Mathematics, and we present arguments in favor of this approach. The proposed work is devoted to the analysis of solutions of several problems confirming the synergy that arises when combining Algebra and Geometry.
Keywords: Algebra, Geometry, Unified course of Mathematics, Analytical Geometry.

1. Начиная разговор о необходимости единого курса, давайте попробуем ответить на вопрос: к алгебре или геометрии относится следующая задача

Первый грузовик движется по прямой дороге, ведущей на юг, в то же время второй грузовик движется по другой прямой дороге и направляется на восток. В 13:30 первый грузовик находился ровно в 7 километрах к северу от второго грузовика. Если оба грузовика движутся с постоянной скоростью 30 километров в час, в какое время они будут точно в 13 километрах друг от друга?

Мы не беремся ответить на этот вопрос. Попробуйте ответить Вы, проанализировав ниже приведенное решение.

Решение

Поставив в соответствие направлению с запада на восток, как это обычно делается, оси ОХ, а направлению с юга на север — ось ОУ, получим, что вектор, описывающий движение первого грузовика, имеет координаты $(0; 7 - 30t)$, второго грузовика — координаты $(30t; 0)$, где через t обозначено время грузовиков в пути после 13:30. Поэтому, решение задачи получится из уравнения $(30t)^2 + (7 - 30t)^2 = 13^2$. Решив его, получим $t = 0,4$. Таким образом, выяснилось, что грузовики будут в 13 километрах друг от друга в: $13{,}5 + 0{,}4 = 13{,}9$ часов, или, другими словами, в 13 часов 54 минуты.

2. Говоря о сторонниках разделения курсов можно с сожаленьем отметить, что они, как это часто бывает, будучи студентами «прошли» курс Аналитической Геометрии и не поняли его сути. Негативным следствием этой ситуации является то, что, несмотря на 4 столетия, прошедших с момента появления Аналитической Геометрии, она фактически отсутствует в курсе школьной математики.

Проиллюстрируем пользу от координатного подхода следующей задачей:

Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, находится в точке, делящей гипотенузу пополам. Доказательство этого утверждения становится очень простым, если использовать декартовы координаты, расположив вершину прямого угла в начале координат, а катеты на осях.

Решим эту задачу, сформулировав в следующем виде:

Доказать, что расстояние от точки, делящей гипотенузу пополам до вершины прямого угла равно половине гипотенузы.

Решение

Расположим вершину прямого угла треугольника OBA в начале координат, катет длиной $2a$ на оси OX, катет длиной $2b$ на оси OY.

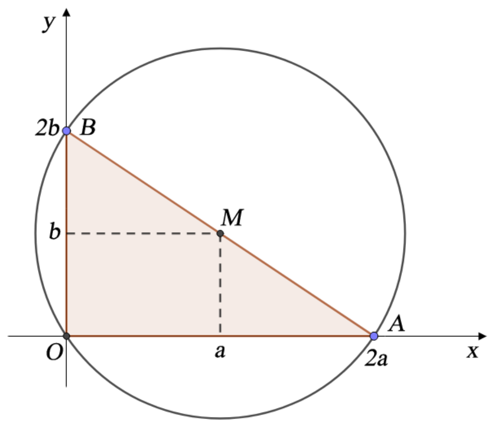

Рисунок 1.

Тогда, длина гипотенузы BA равна:

$\sqrt{(2a-0)^2+(0-2b)^2}=\sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Так как координаты середины гипотенузы ($a;\ b$), доказательство фактически закончено, потому что расстояние от этой точки до начала координат равно $\sqrt{a^2+b^2}$.

Примечание

Напишем уравнения медиан треугольника OBA — уравнения прямых, проходящих через точки ($0;\ 0$) и ($a;\ b$), ($a;\ 0$) и ($0;\ 2b$), ($0;\ b$) и ($2a;\ 0$), а затем вычислим координаты точек, в которых они пересекаются. В итоге выясняется, что все медианы пересекаются в точке с координатами ($2a/3;\ 2b/3$). Этот результат является частным случаем замечательного результата: *Все медианы любого треугольника пересекаются в точке, координаты которой являются средним арифметическим для координат вершин треугольника.*

Следствием этого утверждения является хорошо известное свойство: *Точка пересечения медиан делит каждую из них на части, находящиеся в отношении 1:2*. [2]

3. Для того чтобы сравнить классический и координатный подход, рассмотрим еще одну задачу.

Стороны треугольника равны 4 метра, 5 метров и 6 метров. Найти длины высоты, медианы и биссектрисы, проведенных к самой длинной стороне.

Решение

Использование декартовой системы координат позволяет упростить процесс решения этой задачи. Будем использовать то, что длина любого отрезка, фактически, известна если известны координаты его концов.

Разместим треугольник BCA в координатной плоскости так, чтобы ее вершины имели координаты $B(0;0)$, $C(x_C;\ y_C)$, $A(6;\ 0)$. Таким образом, сторона *BA* является самой длинной и расположена на оси OX, длина стороны BC равна 4 м, длина CA равна 5 м.

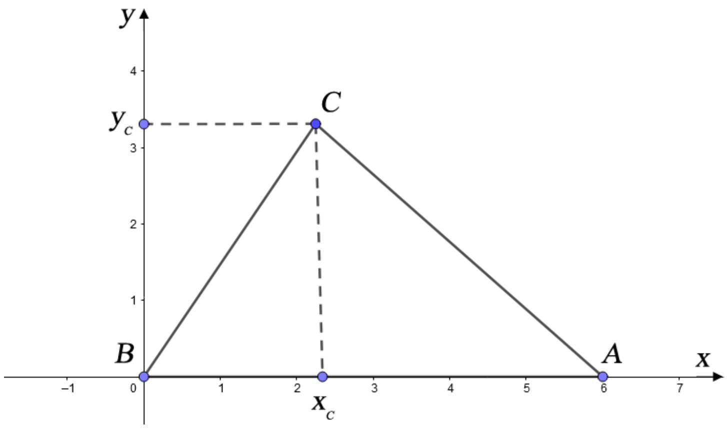

Рисунок 2.

Координаты точки C определим, решив систему $\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 = 4^2, \\ (6 - x_C)^2 + y_C^2 = 5^2. \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения системы первое и получим: $36 - 12x_C = 9$. Отсюда, $x_C = 2{,}25$. Тогда, $y_C^2 = 4^2 - x_C^2 = 16 - 5{,}0625 = 10{,}9375.$

Отметим, что определив координаты точки C, мы вычислили длину высоты треугольника, которая равна y_C.

Также, практически определена длина медианы, основание которой имеет координаты ($3; 0$): $\sqrt{(3 - 2{,}25)^2 + 10{,}9375} = \sqrt{11{,}5}$

Для того чтобы определить координаты другого конца биссектрисы $(x_S; 0)$, воспользуемся вышеупомянутым свойством: *Биссектриса делит сторону треугольника на части пропорциональные прилегающим к ним сторонам.*

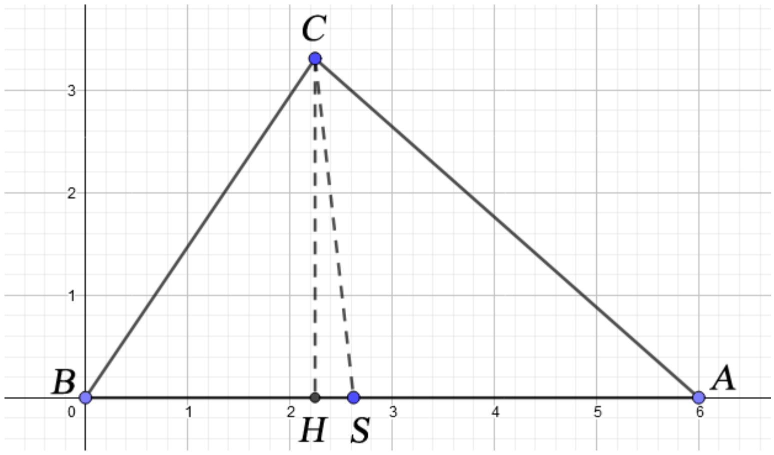

Рисунок 3.

Поэтому, $x_S/4 = (6 - x_S)/5$. Отсюда, $x_S = 24/9 = 8/3$.

Итак, длина биссектрисы d есть расстояние между точками с координатами $(x_A; y_A)$ и $(x_C; 0)$: $d^2 = (8/3 – 2,25)^2 + 10,9375 = (10/3)^2$.

Заключение

В работе приведены примеры, демонстрирующие появление этого эффекта синергии, появляющегося при совместном использовании алгебраических и геометрических методов [2, 3].

Список использованных источников

1. Шевцова Ю.В. История математики. Саратовский госуниверситет. http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/1947.pdf (Дата обращения 23.05.19)

2. Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., КеримкуловаЭ.Дж. Треугольники на языке аналитической геометрии / Известия ВУЗов Кыргызстана №6. – Бишкек, 2018. – с. 3-16.

3. Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б. Оптимизация места расположения объекта / Вестник КРСУ. Том 12, №6. — Бишкек, 2012. — с.184-188.

2010 MSC:14A25, 97A10, 97G10, 97H10

СОВРЕМЕННОСТЬ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., Бурова Е.С.
Кыргызско-Турецкий Университет «Манас»,
Американский Университет в Центральной Азии

Биздин заманда билим алууга болгон көз караш өзгөрдү: мурун маалымат алуу абдан маанилүү болсо, азыр маалыматтарды колдонууну билиш керек. Себеби, азыркы турмушта Google сыякту маалымат булактары бар. Биз биргелешкен математика курсу синергияны пайда кылып, алгебра менен геометриянын элементтерин өздөштүрүүгө жардам берет деп ишенебиз. Макалада аналитикалык геометрияны колдонуу классикалык геометрия маселелерин чечүүгө да пайдалуу экендигин далилдеген мисалдар бар.

Түйүндүү сөздөр: Алгебра, Геометрия, Математиканын бирдиктүүкурсу, Аналитикалык Геометрия.

В области математики знание точных формулировок определений, теорем и т.п. теперь не столь важно, как умение их использовать для решения задач, связанных с окружающей действительностью. Мы убеждены в том, что курс математики, объединяющий элементы Алгебры и Геометрии поможет повысить уровень усвоения материя за счет эффекта синергии, возникающего при этом. В работе приводятся примеры, показывающие пользу от использования Аналитической Геометрии даже в классических проблемах геометрии.

Ключевые слова: Алгебра, Геометрия, Единый курс Математики, Аналитическая Геометрия.

Nowadays, getting general information is easy an ditisim portant to beable to correctly interpretand use existing data. In the field of mathematics, knowledge of exact formulations of definitions, theorems, etc. now it is not so important as the ability to use them for solving problems related to the surround dingreality. We are convinced that the course of mathematics, combining the elements of Algebra and Geometry, will help to in crease the level of mastering matterdueto the synergy effect thatarises. [1] The paper provides examples showing the benefits of using Analytical Geometry evenin classical geometry problems.

Keywords: Algebra, Geometry, Unified course of Mathematics, Analytical Geometry.

В современном мире получить общую информацию легко: достаточно «по-гуглить». Важно уметь правильно интерпретировать и использовать имеющиеся данные. Вместе с тем нельзя не отметить изменение подхода к обучению: на первое место, вместо доведения информации, выходит обучение умению использовать информацию. При обучении математике существенную помощь может оказать совместное использование геометрических и алгебраических методов. В подтверждение этого тезиса, приведем несколько примеров.

1. Начнем разговор с утверждения, напоминающего теорему Пифагора:

Пусть в треугольнике ABC сторона BC имеет длину a, сторона CA — длину b, биссектриса угла BCA, длиной d, делит сторону BA на части длиной p и q. Доказать, что $d^2 = ab - pq$.

(Этот результат точно совпадает с теоремой Пифагора, если в равнобедренном треугольнике ABC сторона AC равна стороне BC.)

Доказательство.

Доказательство начнем с ключевой фразы: использование декартовой системы координат позволяет упростить процесс.

Разместим треугольник BCA в координатной плоскости так, чтобы ее вершины имели координаты $B(0; 0)$, $C(x_C; y_C)$, $A(p + q; 0)$. Таким образом, сторона BA расположена на оси OX, биссектриса начинается в точке и заканчивается в точке $D(p; 0)$.

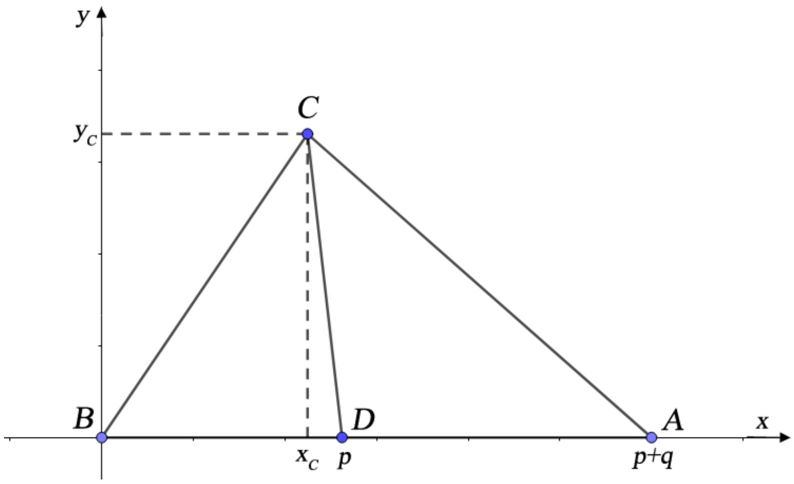

Рисунок 1.

