MSC 54 E15, 54 C10

О РАВНОМЕРНО СВЯЗНЫХ, РАВНОМЕРНО СЦЕПЛЕННЫХ И РАВНОМЕРНО ПСЕВДОКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Борубаев А.А., Намазова Г.О., Бекболсунова А.Б.
Институт математики НАН КР, КГТУ им. И. Раззакова

Илимий макалада бир калыптуу байланыштуу, бир калыптуу чынжырлуу жана бир калыптуу псевдокомпактуу касиеттер бир калыптуу чагылдырууларга жайылтылган.

Урунттуу сөздөр: бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруунун базасы, бир калыптуу байланыштуу чагылдыруу, бир калыптуу чынжырлуу чагылдыруу, бир калыптуу псевдокомпактуу чагылдыруу.

В статье на равномерно непрерывные отображения переносятся свойства равномерно связных, равномерно сцепленных и равномерно псевдокомпактных пространств.

Ключевые слова: база равномерно непрерывного отображения, равномерно связное отображение, равномерно сцепленное отображение, равномерно псевдокомпактное отображение.

Равномерно связные пространства введены и исследованы американским математиком И. Джеймсом [1], а новые свойства равномерно связанных пространств рассмотрены в книге [2]. Равномерно сцепленные пространства для метрических пространств введено русским математиком Е.А. Гориным [3]. Понятие равномерно сцепленных пространств для равномерных пространств введено и изучено в книге [2]. Равномерно псевдокомпактные пространства также введены и исследованы в книге [2]. Интересные свойства равномерно псевдокомпактных пространств в случае максимальных равномерностей установленно В.В.Успенским [4].

Пусть $f:(X,U)\to(Y,\vartheta)$ - равномерно непрерывное отображения равномерного пространства в равномерное пространство (Y,ϑ) . Псевдоравномерность $B\subset U$ называется базой равномерно непрерывного отображения f, если для любого $\alpha\in U,$ существует $\beta\in\vartheta$ и покрытие $\gamma\in B$ также, что покрытие $f^{-1}\beta\wedge\gamma$ вписано в покрытие $\alpha.$ Другими словами $U=\sup\{f^{-1}\vartheta\wedge B\}$. Псевдоравномерное пространство (X,U) называется равномерно связанным, а псевдораномерность $U-$ равномерно связной, если псевдоравномерность U не содержит дизъюнктных покрытий, состоящих из не более чем одного элемента. Равномерно непрерывное отображения $f:(X,U) \to (Y,\vartheta)$ равномерного пространство (X,U) в равномерное пространтсво (X,U) называется равномерно связнным, если отображение f имеет равномерно связнную базу.

Лемма 1. Пусть $f:(X,U) \to (Y,\vartheta)$ и $g:(\gamma,\vartheta) \to (z,\mathcal{M})$ равномерно непрерывные отображения. Если U_0 база отображения f, а $\vartheta_0 -$ база отображения g, то $U_0 \wedge f^{-1}\vartheta_0$ будет базой отображения $g \cdot f:(X,U) \to (Z,\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть $f:(X,U) \to (Y,\vartheta)$ и $g:(Y,\vartheta) \to (z,\mathcal{M})$ - равномерно непрерывные отображения. Пусть U_0 - база f, а $\vartheta_0 -$ база отображения g. Покажем, что $U_0 \wedge f^{-1}\vartheta_0$ будет базой отображения $g \cdot f:(X,U) \to (z,\mathcal{m})$. Пусть $\alpha \in U$- произвольное покрытие. Тогда существует покрытия $B \in \vartheta$ и $\gamma \in U_0$, что покрытие $f^{-1}\beta \wedge \gamma$ вписано в покрытие α. Для покрытия $\beta \in \vartheta$ существуют также покрытия $\mathcal{m} \in \mathcal{M}$ и $\delta \in \vartheta_0$, что покрытие $g^{-1}\mathcal{m} \wedge \delta$ вписано в покрытие B. Тогда покрытие $f^{-1}(g^{-1}\mathcal{m} \wedge g)$ вписано в покрытие $f^{-1}B$. Значит, покрытие $(gf)^{-1}\mathcal{m} \wedge \{f^{-1}\delta \wedge \gamma\}$ вписано в покрытие α. Так как $f^{-1}\delta \wedge \gamma \in f^{-1}\vartheta_0 \wedge U_0$, то по определению $f^{-1}\vartheta_0 \wedge U_0$ является базой отображения $gf:(X,U) \to (z,\mathcal{m})$. Лемма 1 доказано.

Предложение 1. Композиция двух равномерно связных отображений снова является равномерно связным. Схема доказательства. Пусть $f:(X,U) \to (Y,\vartheta)$ и $g:(X,\vartheta) \to (Z,\mathcal{M})$ -равномерно непрерывные отображения. Пусть U_0 $-$равномерно связная база отображения f, а ϑ_0 $-$равномерно связная база отображения g. По лемме 1 $U_0 \wedge f^{-1}\vartheta_0$ является базой отображения $g \cdot f$. Легко видеть, что $U_0 \wedge f^{-1}\vartheta_0$ является равномерно связной базой отображения $g \cdot f$. Так как псевдоравномерности U_0 и ϑ_0 не имеют дизъюнктных покрытий, содержащих более одного элемента то система покрытий $U_0 \wedge f^{-1}\vartheta_0$ также не имеет дизъюнктных покрытий, состоящих не более одного элемента. Следовательно, отображения $g \cdot f$ является равномерно связным отображением. Предложения 1 доказано.

Легко видеть, что свойство равномерной связанности в сторону образа при равномерно непрерывном отображении.

Следующие предложение отвечает на вопрос при каких условиях свойство равномерной связанности сохраняется в сторону прообраза.

Предложения 2. Равномерная связанность сохраняется в сторону прообраза при равномерно связном отображении.

Схема доказательства. Пусть $f:(X,U)\to(Y,\vartheta)$ - равномерно связное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерно связное пространство (Y,ϑ). Пусть B −равномерно связная база отображения f. Так как $U=\sup\{f^{-1}\vartheta\wedge B\}$, то равномерность U не содержит дизъюнктных покрытий, содержащих более одного элемента. Следовательно, равномерное пространство. (X,U) является равномерно связным пространством. Предложения 2 доказано.

Понятие полных