Координаты точки C определим, решив систему

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 = a^2, \\ (p+q-x_C)^2 + y_C^2 = b^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C^2 + y_C^2 = a^2, \\ (p+q)^2 - 2(p+q)x_C + x_C^2 + y_C^2 = b^2. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы первое и получим:

$(p + q)^2 – 2(p + q)x_C = b^2 – a^2$. Отсюда, $x_C = [(p + q)^2 + a^2 - b^2]/(2p + 2q)$.

Теперь мы готовы доказать требуемое равенство.

Итак, $d^2 = (x_C - p)^2 + (y_C)^2 = a^2 – 2px_C + p^2 =$

$= a^2 – 2p[(p + q)^2 + a^2 - b^2]/(2p + 2q) + p^2 = (a^2q + b^2p)/(p + q) – pq$.

Воспользуемся свойством биссектрисы, утверждающим, что

$a/b = p/q \Leftrightarrow aq = bp$. Отсюда, $a^2q = abp;\ b^2p = baq$.

Поэтому, $a^2q + b^2p = abp + baq = ab(p + q)$.

Тогда, $d^2 = (a^2q + b^2p)/(p + q) – pq = ab(p + q)/(p + q) – pq = ab - pq$.

Что и требовалось доказать.

2. В вышеприведенной ситуации алгебраические методы позволяют прояснить геометрические рассуждения. С тем же успехом, геометрический подход может помочь в решении задач с алгебраическим содержанием.

Задача

Из города Ленск в полночь выехал поезд и прибыл в город Буров в 6 часов. В 9 часов 30 минут в Ленск прибыл другой поезд, который выехал из Бурова в 0 часов 30 минут. Определите, когда и на каком расстоянии от Ленска *встретились поезда, если расстояние между этими городами равно 360 километров.*

Решение

В задачах с подобным содержанием, по умолчанию, предполагается движение с постоянной скоростью. Поэтому, можно говорить о том, что между пройденным расстоянием и временем описывается линейной функцией $y = kx+b$.

В данном случае эту функцию удобней записать в виде $s = vt + s_0$. Здесь, s — расстояние; v — *скорость;* t — *время;* s_0 — «*свободный коэффициент*».

Рассмотрим Ленск как точку начала отсчета. Тогда, на координатной плоскости $(t;\ s)$ перемещение первого поезда описывается прямой EL, определяемой точками $E(0;\ 0)$ и $L(6;\ 360)$, а перемещение второго поезда — прямой SR, определяемой точками $S(0{,}5;\ 360)$ и $R(9{,}5;0)$.

Для того чтобы получить уравнение прямой EL в виде $s = vt + s_0$, воспользуемся координатами точек E и L:

$$\begin{cases} 0 = v\cdot 0 + s_0, \\ 360 = v\cdot 6 + s_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = v\cdot 0 + s_0, \\ 360 = v\cdot 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 0, \\ v = 60. \end{cases}$$

Итак, выяснилось, что первый поезд двигался со скоростью 60 км/час и его движение описывается уравнением $s = 60t$.

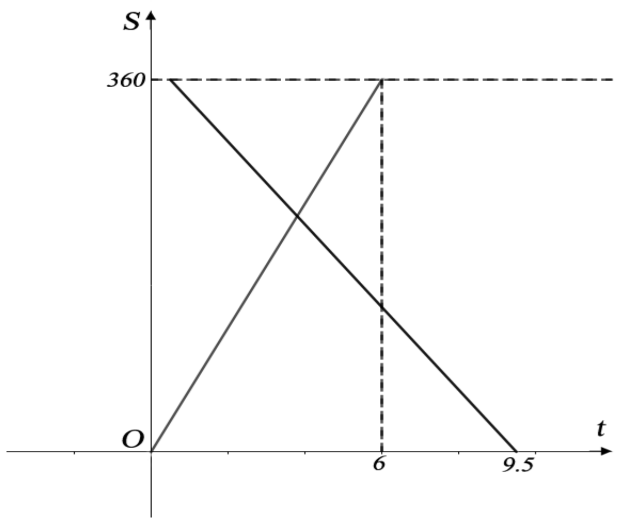

Рисунок 2.

Для того чтобы получить уравнение прямой SR, описывающей перемещение второго поезда, используем координаты соответствующих точек:

$$\begin{cases} 360 = v\cdot 0{,}5 + s_0, \\ 0 = v\cdot 9{,}5 + s_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 360 = v\cdot 0{,}5 + s_0, \\ 360 = -9v, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 360 - v\cdot 0{,}5, \\ v = -40, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 380, \\ v = -40. \end{cases}$$

Таким образом, расстояние, на котором от Ленска находится второй поезд, определяется уравнением $s = -40t + 380$. Знак минус перед величиной скорости указывает на то, что этот поезд движется в направлении противоположном направлению движения первого поезда.

Для того чтобы определить координаты точки встречи поездов осталось решить соответствующую систему:

$$\begin{cases} s = 60t, \\ s = -40t + 380, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60t, \\ 60t = -40t + 380, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60t, \\ 100t = 380, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 60\cdot 3{,}8 = 228, \\ t = 3{,}8. \end{cases}$$

Выяснилось, что они встретились в 3,8 часов, что равно 3 часам 48 минутам на расстоянии 228 км от Ленска.

3. Геометрический подход помогает не только при решении задач на «движение», но и на весьма популярные задачи на «совместную работу».

Задача

Динара начала полоть грядку в 1 час 20 минут. В 1,5 час с другого конца грядки, к работе приступил Мухтар. В котором часу они закончат полоть эту грядку? Известно, что Динара может одна прополоть такую грядку за 1 час, Мухтар — за 40 минут.

Решение

Также, как и в задачах на движение с постоянной скоростью, по умолчанию, предполагаем, что имеет место постоянная производительность труда. Поэтому, и здесь можно говорить о том, что между выполненной работой и временем описывается линейной функцией $y = kx + b$.

В данном случае функцию запишем в виде $a = pt + a_0$. Здесь, a — *объем выполненной работы;* p — *производительность труда;* t — *время;* a_0 — *«объем выполненной работы» в нулевой момент времени*.

Таким образом, на координатной плоскости $(t;\ a)$, работа выполненная Динарой описывается прямой DE, определяемой точками $D(80;\ 0)$ и $E(140;\ A)$, а Мухтаром — прямой MN, определяемой точками $M(90;\ A)$ и $N(130;\ 0)$. Здесь время выражено в минутах, объем всей работы обозначен A.

Для того чтобы получить уравнение прямой DE в виде $a = pt + a_0$, воспользуемся координатами точек D и E:

$$\begin{cases} 0 = p \cdot 80 + a_0, \\ A = p \cdot 140 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = p \cdot 80 + a_0, \\ A = p \cdot 60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -p \cdot 80, \\ p = A/60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -80A/60 = -4A/3, \\ p = A/60. \end{cases}$$

Итак, производительность труда Динары равна $A/60$ и объем выполненной ею работы описывается уравнением $a = At/60 - 4A/3$.

Для того чтобы получить уравнение прямой MN, описывающей работу Мухтара, в уравнение MN подставим координаты соответствующих точек:

$$\begin{cases} A = p \cdot 90 + a_0, \\ 0 = p \cdot 130 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -p \cdot 40, \\ 0 = p \cdot 130 + a_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -A/40, \\ a_0 = 130A/40 = 13A/4. \end{cases}$$

Отрицательное значение производительности труда указывает на то, что Мухтар работает в «обратном направлении».

Итак, работа Мухтара определяется уравнением $a = -At/40 + 13A/4$.

Для того чтобы определить момент окончания совместной работы, осталось решить соответствующую систему:

$$\begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ a = -At/40 + 13A/4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ At/60 - 4A/3 = -At/40 + 13A/4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ t/60 + t/40 = 4/3 + 13/4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = At/60 - 4A/3, \\ 5t/120 = 55/12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = A/2, \\ t = 110. \end{cases}$$

Выяснилось, что работа будет закончена, когда часы покажут 1 час 50 минут, что соответствует 110 минутам.

Заключение

Раздельное преподавание Алгебры и Геометрии в обычной школе — это анахронизм, которому более 2-х тысяч лет. Мы убеждены, что такие курсы возможны только в очень специализированных школах. При этом, даже в таких случаях должно иметь место активное взаимопроникновение этих дисциплин. В наших школах, как этом принято почти во всех развитых странах, должен быть единый курс Математика. Совместное применение алгебраических и геометрических методов порождает эффект синергии, обогащая и дополняя каждую дисциплину [2, 3].

Список использованных источников

1. Шевцова Ю.В. История математики. Саратовский госуниверситет. http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/1947.pdf (Дата обращения 23.05.19)

2. Урдалетова А.Б., Кыдыралиев С.К., КеримкуловаЭ.Дж. Треугольники на языке аналитической геометрии / Известия ВУЗов Кыргызстана №6. – Бишкек, 2018. – с. 3-16.

3.Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б. Оптимизация места расположения объекта / Вестник КРСУ. Том 12, №6. — Бишкек, 2012. — с.184-188.

MSC 34E05

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УМЕНЬШЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Жээнтаева Ж.К.
Кыргызско-Узбекский университет

Макалада эволюциялык теңдемелер үчүн баштапкы маселелер чыгарылыштарынын мейкиндигинде асимптотикалык эквиваленттик катышы киргизилген: убакыттын көбөйүшү менен алардын чексиз жакындашуусу. Фактор-мейкиндик ченеми баштапкы мейкиндик ченеминен кичүү болгон кубулуш, «чечимдер мейкиндигинин ченемин асимптотикалык төмөндөтүү» деп айтылган. Ар түрдүү белгилүү жыйынтыктардын бирдей көрүнүштө берилгендиги көрсөтүлүп, алардын ичине кечигүүчү аргументтүү дифференциалдык теңдемелердин жана айырмалык теңдемелердин системасынын атайын чыгарылыштары кирет.

Уруттуу сөздөр: айырмалык теңдеме, кечигүүчү аргументтүү дифференциалдык теңдеме, теңдемелер системасы, баштапкы маселе, асимптотика, атайын чыгарылыш.

В статье введено отношение асимптотической эквивалентности в пространстве решений начальных задач для эволюционного уравнения: их неограниченное сближение с увеличением времени. Явление, когда размерность фактор-пространства меньше размерности исходного пространства, названо «асимптотическим уменьшением размерности пространства решений». Показано, что так единообразно представляются различные

известные результаты, в том числе - наличие специальных решений дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента и систем разностных уравнений.
Ключевые слова: разностное уравнение, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, начальная задача, асимптотика, специальное решение

The following equivalence relation is introduced in the space of solutions of initial value problems for evolutional equations: their infinite convergencewhile time tends to infinity. The phenomenon "the dimension of the factor-space is less than one of the initial space" is called "asymptotical reducing of dimensionof space ofsolutions". It is demonstrated that various well-known results including existence of specialsolutions of differential equations with delay of argumentand difference equations are presented uniformly in such a way.
Keywords: difference equation, delay-differential equation, initial value problem, asymptotic, special solution

1. Введение. В теории и приложениях эволюционных уравнений одним из основных является вопрос о поведении решений с увеличением времени. Для его изучения были разработаны многие математические методы, в том числе теория устойчивости, метод малого параметра, метод характеристических уравнений для автономных и периодических эволюционных уравнений. С их помощью были получены достаточные условия для наличия каких-либо видов поведений решений. При этом для каждого вида поведений решений вводились соответствующие определения и обозначения.

(После появления компьютеров стало возможным проводить широкие эксперименты с приближенными решениями уравнений с различными исходными данными, которые не дают гарантированных математических результатов, но облегчают выдвижение гипотез, которые потом доказываются строго, см. например [6].)

В данной статье мы предлагаем некоторые общие определения, которые, по нашему мнению, дают возможность объединить некоторые ранее введенные определения и единообразно изложить полученные результаты.

2. Обзор некоторых определений и результатов. Представим решение некоторого эволюционного уравнения с начальным условием φ в виде оператора $W(t,\varphi):\Lambda\times\Phi\to Z$, где Λ - линейно упорядоченное множество с наименьшим, но без наибольшего элемента (обычно берется $\Lambda=\mathbf{R}_+\equiv[0,\infty)$ или

$\Lambda=\boldsymbol{N}\equiv\{1,2,3,\ldots\}$), Φ - топологическое пространство начальных условий, Z - топологическое пространство значений решений.

Создание теории устойчивости А.Пуанкаре [1] и А.М.Ляпуновым [2] дало достаточные условия о стремлении решений с любыми начальными условиями (линейных) и в некоторой области (нелинейных) к некоторому одному решению.

А.М.Ляпунов также дал (в наших обозначениях)

Определение 1. ($\Phi = Z = \boldsymbol{R}^n$). Если существует такой k-мерный «диск» $D_k\subset\Phi$, $k\leq n$, $\varphi_0\in D_k$, что

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\varphi\in D_k)((||\varphi-\varphi_0||<\delta)\Rightarrow(\forall t\in\Lambda)(||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)||<\varepsilon)),$$

то решение $W(t,\varphi_0)$ называется условно устойчивым с индексом k; если также $\lim\{||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)||: t\to\infty\}= 0$, то решение называется асимптотически условно устойчивым.

А.Д.Мышкис [3] обнаружил явление расщепления пространства решений линейных дифференциальных уравнений с малым запаздыванием на «медленно меняющиеся» и «быстро затухающие». В дальнейшем Ю.А.Рябов, П.С.Панков и другие авторы (см. обзор в [4]) получили результаты, которые дают достаточные условия для следующего.

Пусть $h>0, \Phi=C([-h,0]\to\boldsymbol{R}^n)$ - бесконечномерное пространство, $Z = \boldsymbol{R}^n$, $D\subset\Phi$ - конечномерное пространство.

Определение 2. Если

$$(\forall\varphi\in\Phi)\ (\exists\varphi_1\in D)\ (\lim\{\ ||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_1)||: t\to\infty\}= 0),$$

то элементы $W(t,\varphi_1), \varphi_1\in D$ называются специальными, имеющими асимптотическое свойство.

Нами [5] показано, что дифференциальные уравнения с запаздыванием можно преобразовать в эквивалентную систему операторно-разностных уравнений с дискретным временем, с соответствующими свойствами.

Из вышеизложенного мы сделали вывод, что наиболее эффективным способом исследования асимптотического поведения решений эволюционных уравнений будет рассмотрение фактор-пространства решений по отношению эквивалентности - сближению решений при увеличении времени.

3. Основное определение

Определение 3. Фактор-пространство Φ^* пространства начальных условий Φ по отношению «асимптотической эквивалентности»:

Если Z- линейное нормированное пространство, то

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (lim\{ \|W(t,\varphi_1) - W(t,\varphi_2)\| : t \to \infty\} = 0), \tag{1}$$

Если Z- метрическое пространство, то

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (lim\{ \rho_Z(W(t,\varphi_1) - W(t,\varphi_2)) : t \to \infty\} = 0). \tag{2}$$

Если Z - равномерное пространство с множеством Γ окружений диагонали (наиболее общий случай), то

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (\forall V \in \Gamma)\ (\exists t_1 \in \Lambda)\ (\forall t > t_1)((W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \in V) \tag{3}$$

называется асимптотическим фактор-пространством. Если размерность пространства Φ^* меньше размерности пространства Φ, то будем говорить, что имеет место явление асимптотического уменьшения размерности пространства решений.

Примечание. Данное понятие обобщает известное понятие *индуктивный (прямой) предел*, который получается, если в (3) взять дискретную топологию:

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (\exists t_1 \in \Lambda)\ (\forall t > t_1)((W(t,\varphi_1) = W(t,\varphi_2)).$$

Примечание. В ряде работ (см. например [9]) термин «асимптотическая эквивалентность» применялся в другом смысле: как близость между решениями различных уравнений с одним и тем же пространством начальных значений. В наших обозначениях:

$$W_1(t,\varphi) \sim W_2(t,\varphi) \Leftrightarrow (\forall \varphi_1 \in \Phi)\ (\exists \varphi_2 \in \Phi)\ (lim\ \{ \|W_1(t,\varphi_1) - W_2(t,\varphi_2)\| : t \to \infty\} = 0).$$

4. Примеры асимптотического уменьшения размерности пространства решений.

4.1. Для многих видов линейных автономных эволюционных уравнений существует такой набор (конечный или счетный, тогда $lim_{k\to\infty} Re\lambda_k = -\infty$) характеристических чисел λ_1, λ_2, λ_3, ... в комплексной плоскости, таких, что

$\exp(\lambda_k t)$ является решением уравнения, и соответственно общее решение представимо в виде суммы или асимптотического ряда

$$W(t,\varphi) \sim \sum_k C_k(\varphi)\exp(\lambda_k t), t \in \boldsymbol{R}_+, \quad (4)$$

где C_k - линейные функционалы от начального условия.

При существовании таких λ_k, что $Re\lambda_k < 0$, возникает явление асимптотического уменьшения размерности пространства решений и пространство Φ^* представляется в $\sum\{\gamma_k \exp(\lambda_k t) : Re\,\lambda_k \geq 0\}$.

4.2. Пусть задана гладкая функция $F: \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$. Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$x'(t) = -grad(F(x(t))), t \in \boldsymbol{R}_+, x(0) = \varphi \in \Phi = \boldsymbol{R}^n. \quad (5)$$

Здесь пространство Φ^* совпадает с множеством решений уравнения

$$grad(F(x)) = 0. \quad (6)$$

Можно также отождествить устойчивые и условно устойчивые решения (6) с их областями притяжения в $\boldsymbol{R}^n$.

4.3. Рассмотрим дифференциальное уравнение с одним постоянным запаздыванием

$$z'(t) = P(t)z(t-h), h \geq 0, \quad (7)$$

с начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-h,0], \quad (8)$$

где $\varphi(t) \in C[-h,0]$ и $P(t) \in C[\boldsymbol{R}_+]$ – заданные функции, $|P(t)| \leq p_0 = const$.

При $P(t) = const$ получается теория Флоке, обобщающая теорию Эйлера для автономных дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение

$\lambda = pe^{-\lambda h}$, см. п.4.1 выше.

При

$$\|P(t)\| \cdot h < e^{-1} = 0.367\ldots, \quad (9)$$

возникают специальные решения, см. выше Определение 2.

Если $P(t) \geq 0$, то пространство $\Phi^* = \boldsymbol{R}$.

4.4. В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментальных – операторно-разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Мы обосновали эту гипотезу в [5], где установлено взаимно-однозначное соответствие между уравнениями вида (7) и системами операторно-разностных уравнений, причем условию вида (9) соответствует условие доминирования одного из диагональных коэффициентов над всеми другими.

Уравнение (7) сначала преобразуется в интегральное уравнение сдвига на величину шага в пространстве $C[-h,0]$, а потом это пространство расщепляется на одномерное пространство констант и пространство функций, обращающихся в нуль при $t=0$.

Пусть Ω - некоторое нормированное пространство. Мы предложили рассмотреть четыре последовательности операторов (первая –числа, вторая – «функционалы»):

$$a_n\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ b_n\colon\Omega\to\mathbf{R};\ c_n\colon \mathbf{R}\to\Omega;\ d_n\colon\Omega\to\Omega,\ n=0,1,2,\ldots \qquad (10)$$

с интервальными ограничениями

$a_n \in A=[a_-,a_+];\ ||b_n||\le b>0,\ ||c_n||\le c>0,\ ||d_n||\le d>0,$

и систему разностных уравнений

$$x_{n+1}= a_nx_n + b_ny_n,$$
$$y_{n+1}= c_nx_n+ d_ny_n, n=0,1,2,\ldots \qquad (11)$$

<u>Теорема 1</u>. Если $(\forall w>0)((q_-:= [a + b[-w,w]]_->0)\wedge(|c+[-w,w]d|\le wq_-)$, то существуют «специальные» (положительные по первой компоненте) решения.

<u>Теорема 2</u>. Если $(d<a_-)\wedge((a_- - d)^2>4bc)$, то выполняются условия Теоремы 1 и можно взять $w=(a_- - d-((a_- - d)^2-4bc)^{1/2})/(2b)$.

<u>Теорема 3</u>. Если $\omega := \sup\{|a_nd_n-b_nc_n| : n=1,2,3\ldots\}q_-^{-2} < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и «специального» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x,y\}:=\lim_{n\to\infty}x_n/X_n$.

Теорема 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_{+}+bw)<1$, то «специальные» решения имеют асимптотическое свойство.

Если $a_n>0$, то пространство $\Phi^{*}=\mathbf{R}$.

Переход от (7) к (10) осуществляется с помощью замены

$$\Xi_m(t) = W\big(t + mh, \varphi(\cdot)\big), -h \le t \le 0, \tag{12}$$

$$S_m \Xi(\cdot)(t) = \Xi(0) + \int_{-h}^{t} P(s + mh + h)\, \Xi(s) ds \tag{13}$$

- интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (7) на шаг h.

В качестве пространства Ω мы выбрали $\{y(t)\in C^{(1)}[-h,0]:\ y(0)=0\}$, с нормой $||y||_{\Omega} := sup\{\ |y(t)/t|: -h\le t<0\}$, тогда $|y(t)| \le ||y||_{\Omega}|\ t\ |$.

Использовалась подстановка $x(t) = x(0) + y(t)t$, где $y(t)$ - непрерывная функция.

Заключение. Из приведенных примеров видно, что введенное понятие асимптотического уменьшения размерности пространства решений дает возможность единообразно представить известные результаты итераций оператора сдвига по траекториям решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и использованием результатов для систем разностных уравнений можно получать менее ограничительные условия на функции-коэффициенты при неизвестных функциях в уравнениях.

Список использованных источников

1. Poincaré H. Mémoiresur les courbesdéfinies par uneequation différentielle //Journal de Mathématiques Pureset Appliquées, 1881, 3e série, tome 7, p. 375-422.

2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков, 1892. - 250 с.

3.Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - Москва: Наука, 1972. - 352 с.

4. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения (Минск), 1977, т. 13, № 4. - С. 455-462.

5. Жээнтаева Ж.К. Исследование асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием с помощью расщепления пространства // Инновации в науке / Сборник статей по материалам LVII междунар. научно-практ. конф. № 5 (54). Часть I. Новосибирск: Изд. АНС СибАК , 2016. – С. 149-154.

6. Жээнтаева Ж.К. Алгоритмы для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом и их использование //Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественно-научного образования: Сборник статей Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2015. – С. 219-223.

7. Жээнтаева Ж.К. Расширение классов дифференциальных уравнений со специальными решениями с периодическими коэффициентами // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 145-151.

8. Zheentaeva Zh.K. Trial objects to expand class of evolutional equations with special solutions // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 35.

9. Levinson N. The asymptotic behavior of system of linear differential equations // American J. Math., 68, 1946. - Pp. 1-6.

MSC 54F45

ИНДУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Жораев А. Х.

Кыргызско-Узбекский университет

Бул иштин максаты мурда сунушталган мейкиндиктеги татаал кыймылдоонун түшүнүгүнө негизделген аныктаманы өркүндөтүү. Мейкиндикте бир учу кыймылсыз кесиндини жылдыруу аркылуу эки ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет, эки

ченемдүү көптүктү жылдыруу аркылуу үч ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет, ж.у.с. мейкиндиктин каалаган ориентациялык ченеми үчүн.
Урунттуу сөздөр: топологиялык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, кыймылдоо, ченем

Цель настоящей работы - уточнить ранее введенное определение, основанное на понятии сложного движения в пространстве. Через движение отрезка с фиксированным концом в пространстве дается определение двумерного пространства, через движение двумерного множества – определение трехмерного пространства, и т.д. для любой ориентационной размерности пространства.
Ключевые слова: топологическое пространство, кинематическое пространство, движение, размерность

The goal of this work is to improve definitions based on conception of compoundmotion in a space. The definition of two-dimensional space is given by means of motion of a segment with a fixed end-point; one of three-dimensional space is given by means of motion of a two-dimensional set, etc. for any orientational dimension of a space.
Keywords: topological space, kinematical space, motion, dimension

1. Введение. Понятие естественного движения (для одной точки) в топологическом (т-) пространстве, введенное в [1], дало возможность представить на компьютере в интерактивном режиме различные известные в математике неэвклидовы пространства [2], [3]. Также было введено понятие неоднородного пространства [4]. С использованием движения более сложных объектов в [7] предложены новые понятия «сплошной ширины» пространства и «ориентационной размерности» пространства.

В настоящей работе эти определения рассматриваются и модифицируются для некоторых неоднородных пространств.

2. Известные определения и результаты.

Определение 1. Если для метрического (м-) пространства (X, ρ) существуют сколь угодно мелкие открытые (о-) покрытия кратности $(n+1)$, то говорится, что Dim-размерность этого пространства не более n; если также не существуют такие покрытия кратности n, то Dim-размерность равна n.

Определение 2. Замкнутое (з-)множество C называется перегородкой между множествами A и B, имеющими пустое пересечение, в т-пространстве X, если о-множество $X \backslash C$ есть объединение двух о-множеств A_1 и B_1, имеющих пустое пересечение и содержащих множества A и B соответственно.

Ind-размерность определяется по индукции. *Ind*-размерность множества $\varnothing$ равна (–1). Если для любых двух з-множеств т-пространства X, имеющих пустое пересечение, существует перегородка с *Ind*-размерностью не более $(n-1)$, то говорится, что *Ind*-размерность X не более n; если неверно, что "*Ind*-размерность пространства не более $(n-1)$", то *Ind*-размерность X равна n.

Для м-пространств эти два определения эквивалентны.

Определение 3 [1]. *Кинематическое (к-)пространство* - это пара: множество G точек и множество K *маршрутов***.** Каждый маршрут M – это пара: положительное число T_M (*время* маршрута) и функция m_M*:* $[0, T_M] \to G$ (*траектория* маршрута). Выполняются следующие аксиомы.

(K1) Для любых точек $z_0 \neq z_1$ в G существует такой маршрут $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких маршрутов M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$, то также $\{T_M, m_M(T_M-t)\} \in K$ {всегда возможно движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то также: $\{T^*, m^*(t) \equiv m_M(t) (0 \leq t \leq T^*)\} \in K$ {можно остановиться в любой момент}.

Маршруты, существующие в силу этой аксиомы, называются *подмаршрутами* маршрута M.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1)=m_2(0)$, то пара: число $T_{12} = T_1 + T_2$ и функция $m_{12}(t)= m_1(t)$ $(0 \leq t < T_1)$; $m_{12}(t)= m_2(t-T_1)$ $(T_1 \leq t \leq T_1+T_2)$ также является маршрутом из K {транзитивность}.

Для любой функции - траектории маршрута m_M: $[0, T_M] \to G$ множество ее значений называется *линией*.

Определение 4 [4]. Если две точки т-пространства имеют гомеоморфные окрестности, то они называются *локально однородными*.

Таким образом, т-пространство распадается на подпространства, каждое из которых содержит локально однородные между собой точки. Если таких подпространств больше одного, то пространство называется *локально неоднородным*.

3. Определения движения в пространстве. Нами предложены [7]

Определение 5. Пусть в т-пространстве G задано связное множество P. Говорится, что непрерывное отображение $F:P\times[0,T]\to G$ осуществляет *движение* множества P, если для фиксированного $t\in[0, T]$ отображение $F(z,t):P\to G$ является инъективным и $F(P,t)$ гомеоморфно P.

Для подклассов класса т-пространств соответственно гомеоморфизм заменяется на изоморфизм в соответствующем пространстве.

Для большей гибкости для м-пространств нами было предложено

Определение 6. Два ограниченных м-пространства (два множества м-пространства) A и B называются $[\alpha,\beta]$-подобными $(0<\alpha<1<\beta)$, если существует биективное отображение $f:A\to B$ такое, что $\rho_B(f(x),f(y))\in[\alpha,\beta]\rho_A(x,y)$ и $\rho_A(f^{-1}(x),\ f^{-1}(y))\in[\alpha,\beta]\rho_B(x,y)$.

Соответственно, в м-пространстве нами введено понятие *обобщенное движение с сохранением $[\alpha,\beta]$-подобия.*

Определение 7. Говорится, что непрерывное отображение (движение) $F:P\times[0,T]\to G$ осуществляет *обобщенный поворот* множества P вокруг его подмножества *C с изменением ориентации*, если

1) для всех $t\in[0, T]$ и $z\in C$ будет $F(z,t)\equiv z;$

2) для всех $t\in[0, T]$ и $z\in P\backslash C$ сужение $F:\{z\}\times[0,T]\to G$ будет маршрутом без самопересечений с начальной точкой $z;$

3) для всех $t_1, t_2\in[0, T)$ и $z_1\neq z_2\in P$ будет $F(z_1, t_1)\neq F(z_2, t_2);$

4) для всех $z\in P\backslash C$ будет $F(z,0)\neq F(z,T);$

5) множество $F(P,T)$ совпадает с множеством P.

Подмножество C называется *осью поворота***.**

Возможность обобщенного поворота множеств некоторого типа обозначает нижнюю границу для размерности пространства, а невозможность - верхнюю границу.

Определение 8. Если для некоторого числа $d>0$ существует такой «отрезок» z_1-z_0-z_2 и его обобщенный поворот в отрезок z_2-z_0-z_1, что для всех $t \in [0, T_{12}]$ будет $\rho_K (m_1(t), m_2(t)) \geq d$, $\rho_K (z_0, m_1(t)) \leq d$, $\rho_K (z_0, m_2(t)) \leq d$,
то говорится, что *сплошная ширина* (ориентационной размерности 2) кинематического пространства не меньше d.

Если в к-пространстве $\rho_K (z_1,z_2) \geq d; \rho_K (z_2,z_3) \geq d; \rho_K (z_3,z_1)=d>0$, то точка z_1 не может лежать на кривой длины меньше $2d$, соединяющей точки z_2 и z_3. Действительно, предположим, что существуют такие $T<2d$, $t_1 \in (0, T)$ и такой маршрут M, что $m(0)=z_2$, $m(t_1)=z_1$, $m(T)=z_3$. Обозначим его подмаршруты: m_2, соединяющий точки z_2 и z_1, и m_3, соединяющий точки z_1 и z_3. Число T равно сумме времен этих подмаршрутов. Но время каждого из них не меньше d, следовательно, $T \geq 2d$, что противоречиво.

Определение 9. Если никакое з-множество в к-пространстве не имеет сплошной ширины, то говорится, что *ориентационная размерность* такого пространства равна 1.

Определение 10. Если какое-нибудь з-множество в к-пространстве имеет сплошную ширину, но ни в каком таком множестве «треугольник» $z_1z_2z_3$ не может быть переведен обобщенным поворотом в «треугольник» $z_1z_3z_2$, то говорится, что ориентационная размерность такого пространства равна 2.

На основе Определений 9 и 10 введено

Определение 11. (По индукции) Если в пространстве существует множество P с ориентационной размерностью n и его можно повернуть вокруг оси $C \subset P$ с ориентационной размерностью $(n-1)$, то говорится, что ориентационная размерность пространства не меньше $(n+1)$.

Если высказывание «ориентационная размерность пространства не меньше $(n+2)$» неверно, то говорится, что ориентационная размерность пространства равна $(n+1)$.

В эвклидовых пространствах и их подпространствах обобщенный поворот совпадает с поворотом в геометрическом смысле. В эвклидовых пространствах все три Определения 1, 2 и 11 дают одинаковый результат.

4. Ориентационная размерность локально неоднородных пространств

Рассмотрим риманову (р-) поверхность функции $w = \sqrt[n]{x}, x \in C$. При $n=2$ она была реализована в [1]. При $n=2$, полагая

$$z_1=\{25,-5\};z_0=\{0,0\};z_2=\{25,5\} \tag{1}$$

получаем, что при повороте на 180^0 против часовой стрелки вокруг оси z_0 будет

$$z_1'=\{-25,-5i\};\ z_0=\{0,0\};\ z_2'=\{-25,5i\} \tag{2}$$

При еще одном повороте на 180^0 против часовой стрелки будет

$$z_1''=\{25,5\};\ z_0=\{0,0\};\ z_2''=\{25,-5\}, \tag{3}$$

что совпадает с (1) при соответствующей замене и соответствует Определению 10. Аналогично можно поступить при $n>2$.

Рассмотрим р-поверхность функции $w = Lnx,\ x \in C$. Она была также реализована в [1]. Здесь имеется бесконечное количество листов над любой точкой $x \in C$, поэтому Определение 10 здесь неприменимо.

Чтобы также считать эту поверхность двумерной, ослабим Определение 7, на Определение 11 частичного обобщенного поворота с добавлением условия $T>0$ и убиранием условия 5).

Для компьютерной реализации частичного обобщенного поворота в двумерном пространстве можно ввести следующие операции:

- отметка точки в к-пространстве;
- изображение кратчайшего пути между двумя отмеченными точками;
- изображение следа кратчайших путей между двумя отмеченными точками при движении одной из точек.

Список использованных источников

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.

2. Борубаев А.А., Панков П.С. Кинематическое изображение топологических пространств, представляемых в виде склейки // Вычислительные технологии (изд. СОРАН). – 1999, том 4, № 5. – С. 3-9.

3. Борубаев А.А., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings. – Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, Budapest, 2003. – 169 p.

4. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных топологических пространств // Вестник КНУ, 2007. – Серия 3, выпуск 4. – С. 5–8.

5. Жораев А.Х. Исследование топологических пространств кинематическим методом. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 78 с.

6. Жораев А.Х. Методика кинематического исследования свойств топологических пространств //Вестник ОшГУ, специальный выпуск 3, 2018. - С. 263-265.

7. Жораев А. Х. Индуктивное определение кинематической размерности топологических пространств // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 139-144.

MSC 45D05

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Мурataлиева В.Т.
Жалал-Абадский государственный университет

Алгоритм түзүлгөн жана компьютерде жүзөгө ашырылган. Даражалуу көбөйтүндүлүү интегралдык кошулуучулары менен берилген теңдеме боюнча ал алгоритм чыгарылышынын жашоосун жана андагы каалаган турактуулар болуусун аныктоо үчүн маалыматты берет.

Урунттуу сөздөр: интегралдык теңдеме, сызыктуу теңдеме, Вольтерра тибиндеги теңдеме, алгоритм, аналитикалык функция

Построен и реализован на компьютере алгоритм, который по заданному уравнению со степенными сомножителями при интегральных слагаемых представляет данные для

определения существования решения и наличия в нем произвольных постоянных.

Ключевые слова: интегральное уравнение, линейное уравнение, уравнение типа Вольтерра, алгоритм, аналитическая функция

An algorithm is constructed an implemented on a computer. Given an equation with power coefficients by integral summands, the algorithm presents data to detect existence of solutions and occurrence of arbitrary constants in it.

Keywords: integral equation, linear equation, Volterra equation, algorithm, analytical functions

1.Введение. В данной статье мы предлагаем для некоторого класса задач комбинированный человеческо-машинный алгоритм, который не дает полной формулировки теоремы, а так преобразует условие, что формулировка теоремы является очевидной для понимающего человека.

Известны различные способы применения компьютерной техники в теоретической математике. По одной из неформальных классификаций, методы доказательства теорем с помощью компьютера можно разделить на: аксиоматически-логические; точные вычисления с целыми числами и подобными им объектами; аналитические (алгебраические) преобразования, в том числе - формульное дифференцирование и интегрирование; доказательные вычисления - получение строгих результатов приближенными вычислениями.

В [1] мы показали на примерах возможность нахождения достаточных условий существования решений некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими функциями методом рядов. В [2] мы систематизировали такой переход от интегро-дифференциальных уравнений к системам разностных уравнений, в [3] мы описали структуру алгоритма для исследования таких разностных систем. В данной статье мы приводим построенную нами компьютерную программу, предлагаем такой полный алгоритм и приводим примеры его использования, это кратко описано в [4] для более широкого класса уравнений.

2. Описание класса уравнений и алгоритма. Рассматриваются уравнения, левая часть которых представляет собой сумму слагаемых - операторов от неизвестной функции вида $bt^pI^mu(t), Iu := \int_0^t u(v)dv, p\geq 0,$

правая часть является заданной аналитической функцией $f(t)=f[0]+f[1]t+\ldots$.

С использованием обозначения $h[j]=0$ $(j<0)$; $h[j]=1$ $(j\geq 0)$ вводится обозначение - функция двух целочисленных переменных

$$A(m,n)=\frac{n!}{(n-m)!}h[n]h[n-m].$$

Также принимается «ноль*неопределенность = ноль».

Рассмотрим только «нерезонансный» случай, поддающийся алгоритмизации: все величины $(p-m)$ для различных слагаемых различны.

<u>Алгоритм.</u>

Для человека:

1) Ввести натуральное число K– количество операторов в правой части уравнения.

2) Последовательно для $k=1..K$ ввести:

b_k – ненулевое целое число - числовой коэффициент в интегральном операторе (практически в компьютерной программе можно использовать и вещественные значения b_k);

p_k - неотрицательное целое число - степень независимой переменной в коэффициентах при линейных операторах;

m_k – отрицательное целое число (порядокинтегрирования) или ноль (сама функция);

Для компьютера:

3) вычислить $I_k := p_k - m_k$.

4) Изобразить получающееся интегральное уравнение для функции

$$u(t)=u[0]+u[1]t+\ldots.$$

В соответствии с принятыми в алгебре обычаями записи, случаи $b_k=-1$; случаи $p_k=0$ и $p_k=1$; случаи $m_k=-1$, $m_k=0$ и $m_k=1$ изображаются отдельно.

5) Изобразить систему разностных уравнений, к которым сводится интегральное уравнение. k-й член в уравнении дает член

$$b_k A(m_k, n-I_k)u[n-I_k].$$

В правой части находится выражение $f[n], n = 0,1,2, \ldots$.

Кроме выше перечисленных, случай $I_k=0$ изображается отдельно.

6) Вычислить $n_0:=max\{m_k, I_k\}$ и изобразить уравнения из системы пункта 5), начиная с $n=0$ и заканчивая $n= n_0+1$.

В результате получается последовательность уравнений для $u[0], u[1], \ldots$ В нескольких первых уравнениях слева может быть ноль.

Для человека:

7) Проанализировать запись пункта 6).

8) Если в нескольких первых уравнениях слева находится ноль, то они представляют необходимые условия на $f(t)$ (на первые коэффициенты $f[0]$, $f[1], \ldots, f[k]$) для существования решения.

9) Определить, какие первые коэффициенты $u[0]$, $u[1], \ldots$ могут быть выбраны произвольно так, чтобы последующие коэффициенты однозначно определялись через них и через $f[k]$), учитывая, что структура всех последующих уравнений такая же, как и у записанного (n_0+1)-го уравнения.

10) Таким образом определить существование формального ряда для решения.

11) Исходя из структуры всех уравнений, начиная с (n_0+1)-го уравнения, найти область сходимости ряда для функции $u(t)$.

3. Текст программы на языке паскаль

```
PROGRAM venera_1(input, output);  USESCRT, Dos;
var k,j,a_n, a_d,n: integer;  p,b,I,I_,m: array[1..5] of integer;
b_,tp_:array[1..5] of string; a_,n_,nn_,nm_,m_,p_:string; and_,no_m:boolean;
procedure a_n_d(m1,n1:integer);
begin  and_:=false;  if (n1>=0) and (n1>=m1) then
begin and_:=true;  str(n1-m1,nm_); str(n1,nn_);  a_:=nn_+'!/'+nm_+'! *';
end; end;
begin {main}  clrscr; writeln;  writeln('   Venera  Ordinary  IDE 2019');
write('  Input number of summands 2<= K <=5: '); readln(k);
```

```
for j:=1 to k do begin
write(' Input coef. b[',j:1,'], t^p[',j:1,'], int/dif m[',j:1,']: ');
readln(b[j], p[j], m[j]); str(b[j],b_[j]); b_[j]:=b_[j]+'*';
if b[j]>0 then b_[j]:=' +'+b_[j]; if b[j]=-1 then b_[j]:='-';
if b[j]=1 then b_[j]:=' +'; tp_[j]:=' '; if p[j]=1 then tp_[j]:='t';
if p[j]>1 then begin str(p[j],p_); tp_[j]:='t^'+p_ end;
I[j]:=p[j]-m[j]; I_[j]:=-I[j]; end;
writeln ('   Equation'); for j:=1 to k do begin
if m[j]=-1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' int_0^t u(s)ds');
if m[j]<-1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' (int_0^t)^',-m[j]:2,' u(s)ds');
if m[j]=0 then write(' ',b_[j],tp_[j],' u(t)');
if m[j]>1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' D^',m[j]:2,' u(t)');
if m[j]=1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' D u(t)'); end; writeln(' = f(t)');
writeln ('   System of equations for coefficients');
for j:=1 to k do begin n_:='n'; if I[j]<0 then n_:='n+';
if I[j]<>0 then write(' ',b_[j], 'A(',m[j]:2,',',n_,-I[j]:2,') u[',n_,-I[j]:2,']');
if I[j]=0 then write(' ',b_[j], 'A(',m[j]:2,',',n_,') u[',n_,']'); end;
writeln(' = f[n]'); writeln ('   First equations for coefficients');
for n:=0 to 10 do begin no_m:=true;
for j:=1 to k do begin a_n_d(m[j],n-I[j]);
if and_ then begin no_m:=false; write(' ',b_[j],a_,' u[',n-I[j]:2,']');
end; end;
if no_m then write('   0 '); write(' = f[',n:2,']'); writeln;
end; writeln (' ... '); readln; readln end.
```

4. Пример интегрального уравнения и теоремы для него

Рассмотрим уравнение

$$tu(t) + 3\int_0^t u(s)ds - \int_0^t \int_0^s u(v)dvds = f(t). \qquad (1)$$

Вводим соответствующие данные в программу:

Venera Ordinary IDE 2019

```
 Input number of summands 2<= K <=5: 3
 Input coef. b[1], t^p[1], int/dif m[1]: 1 1 0
 Input coef. b[2], t^p[2], int/dif m[2]: 3 0 -1
 Input coef. b[3], t^p[3], int/dif m[3]: -1 0 -2
```

и получаем результат:

```
  Equation
 +t u(t)  +3*  int_0^t u(s)ds -  (int_0^t)^  2 u(s)ds = f(t)
  System of equations for coefficients
 +A( 0,n-1) u[n-1]  +3*A(-1,n-1) u[n-1] -A(-2,n-2) u[n-2] = f[n]
  First equations for coefficients
0  = f[ 0]
 +0!/0! * u[ 0]  +3*0!/1! * u[ 0] = f[ 1]
 +1!/1! * u[ 1]  +3*1!/2! * u[ 1] -0!/2! * u[ 0] = f[ 2]
 +2!/2! * u[ 2]  +3*2!/3! * u[ 2] -1!/3! * u[ 1] = f[ 3]
```

… (аналогичные слагаемые)

```
 +8!/8! * u[ 8]  +3*8!/9! * u[ 8] -7!/9! * u[ 7] = f[ 9]
 +9!/9! * u[ 9]  +3*9!/10! * u[ 9] -8!/10! * u[ 8] = f[10]
 ...
```

Из этой записи видно, что сначала определяется u[0], потом с его помощью - u[1], с помощью u[1] - определяется u[2], и т.д. Коэффициенты при u[n] больше 1, при этом коэффициенты при u[n–1] меньше 1. Отсюда следует

Теорема. Если *f(0)=0*, то уравнение (1) имеет аналитическое решение *u(t)*, зависящее от одной произвольной постоянной *u'(0)*. Его радиус сходимости такой же, как для функции *f(t)*.

Список использованных источников

1. Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных вольтерровских интегро-дифференциальных уравнений третьего рода второго порядка // Наука вчера, сегодня, завтра: сб. статей по матер. XXXIV междунар. научно-практ. конф. № 5(27). Часть I. – Новосибирск: СибАК, 2016. – С. 57-61.

2. Панков П.С., Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных задач

с аналитическими функциями // Доклады Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2016, № 1. – С.11-14.

3. Мураталиева В.Т. Алгоритм для исследования спектральных свойств линейных задач с аналитическими функциями // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1 (32). – С. 55-59.

4. Muratalieva V.T. Method and algorithm to investigate integro-differential equations with analytical functions // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 48.

2010 MSC: 35C20, 35K05

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF A QUASI – LINEAR PARABOLIC EQUATION WITH A SMALL PARAMETER

Turkmanov J.K.
(*Bishkek*)

Бул макалада биз квази – сызыктуу параболалык теңдемени t > 0 болгондогу туундунун үзгүлтүктүүлүгүнүн бир же бир канча сызыктар учурундагы кубулган маселеге тиешелуу болгон чыгарылышын карайбыз. Үзгүлтүксүз алгачкы функциянын «үзгүлтүктүүлүгү» бар, туундунун үзгүлтүктүүлүгүнүн бир сызыктын учурунда козголгон маселенин чыгарылышынын толук асимптотикалык ажыроосу тургузулат.

Урунттуу сөздөр: Квази - сызыктуу, параболалык теңдеме, кубулган теңдеме, чыгарылыш, бир нече сызыктар, асимптотикалык ажыроо, функция, үзгүлтүксүз түзөтүүлөр жана стандарттык алгоритмдер, туунду.

В этой статье мы рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение в предположении, что решение соответствующей вырожденной задачи имеет при t> 0 одну или несколько линий разрыва производных. В случае одной линии разрыва производных, порожденной «разрывом» непрерывной начальной функции, строится полное асимптотическое разложение решения невырожденной задачи.

Ключевые слова: Квази - линейное, параболическое уравнение, вырожденная задача, решение, несколько линий, асимптотическое разложение, функция, непрерывные поправки и стандартные алгоритмы, производная.

In this paper we consider a quasi – liner parabolic equation under the assumption that a solution of the corresponding degenerate problem has for $t > 0$ one or several lines of discontinuity of derivatives. In case of one line of discontinuity of derivatives generated by a «breaking» of the

continuous initial function, we construct a complete asymptotic expansiuon of the solution of the nondegenerate problem.

Key words: Quasi–linear, parabolic equation, degenerate problem, solution, several lines, asymptotic expansion, function, continuous derivatives, point, generally speaking, standard algorithms.

In the strip $\Pi_T = \{(t,x)|0 < t \le T, -\infty < x < \infty\}$, let us consider the Cauchy problem $L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x).$ (1)

The function $f(x)$ will be assumed to be continuous and bounded for $x \in (-\infty; +\infty)$, possessing for the $x \neq 0$ bounded continuous derivatives of any order and having finite limiting values as $x \to -0$, and $x \to +0$.

An asymptotic expansion of the solution of problem A_ε will be sought in the form

$$u(t,x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{2k} u_{2k}(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty} e^k v_k\left(t, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (2)$$

Here the functions $u_{2k}(t,x), k \ge 1$ are defined just in the preceding section as well as of their derivatives with respect to the variable x have as $t \to 0$ the order $O(t)$.

As usual, it will be assumed that the functions $v_k(t,\xi)$ as a function of the variable ξ are boundary layer character as $|\xi| \to \infty$. Taking into account the expression written out in the previous section for the derivative of the function $u_0(t,x)$, we can write a recutsion system of equations

$$L_1 v_1 \equiv \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{a^\pm \xi}{1+a^\pm t} v_1\right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(v_1 + \frac{a^\pm \xi}{1+a^\pm t}\right) v_k\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\Phi_k(t,\xi), \quad (4)$$

$k \ge 2$. Here $a^\pm = \lim_{x\to\pm 0} f'(x)$ and the functions $\Phi_k(t,\xi)$ can be easily defined successively for k=2,3,… by using the standard algorithms; the functions $\Phi_k(t,\xi)$ are represented by a sum whose each summand is a product of a polynomial $P_s(t,\xi)$ of degree s with functions of the variable t as coefficients by one or several functions $v_i(t,\xi), s \le k, i = 1,2,\dots,k-1$. [1], [2].

The equations (3), (4) are solved separately for $\xi < 0$ and $\xi > 0$. We will seek for such solutions of the equation (3), (4) which satisfy the conditions

$$[v_{2i+1}(t,\xi)] = 0, \left[(v_{2i+1}(t,\xi))'_{\xi}\right] = -[u_{2i}(t,x))'_{x}], \quad (5)$$

$$[v_{2i}(t,\xi)] = -[u_{2i}(t,x)], \left[v_{2i}(t,\xi))'_{\xi}\right] = 0, \quad (6)$$

$$v_k(0,\xi) = 0 \quad (7)$$

$$[z(t,y)] \equiv z(t,+0) - z(t,-0), i = 1,2, \dots$$

The fulfillment of the conditions (5), (6) implies the continuity (along with the first order derivatives) of the formal asymptotic expansion (2) of the solution of the problem (1).

Consider the problem (3), (5), (7) for $i = 0$. The change of the unknown function $\omega_1(t,\xi) = v_1(t,\xi) + \frac{a^{\pm}\xi}{1+a^{\pm}*t}$ leads us to the equation

$$\omega''_{1\xi} - \omega_1 * \omega'_{1\xi} - \omega'_{1t} = 0 \quad (8)$$

Whose solution must satisfy the additional conditions $\omega_1(0,\xi) = a^{\pm}\xi$, $\omega_1(t,+0) = \omega_1(t,-0), \left[\omega'_{1\xi}(t,\xi)\right] = 0.$

Thus the solution of the equation (8) must be continuous in the domain t>0 and possess in that domain the continuous derivative with respect to the variable ξ. Note that the equation (8)

$$\omega_1(t,\xi) = \left\{\frac{(a^+ - a^-)\sqrt{t}}{\sqrt{(1+a^-t)(1+a^+t)}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) + \xi\frac{a^-\sqrt{1+a^+t}}{1+a^-t}exp\left[-\frac{a^-\xi^2}{4(1+a^-t}\right]\int_{\delta(t,\xi)}^{\infty} e^{-\omega^2}d\omega + \xi\frac{a^+ * \sqrt{1+a^-t}}{1+a^+t}exp\left[-\frac{a^+\xi^2}{4(1+a^+t}\right]\int_{-\delta^+(t,\xi)}^{\infty} e^{-\omega^2}d\omega\right\} * \left\{\sqrt{1+a^+t}\,exp\left[-\frac{a^-\xi^2}{4(1+a^-t)}\right]\int_{\delta(t,\xi)}^{\infty} e^{-\omega^2}d\omega + \sqrt{1+a^-t}\,exp\left[-\frac{a^+\xi^2}{4(1+a^+t]}\right]\int_{-\delta^+(t,\xi)}^{\infty} e^{-\omega^2}d\omega\right\}^{-1}, \quad (9)$$

Where $\delta^+(t,\xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{1+a^+t}}$, $\delta(t,\xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{1+a^-t}}$. The expression (9) implies that the equality $v_1(t,0) = 0\ (\sqrt{t})$ is fulfilled.

To investigate the behavior of the function $\omega_1(t,\xi)$ *as* $|\xi| \to \infty$, we will use the well- known asymptotic formul as for the integrals appearing (9)

Applying these formul as, for $|\xi| \gg 1$ we can get

$$\omega_1(t,\xi) = \frac{a^{\pm}\xi}{1+a^{\pm}t} + \frac{2t^{\frac{3}{2}}(a^+ - a^-)}{\sqrt{\pi\xi^2\sqrt{(1+a^-t)(1+a^+t)}}} exp\left\{-\frac{\xi^2}{[4t(1+a^{\pm}t)]}\right\}(1+o(1)),$$

Where the symbol «$\pm$"takes the values «-» for $\xi \ll -1$ and «+» for $\xi \gg 1$.

On the basis of the above- obtained asymptotic representations can formulate the following.

Lemma 1. A solution of the problem (3), (5), (7) exist and exponentially tends to zero as $|\xi| \to \infty$; moreover, for that solution there holds the estimate

$$|v_1(t,\xi) \le M\sqrt{t}\left\{exp\left[-\frac{\xi^2}{4t(1+a^{\pm}t}\right] + exp\left[\frac{\xi^2}{4t}\right]\right\}.$$

For our further investigation we have to study the behavior of the derivatives of the function $v_1(t,\xi)$ as $|\xi| \to \infty$ and $t \to 0$

Lemma 2. For the derivatives of the solution of the problem (3), (5), (7) with respect to the variable ξ the estimates

$$\left|\frac{\partial v_1(t,\xi)}{\partial \xi}\right| \le M\left\{exp\left[-\frac{\xi^2}{4t(1+a^{\pm}t}\right] + exp\left[-\frac{\xi^2}{4t}\right]\right\},$$

$$\left|\frac{\partial^2 v_1(t,c)}{\partial \xi^2}\right| \le Mt^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\xi^2}{t}\right)\left\{exp\left[-\frac{\xi^2}{4t(1+a^{\pm}t}\right] + exp\left[-\frac{\xi^2}{4t}\right]\right\}.$$

are valid.

We can prove that lemma by means of an explicit expression for the function $v_1(t,\xi)$. From Lemmas 1 and 2 and the equation (3) in follows the estimate for the function $\frac{\partial v_1}{\partial t}$.

Let us pass to the consideration of the functions $v_k(t,\xi), k \ge 2$. Suppose that the estimates

$$\left|\frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi}\right| \leq M(1+|\xi|^{n_k}\left\{exp\left[-\frac{\xi^2}{4t(1+a^{\pm}t)}\right]+exp\left[-\frac{\xi^2}{4t}\right]\right\},$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \xi^2}\right| \leq M\sqrt{t}(1+|\xi|^{n_k+1}\left\{exp\left[-\frac{\xi^2}{4t(1+a^{\pm}t)}\right]+exp\left[-\frac{\xi^2}{4t}\right]\right\}$$

Hold for the right- hand side of the equation (4). Note that by the change of variables

$$y=\frac{\xi}{1+a^{\pm}t}\ ,\tau=\frac{t}{1+a^{\pm}t}\ ,_k=(1+a^{\pm}t)v_k \tag{10}$$

The equations (3), (4) are reduced to those with bounded coefficients which, generally speaking, are discontinuous for $y=0$:

$$\tilde{\upsilon}''_{1yy}-\tilde{\upsilon}_1\tilde{\upsilon}'_{1y}-\tilde{\upsilon}'_{1\tau}=0.$$

$$\tilde{\upsilon}''_{kyy}-(\tilde{\upsilon}_1\tilde{\upsilon}_k)'_y-\tilde{\upsilon}^{+1}_{k\tau}=\{\Phi_k(\tau,y)/[1-a^{\pm}\tau]\}'_y.$$

The existence of bounded solutions of either equation can be substantiated, for example, by the methods developed in [3]

Let us show that functions $v_k(t,\xi)$ and their derivatives are of boundary layer character as $|\xi|\rightarrow\infty$.

Theorem. For the solution of problem A_ε under the above- mentioned conditions the asymptotic expansion (2) is valid. Moreover, the estimate

$$\left\|u(t,x,\varepsilon)-u^{(N)}(t,x,\varepsilon)\right\|_{C^1}\equiv$$
$$\left\|u(t,x,\varepsilon)-\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^{2k}u_{2k}(t,x)-\sum_{k=1}^{2N+1}\varepsilon^k v_k(t,x,\varepsilon\right\|_{C^1}\leq M\varepsilon^{2N}$$

holds.

Proof. Consider the difference $z_N(t,x,\varepsilon)=u(t,x,\varepsilon)-u^N(t,x,\varepsilon)$. The function $z_N(t,x,\varepsilon)$ satisfies the zero initial condition for $t=0$and is twice continuously differentiable for $t>0, x\neq 0$.

Everywhere in the strip Π_T, with the exception of the points of the axis $x=0$, the function $z_N(t,x,\varepsilon)$ satisfies the equation

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 z_N}{\partial x^2}-\Phi'(u)\frac{\partial z_N}{\partial x}-\Phi''_u\frac{\partial u^{(N)}}{\partial x}z_N-\frac{\partial z_N}{\partial t}=-\psi_N(t,x,\varepsilon) \tag{11}$$

Where

$$\Phi_u'' = \int_0^1 \Phi''\left(u^{(N)}(1-\theta) + u\theta\right)d\theta,$$

$$\left|\psi_N(t,x,\varepsilon\right| \le M\varepsilon^{2N+2}$$

According to the maximum principle, everywhere in the strip Π_T the estimate $z_N(t,x,\varepsilon)$ for the function $|z_N(t,x,\varepsilon)| \le M\varepsilon^{2N+2}$ is valid.

$$\left|\tilde{\psi}_N(t,x,\varepsilon) - \tilde{\psi}_N(t,y,\varepsilon)\right| \le M\varepsilon^{2N+1}t^{-\frac{1}{2}}|x-y|.$$

Using this estimate, we can, as when proving Theorems

$$|[z_N(t,x,\varepsilon)]'_{xx}| \le M\varepsilon^{2N}\left(\sqrt{t} + \varepsilon^{-2}\right).$$

Which provides us with the estimate for the function $\frac{\partial z_N(t,x,\varepsilon)}{\partial t}$.

Getting back to the variables t and x, we can rephrase the obtained results in terms of the following [4].

References

1. Sushko V.G. On the asymptotics with respect to a small parameter a one parabolic equation. (Russian) Dokl.Akad.Nauk SSSR 205(1972), №4, 794-797.

2. Oleinik O.A. and Kruzhkov S.N. Quasilinear parabolic equations of second order with several independent variables. (Russian) // Uspekhi Mat.Nauk 16(1961), №5, 115-155.

3. Ladyzhenskaya O.A., Boundary value problems of mathematical physics. -Nauka, Moskow, 1973.

4. Oleinik O.A. and Ventzel T.D. The first boundary value problem and the Cauchy problem for quasilinear equation of parabolic type. (Russian) // Mat. Sb.4(1957), №1, 105-128.

2010 MSC: 35R09, 45K65

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А. , Айтбаев К.А.
Институт математики НАН КР

Бул иште төртүнчү тартипте жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин чыгарымдуулук проблемасы каралган жана алынган чыгарылыштардын интегралдык көрүнүшү табылган.

Негизги сөздөр: жекече туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме, Коши маселесинин чыгарымдуулук проблемасынын жетиштүү шарттары, кысып чагылдыруу принциби, экинчи түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдеме, Коши маселесинин чыгарылышынын интегралдык көрүнүшү

В данной работе исследована проблема разрешимости начальной задачи для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и найдено интегральное представление полученных решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, достаточное условие разрешимости задачи, отображение в себя, принцип сжатых отображений, нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, интегральное представление решений задачи Коши.

In this paper, we study the problem of the solvability of the initial problem for nonlinear fourth-order partial differential integro-differential equations and find the integral representation of the solutions obtained.

Keywords: integro-differential equations in partial derivatives, a sufficient condition for the solvability of the problem, a mapping into itself, the principle of compressed mappings, a nonlinear Volterra integral equation of the second kind, an integral representation of solutions of the Cauchy problem.

Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x}+(\alpha^2+1)L[u]=f\left(t,x,u,u_t,u_x\right)+\int_0^t K\left(t,s,u\left(s,x\right)\right)ds, \tag{1}$$

где $L[u]=u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u, t\in\left[0,T\right],\ x\in R,\ \alpha,p\in R_+$ с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi\left(x\right), \tag{2}$$

$$u_t(0,x)=\psi(x). \tag{3}$$

Предположение А. Пусть

$$f(t,x,u,u_t,u_x)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right),$$

$$K(t,s,x,u)\in\bar{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\quad \varphi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right),\psi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right)$$

Решение задачи Коши (1)-(3) ищем в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu \qquad (4)$$

Мы будем следовать методу, предложенному в [1-2].

Далее, будем находить частные производные искомой функции из соотношения (4). Имеем

$$u_t(t,x)=c_t(t,x)+$$
$$-p\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu+$$
$$\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu=$$
$$=c_t(t,x)-p[u(t,x)-c(t,x)]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu.$$

Отсюда

$$u_t+pu=c_t+pc+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu.$$

Далее, имеем

$$u_{tt}+pu_t=c_{tt}+pc_t+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds-$$
$$-p[u_t+pu-(c_t+pc)]+(u-c).$$

Отсюда

$$L[u]\equiv u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u=c_{tt}+pc_t+(p^2+1)c+$$
$$+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds; \qquad (5)$$
$$L[u]=L[c]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds.$$

Кроме того

$$\frac{dL[u]}{dx}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[L[u]-L[c]]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)\,ds. \qquad (6)$$

Из (6) находим производные по x

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[\frac{dL[u]}{dx}-\frac{dL[c]}{dx}]-\alpha\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)ds-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)ds+Q(t,x).$$

Из последнего с учетом (5), (6) находим

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[u]}{dx}+(\alpha^2+1)L[u]=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+$$
$$+(\alpha^2+1)L[c]+Q(t,x). \qquad (7)$$

Обозначим

$$H(t,x,c)=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+(\alpha^2+1)L[c].$$

Из (1) и (7) вытекает нелинейное интегральное уравнения Вольтерра второго рода относительно $Q(t,x)$ вида:

$$Q(t,x)=f(t,x,c(t,x)+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu,$$
$$c_t(t,x)-p[u(t,x)-c(t,x)]+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu,$$
$$c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu) \qquad (8)$$
$$+\int\limits_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q(\nu,s)dsd\nu\right)d\tau+$$
$$+H(t,x,c)\equiv A[Q].$$

Для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (8) дополнительно, допустим некоторые обычные ограничения относительно функции $H(t,x,c)$:

При всех $\{t>0,x\in R\}$ функция $H(t,x,c)$ непрерывна и ограничена

$$\|H(t,x,c)\|\le M_0=const.$$

Уравнение (8) будем решать с помощью топологического метода, а именно, принципом сжатых отображений. Правую часть уравнения (8) рассмотрим как оператор *A[Q],* действующий на функцию $Q(t,x)$.

Определим множество

$$Q=\left\{u(t,x): u(t,x)\in \bar{C}^{(2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$$

Величины T, h определяются позже.

Из уравнения (8) будем иметь $\|AQ\|\le M_1+M_0+KT_0$,

где $M_1\equiv\max f(t,x,u,u_t,u_x,),\ M_0\equiv\max\left\|H\left(t,x,c\right)\right\|, \mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$$M_1+M_0+KT_0\le h,$$

то, оператор $AQ:Q\to Q$. Теперь оценим разность

$$\begin{aligned}
&\left\|A[Q_1\left(t,x\right)]-A[Q_2\left(t,x\right)]\right\|\le\Big\| f(t,x,c\left(t,x\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(t-\nu\right)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_1\left(\nu,s\right)dsd\nu,\\
&c_t\left(t,x\right)-p[u\left(t,x\right)-c\left(t,x\right)]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(t-\nu\right)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_1\left(\nu,s\right)dsd\nu,\\
&c_x\left(t,x\right)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(t-\nu\right)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_1\left(\nu,s\right)dsd\nu)\\
&+\int_0^t K\left(t,\tau,c\left(t,x\right)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(\tau-\nu\right)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_1\left(\nu,s\right)dsd\nu\right)d\tau-\\
&-f(t,x,c\left(t,x\right)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(t-\nu\right)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_2\left(\nu,s\right)dsd\nu,\\
&c_t\left(t,x\right)-p[u\left(t,x\right)-c\left(t,x\right)]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(t-\nu\right)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_2\left(\nu,s\right)dsd\nu,\\
&c_x\left(t,x\right)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(t-\nu\right)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_2\left(\nu,s\right)dsd\nu)\\
&+\int_0^t K\left(t,\tau,c\left(t,x\right)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha\left(x-s\right)-p\left(\tau-\nu\right)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_2\left(\nu,s\right)dsd\nu\right)d\tau\Big\|\le\\
&\le[\frac{3L_1}{\alpha p}+\frac{L_2}{\alpha p}]\left\|Q_1\left(\nu,s\right)-Q_2\left(\nu,s\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Выберем $\alpha,p\in R_+$ так, что

$$\frac{3L_1}{\alpha p}+\frac{L_2}{\alpha p}<1.$$

Отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (8) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение *Q(t,x)*.

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений начальной задачи (1)-(3).

При всех $\{t>0, x\in R\}$ из равенства (4) вытекает неравенство:

$$\begin{aligned}&\left\|u(t,x)\right\|\le\left\|c(t,x)\right\|+\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\left|\sin(x-s)\sin(t-\nu)\right|\left\|Q(\nu,s)\right\|dsd\nu\le\\&\le C_0+\frac{h}{\alpha p}=h_1=const.\end{aligned}$$

При проведении вышеприведенной оценки было учтено,что $\left|\sin\alpha\ \right|\le 1, \left|\sin\beta\right|\le 1.$

Аналогичные оценки можно поучить и для всех производных, входящих в уравнение (1).

Итак, справедлива

Теорема. Пусть выполнены предположения (A). Тогда $\forall T_0>0$, такое, что задача Коши (1)-(2) имеет решение $u(t,x)\in\bar{C}^{(2,2)}\left([0,T_0]\times R\right)$, представляемое в виде (4). Кроме того все производные входящие в уравнение (1) равномерно ограничены.

Список использованных источников

1. Байзаков А.Б., Джээнбаева Г.А. Разрешимость и структура решений начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка // Наука, новые технологии и инновации. – Бишкек, 2017. – №5. – С.100-104.
2. Иманалиев М., Иманалиев Т.М., Какишов К. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2007. – Вып. 36. – С. 19-28.

2010 MSC: 91B82

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

Курманалиева Т.Дж., Байзаков А.Б.
КГУСТА им. Н.Исанова, Институт математики НАН КР

Бул иште кредиттик портфелдин маңызы жана сапаты ачылып көрсөтүлдү. Банктын кредиттик саясаты жана аны ишке ашыруу механизмдери жана да банктардын кредиттик ишмердүүлүгү жазып көрсөтүлдү

Негизги сөздөр**:** Кредиттик портфель, өзүнчө алынган ссуданын сапатын баалоо үчүн критерий тандоо, классификациаланган ссудалардын негигинде кредиттик портфелдин түзүлүшүн аныктоо, факторлорду анализдөө.

В данной работе раскрыта сущность и качество кредитного портфеля. Описана кредитная политика банка и механизмы ее реализации, а так же роль кредитной деятельности банков.

Ключевые слова: Кредитный портфель, выбор критерия оценки качества отдельно взятой ссуды, определение структуры кредитного портфеля в разрезе классифицированных ссуд, анализ факторов.

This paper reveals the nature and quality of the loan portfolio. The bank’s credit policy and mechanisms for its implementation, as well as the role of banks ’lending activities, are described.

Keywords: loan portfolio, choice of criteria for assessing the quality of a single loan, determining the structure of the loan portfolio in the context of classified loans, analysis of factors.

Банк по своему назначению должен являться одним из наиболее надежных институтов общества, представлять основу стабильности экономической системы. В современных условиях неустойчивой правовой и экономической среды банки должны не только сохранять, но и приумножать средства своих клиентов практически самостоятельно, ввиду отсутствия государственной поддержки и опоры. В этих условиях профессиональное управление банковскими рисками, оперативная идентификация и учет факторов риска в повседневной деятельности приобретают первостепенное значение.

В современном мире сохраняется высокий уровень уязвимости банковского сектора, недоверие клиентов к кредитным организациям, что подтвердила ситуация в начале весны на межбанковском рынке. Сохраняются также высокие риски кредитования, обусловленные неэффективной структурой экономики, дефектами управления и низкой транспарентностью многих предприятий.

Кредитные операции - основа банковского бизнеса, поскольку являются главной статьей доходов банка. Но эти операции связаны с риском невозврата ссуды (кредитным риском), которому в той или иной мере подвержены банки в процессе кредитования клиентов. Именно поэтому кредитный риск как один из видов банковских рисков является главным объектом внимания банков.

Эффективное управление кредитным портфелем начинается с тщательной разработки кредитной организацией политики кредитования, которая реализуется в документ, утвержденный и периодически пересматриваемый советом директоров или правлением кредитной организации. В нем должны быть сформулированы цели и задачи при предоставлении денежных средств в части обеспечения высокого качества активов, прибыльности данного направления деятельности. Кредитный портфель – это характеристика структуры и качества выданных ссуд, классифицированных по определенным критериям. Одним из таких критериев, применяемых в зарубежной и отечественной практике, является степень кредитного риска. Поэтому критерию определяется качество кредитного портфеля. Анализ и оценка качества кредитного портфеля позволяют менеджерам банка управлять его ссудными операциями.

Управление кредитным портфелем имеет несколько этапов: выбор критериев оценки качества отдельно взятой ссуды; определение основных групп ссуд с указанием связанных с ними процентов риска; оценка каждой выданной банком ссуды исходя из избранных критериев, т.е. отнесение ее к соответствующей группе; определение структуры кредитного портфеля в разрезе классифицированных ссуд; оценка качества кредитного портфеля в целом; анализ факторов, оказывающих влияние на изменение структуры кредитного портфеля в динамике; определение суммы резервного фонда, адекватного совокупного риску кредитного портфеля банка; разработка мер по улучшению качества кредитного портфеля. Основополагающим моментом в управлении кредитным портфелем банка является выбор критериев оценки качества отдельно взятой ссуды.

Повышение доходности кредитных операций и снижение риска по ним – две противоположные цели. Как и во всех сферах финансовой деятельности, где наибольшие доходы инвесторам приносят операции с повышенным риском, повышенный процент за кредит является платой за риск в банковском деле. Таким образом, при формировании кредитного портфеля банк должен придерживаться общего для всех инвесторов принципа – сочетать высокодоходные и достаточно рискованные вложения с менее доходными, но менее рискованными направлениями кредитования.

Было выявлено, что качеством кредитного портфеля банка можно управлять путем проведения комплекса мероприятий, направленных на ужесточение требований к заемщику и повышению диверсифицированности кредитного портфеля банка.

Проведенное исследование показало, что качество кредитного портфеля коммерческого банка необходимо оценивать не только при помощи анализа структуры ссудной задолженности, но и при помощи нормативов и коэффициентов, разработанных банком при помощи математического моделирования.

Кредитный портфель банка – это совокупность остатков задолженности по активным кредитным операциям на определенную дату. Клиентский кредитный портфель является его составной частью и представляет собой остаток задолженности по кредитным операциям банка с физическими и юридическими лицами на определенную дату.

Мы будем формировать кредитный портфель на основе максимизации показателя дохода банка. Однако решением задачи формирования кредитного портфеля будут не доли кредитов клиентов в кредитном портфеле, а решение выдавать или не выдавать кредит. При построении модели кредитного портфеля необходимо учесть риски, возникающие при кредитовании клиентов, поэтому при использовании такого подхода целесообразно рассматривать максимизацию ожидаемого дохода банка. Для определенности будем предполагать, что риски по отдельным клиентам независимы между собой.

Предположим, банк формирует кредитный портфель из ссуд, которые распределены по m группам качества ($i=\overline{1,m}$) и могут быть выданы n клиентам ($j=\overline{1,n}$).

Введем следующие обозначения:

x_j – бинарная переменная, которая принимает значение 1, если кредит включен в кредитный портфель, и 0, если кредит не включен в кредитный портфель;

δ_{ij} – бинарная переменная, которая принимает значение 1, если кредит выдаваемый клиенту j, включается в i-ую группу качества, и 0 иначе. Предполагается, что клиенту может быть выдан только один кредит,

поэтому $\sum_{i=1}^{m}\delta_{ij}=1$;

v_j – случайная величина дохода банка при выдачи кредита j-му клиенту;

s_j – величина выдаваемого кредита j-му клиенту (в денежных единицах) с учетом возможного внесения первоначального взноса;

l_j – величина дохода, получаемого банком от выдачи кредита j-му клиенту кредита (в денежных единицах). Величина l_j в общем случае зависит от ставки по кредиту, срока кредита, суммы кредита s_j и др.;

h_j – рыночная стоимость имущества j-го клиента на момент реализации (в денежных единицах) с учетом дисконтирования стоимости;

r_j – величина расчетного резерва в процентах от суммы основного долга;

SK – величина собственного капитала банка (в денежных единицах);

d_k – ставка по депозитам k-го типа ($k=\overline{1,K}$);

D_k – величина средств, привлеченных в качестве депозитов k-го типа.

Предполагается, что величины s_j, l_j, h_j, SK, D_k могут принимать только положительные значения.

Величина дохода банка при работе с клиентами является случайной.

После выдачи кредита для банка возможны следующие ситуации:

- кредит погашен полностью в срок платежными средствами заемщика, в том числе сумма основного долга, проценты по кредиту, комиссионные и иные платежи;
- кредит погашен в результате реализации объекта залога по кредиту. Здесь банк может получить неполное возмещение вследствие различной ликвидности имущества, принятого в залог по кредиту;
- кредит не погашен вследствие разорения заемщика.

Пусть к каждой ситуации соответствует вероятность ее наступления и соответствующая величина дохода или убытка банка (исход).

Охарактеризуем каждый возможный исход случайной величины v_j.

Если кредит погашен полностью в срок платежными средствами заемщика, то банк получает доход l_j с вероятностью p_{1j}.

Если кредит погашен в результате реализации объекта залога, то банк получает доход $h_j - s_j$ с вероятностью p_{2j}.

При невозврате кредита банк получает доход $(-s_j)$ с вероятностью p_{3j}

Итак, имеем дискретное распределение случайной величины v_j- дохода банка при предоставлении кредита *i*-ой категории качества *j*-му клиенту.

Доход	l_j	$h_j - s_j$	$-s_j$
Вероятность	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}

Теперь можно определить характеристики случайной величины – дохода банка:- ожидаемый доход банка (математическое ожидание)

$$\mu_j = p_{1j} l_j + p_{2j}\left(h_j - s_j\right) + p_{3j}\left(-s_j\right),$$

- дисперсию дохода банка

$$\sigma_j^2 = p_{1j}\left(l_j\right)^2 + p_{2j}\left(l_j - s_j\right)^2 + p_{3j}\left(-s_j\right)^2 - \mu_j^2,$$

- стандартное отклонение дохода банка

$$\sigma_j = \sqrt{p_{1j}(l_j)^2 + p_{2j}(l_j - s_j)^2 + p_{3j}(-s_j)^2 - \mu_j^2}\,.$$

Поскольку доход банка представляет собой случайную величину, то критерием оптимизации будет максимизация суммарного ожидаемого дохода по всем выданным ссудам.

Запишем целевую функцию для задачи формирования кредитного портфеля с учетом предположения о независимости рисков при кредитовании клиентов. $M\sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \to \max$.

Для реализации математических моделей формирования кредитного портфеля разработана программа на основе Microsoft Office Excel 2007. Программа позволяет проводить расчеты с различными вариантами наборов ограничений и получать соответствующие кредитные портфели как по критерию максимизации ожидаемого дохода, так и по критерию минимизации риска кредитного портфеля при определенном ожидаемом доходе банка.

Задачи оптимизации кредитного портфеля. Найти ожидаемую доходность и ее стандартное отклонение для портфеля, состоящего из 10 видов ценных бумаг с некоррелированными доходностями. Доли ценных бумаг x_i, их доходности r_i, и стандартные отклонения σ_i, приведены в таблице.

Параметры	Номера ценных бумаг i									
x_i %	0	0	0	0	0	0	0	0		5
r_i %	5	5	8	2	5	0	0	8	5	0
σ_i %			0		2	0		5	0	5

Решение.

$$r_p = 0{,}1 \text{-}15 + 0{,}1 \text{-}15 + 0{,}1\text{-}\ 18 + 0{,}1\text{-}\ 12 + 0{,}1\text{-}25 + 0{,}1\text{-}20 + 0{,}2\text{-}\ 10 +$$

$$+ 0{,}1 \bullet 28 + 0{,}05 \bullet 35 + 0{,}05 \bullet 50 = 19{,}55$$

Так как случайные величины доходностей бумаг являются независимыми, то дисперсия доходности портфеля

$$D\,(r_p) = 0{,}01 \cdot 64 + 0{,}01 \cdot 64 + 0{,}01 \cdot 100 + 0{,}01 \cdot 49 + 0{,}01 \cdot 144 + 0{,}01 \times$$

$$\times\, 100 + 0{,}04 \cdot 25 + 0{,}01 \cdot 225 + 0{,}0025 \cdot 400 + 0{,}0025 \cdot 625 = 11{,}02.$$

Тогда $\sigma(r_p) = \sqrt{D(r_p)} = 3.32\%$, видим, что стандартное отклонение доходности портфеля оказалась ниже минимального значения для ценной бумаги с номером 6, а ≪пиковые≫ значения стандартных отклонений ценных бумаг с номерами 9 и 10 попросту ≪растворились≫ в общей величине $\sigma(r_p)$.

Данный пример показывает, что крупные компании на рынке инвестиций чувствуют себя гораздо более уверенно, нежели их мелкие конкуренты, поскольку крупные инвестиции позволяют приобрести более диверсифицированные портфели и тем самым в значительной мере обезопасить компанию от рыночных рисков.

Список использованных источников

1. Аскинадзи В.М., Максимова В.Ф. Портфельные инвестиции. – М.: 2005.
2. Касимов Ю.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. – М.: Филинь, 2005.
3. Еговорова Н.Е., Смулов А.М. Математические методы финансового анализа банковского деятельности. Аудит и финансовый анализ, 1998, №2.
4. Янковский И. Генезис математических моделей банка. Банковский вестник. Республика Беларусь, 2008, №4.
5. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Теория риска и моделирования рисковых ситуаций. М., ”Дашков и К”, 2005.

MSC 49M37

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ЭКОНОМИКИ

Жусупбаев А., Асанкулова М.А., Чороев К., Суйуналиева Н.К.
Институт математики НАН КР

Бул макалада Кыргыз Республикасынын жалпы продуктунун тармактык структуралык өзгөрүүлөр жана кезмет моделдөө жана божомолдоо багытталган. Үч секторго бөлүнгөн экономика изилдөө боюнча улуттук экономиканы түзүмдүк жактан бузулушу, жоюу көйгөйүн чечүү үчүн кабыл алынат. Жогорку технологиялык өнөр жай жана кызмат пайдасына жалпы ички продукт түзүмүндөгү алгылыктуу багыттарын иштеп чыгуу зарыл.

Урунтуу сөздөр: структуралык диспропорция, өнөр жай тарабынан экономикалык түзүлүшү, үч сектордун түзүмү, божомолдоо, өндүрүштүк ищ, бир эле учурда эконометрикалык тендемелер системасы.

Настоящая статья посвящена моделированию и прогнозированию структурных изменений и сдвигов в отраслевой структуре валового продукта КР. Предложены методы решения задачи преодоления структурных диспропорций развития национальной экономики, на основе исследования экономики разделенная на три сектора. Обоснована необходимость развития положительной тенденции изменения структуры валового продукта в пользу высокотехнологичных отраслей и сферы услуг.

Ключевые слова: структурная диспропорция, структура экономики по отраслям, трех секторная структура, прогнозирование, производственная функция, система эконометрических одновременных уравнений.

This article is devoted to modeling and forecasting structural changes and shifts in the sectoral structure of the gross domestic product of the Kyrgyz Republic. Methods are proposed for solving the problem of overcoming the structural disproportions in the development of the national economy, based on economic research divided into three sectors. The necessity of developing a positive trend of changing the structure of the gross product in favor of high-tech industries and the service sector is substantiated.

Keywords: structural disproportion, structure of the economy by industry, three sector structure, forecasting, production function, system of econometric simultaneous equations.

На современном этапе отраслевая структура национальной экономики Кыргызской Республики характеризуется преобладанием аграрного сектора и добывающих отраслей. Они являются одной из наиболее трудоемких и капиталоемких отраслей, в связи с чем, происходит отток капитала от других отраслей. Ориентация производство продукции этих отраслей на международный рынок делает страну зависимой от международного колебания цен. В результате чего более половины ВВП страны формируется от продажи ресурсов.

В условиях функционирование рынка ЕАЭС, для Кыргызстана как члена союза стоит трудная задача преодоления тяжелых структурных диспропорций в экономике, не отвечающих современным требованием.

Диспропорции отраслевой и структуры экономики Кыргызстана (как другие страны СНГ) связаны с дезинтеграцией между постсоветскими странами и новыми интеграционными процессами. В последние годы структура экономики Кыргызстана претерпела значительные изменения, но носит неравномерный характер. Интеграция в ЕАЭС, осуществляется в основном за счет отраслей сырьевого сектора, в структуре экспорта доминируют не готовые товары, а промежуточный продукт

Возникшие проблемы интеграции страны в рынок ЕАЭС требуют от ученых и специалистов разработки новых методов и методологии анализа, моделирования и прогнозирования отечественной экономики. Разработка новой макроэкономической межотраслевой модели, учитывающей рыночный характер отечественной экономики должна учитывать проблему обеспеченности внутреннего рынка отечественными товарами (особенно потребности продовольственного рынка), а также соотношение импорта и экспорта. В настоящее время Кыргызстан переживает период кардинальной структурных изменений. Именно структурные изменения – структура выпуска, структура затрат, ценовые соотношения, структура доходов – определяют суть того, что в последние годы происходит в стране.

Анализ структурных изменений общественного производства страны показывает, что оно значительно отличается от стандартных значений, которые сложились в передовых развитых странах.

Широкое распространение в практике прогнозирования развития национальной экономики получили методы экстраполяции, основанные на выявлении тенденций исследуемых показателей, с помощью эконометрических уравнений в краткосрочном периоде. Это оправдано с тем что, для экономики переходного периода, финансовые параметры экономики стабильны.

Прогноз осуществляется на основе переноса на будущее исходного состояния показателя при условии, что исследуемый процесс, характеризуемый выбранным показателем, будет испытывать те же внешние воздействия. Экстраполяционный подход применяется при прогнозировании показателей производственного потенциала сложившихся регионов, имеющих устойчивый экономический рост. Изменение ВВП страны за последние годы показал неустойчивость экономического роста, заключающееся в спаде темпов роста. Поэтому использование экстраполяционных методов может дать прогнозные значения состояния исследуемых процессов со значительной погрешностью. Предлагаемая модель прогнозирования производственного потенциала региона представляет собой систему эконометрических уравнений вида (4):

Исследование структурных изменений и закономерностей развития отраслей экономики даст возможность составления прогнозных оценок. Динамика структуры вызывает изменение внутреннего содержания исследуемых объектов и их экономической интерпретации, приводит к изменению причинно-следственных связей.

Для прогнозирование развитие экономики с учетом изменений структуры нами разработана модель прогнозирования производственного потенциала в виде системы эконометрических одновременных уравнений:

$$\begin{cases} D_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \\ I_{i,t} = \alpha + \beta I_{i,t} + \gamma D_t \\ F_{i,t} = \alpha + \beta F_{i,t-1} + \gamma I_{i,t} \\ Z_{i,t} = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \\ V_{i,t} = \alpha + \beta F_{i,t} + \gamma L_{i,t} \end{cases} \qquad (1)$$

где D_t – доходы бюджета региона; $I_{i,t}$ – инвестиции в основной капитал;

$F_{i,t}$ – объем основных фондов в i –той отрасли производства;

$L_{i,t}$ – численность занятых в i –той отрасли;

$V_{i,t}$ – валовой выпуск i –той отраслью производства.

Основным показателем, определяющий уровень развития экономики, является валовый внутренний продукт. Валовый продукт, произведенный в предыдущем периоде, является основой для текущего производства, поэтому в качестве независимой переменной использован показатель валового выпуска. Вторая независимая переменная – объем основных фондов, третья – численность занятых в экономике. Эти показатели являются основными факторами повышения производительности труда, а значит объема производства.

Для рационального использования инвестиционных ресурсов в перспективе, экономика страны подразделена на три сектора. Предполагается, что за каждым сектором закреплены основные производственные фонды (ОПФ), в то время как трудовые ресурсы и инвестиции могут свободно перемещаться между секторами. Основными секторами экономики являются – промышленность и строительство, - сельское хозяйство и добывающая промышленность; - транспорт и связь.

При прогнозировании объемов инвестиций в основной капитал экзогенными переменными являются инвестиции в основной капитал за предыдущий период и доходы бюджета региона. В свою очередь прогноз основных фондов проводится на основе значений основных фондов и объемов инвестиций в основной капитал за предыдущий период. Наряду с основными фондами при прогнозировании валового выпуска используется численность занятых в экономике, рассчитываемая на основе полинома второй степени.

На основе полученных моделей произведен прогноз исследуемых показателей до 2021 года. Прогнозные значения параметров показывают, что отраслевая структура экономики страны изменилась несущественно. Это требует существенных изменений в структуре привлеченных инвестиций в пользу обрабатывающих отраслей.

В результате расчетов получены следующие модели: Для промышленности и строительства:

$$
\begin{cases}
D_t = 0{,}97 + 132{,}3t + 32{,}4t^2 \\
I_{i,t} = 1{,}23 + 0{,}7I_{i,t} + 0{,}89D_t \\
F_{i,t} = 178{,}9 + 0{,}332F_{i,t-1} + 3{,}42I_{i,t} \\
Z_{i,t} = -132{,}7 + 6{,}78t \\
V_{i,t} = -737{,}9 + 0{,}56F_{i,t} - 321{,}3L_{i,t}
\end{cases} \qquad (2)
$$

Для сельского хозяйства и добывающей промышленности:

$$
\begin{cases}
D_t = 132{,}5 + 423{,}7t + 372{,}4t^2 \\
I_{i,t} = -3{,}22 + 0{,}09D_t \\
F_{i,t} = 372{,}5 + 0{,}932F_{i,t-1} - 0{,}012I_{i,t} \\
Z_{i,t} = -182{,}7 + 0{,}78t \\
V_{i,t} = -907{,}1 + 0{,}71F_{i,t} + 432{,}3L_{i,t}
\end{cases} \qquad (3)
$$

Для транспорта и связи:

$$
\begin{cases}
D_t = 932{,}6 - 1423{,}7t + 532{,}3t^2 \\
I_{i,t} = 53{,}12 + 1{,}7I_{i,t} + 0{,}57D_t \\
F_{i,t} = 772{,}5 + 0{,}032F_{i,t-1} + 3{,}31I_{i,t} \\
Z_{i,t} = -581{,}6 + 2{,}28t \\
V_{i,t} = -1201{,}1 + 1{,}23\,X_{i,t-1} + 0{,}073F_{i,t} + 731{,}4L_{i,t}
\end{cases} \qquad (4)
$$

Полученные модели адекватны по рассматриваемым параметрам. В табл.1 представлены параметры, характеризующие качество полученных моделей: *R2* – коэффициент детерминации; *F* – фактическое значение критерия Фишера; *t1* и *t2* – фактические значения критерия Стьюдента.

Таблица 1

Критерии	Показатели				
	D_t	I_t	F_{it}	Z_{it}	V_{it}
Промышленность и строительство					
R^2	0,95	0,89	0,91	0,87	0,76
F	42,77	76,4	8,56	7,32	23,2
t_1	-1,32	5,6	-0,7	-2,1	3,23
t_2	1,62	—	2,32	0,27	—
Сельское хозяйство и добывающей отрасли					
R^2	0,93	0,92	0,88	0,78	0,69
F	52,17	48,4	4,56	9,32	32,2
t_1	-1,54	7,34	—	3,21	-1,67
t_2	2,12	2,09	—	-1,24	2,56
транспорт и связь					
R^2	0,95	0,9	0,93	0,83	0,79
F	142,1	56,4	6,72	8,43	43,2
t_1	-1,34	5,34	7,76	2,21	-1,67
t_2	2,78	—	-2,02	-1,24	2,56

Основные характеристики параметров моделей прогнозирования.

На основе полученных моделей произведен прогноз исследуемых показателей. В таблице 2 представлена динамика изменения рассматриваемых показателей и их прогноз до 2021 г. По результатам прогнозных значений наблюдается увеличение показателей в 2021 г. по сравнению с 2018 г.: объем валового выпуска промышленности и строительство – на 25,91%, сельское хозяйство и добывающая промышленность– на 41,36%, транспорт и связь – на 40,03%.

Прогонозные значения основных секторов экономики КР.

Таблица 2

годы	Промышленность и строительство	Сельское хозяйство и добывающей отрасли	Транспорт и связь
2018	153964,62	149185,87	47591,45
2019	172361,15	174547,47	53778,34
2020	187251,25	197711,49	60769,52
2021	193858,58	211330,9	66791,10

На основе полученных в табл. 2 прогнозных значений ВРП по отраслям представим их в долях от общего значения ВВП (табл. 3).

Доля секторов экономики КР.

Таблица 3

годы	Промышленность и строительство	Сельское хозяйство и добывающей отрасли	Транспорт и связь
2018	25,47	13,78	8,57
2019	25,92	14,01	8,75
2020	26,21	15,32	9,13
2021	26,3	16,02	9,21

Исследования показывает, что, распределения инвестиционных ресурсов ассиметрично: большая доля выделяются для сырьевых отраслей, и такая структура распределения ресурсов обусловлена следующими факторами:

1.Условия труда в сырьевых отраслях более тяжелые, чем в обрабатывающих, это определяет тенденцию перелива рабочей силы в обрабатывающие отрасли;

2.Сырьевые отрасли технологически менее развиты, это приводит к тенденции увеличения фондов в сырьевых отраслях, что компенсирует их меньшую фондоотдачу.

В условиях функционирования международного рынка фондосоздающий сектор отечественной экономики, обеспечивающий воспроизводственный процесс, должен получать ресурсы в сбалансированном виде, для сбалансированного использования трудового потенциала. Изменить эту структуру можно с помощью специальной государственной структурной политики, например, через стимулирование инвестиций в фондосоздающий сектор.

Список использованных источников

1. http://www. stat. kg / ru / opendata / category / 29 /

2. Новичков А.В. Методы прогнозирования динамики валового внутреннего продукта // Проблемы прогнозирования. – 2007. – №3. – С. 154–158.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Формат 60x84. Объем 18 п.л.
Заказ № 58. Тираж 100 экз.
Отпечатано в типографии «ДЭМИ»
Тел.: 59 17 97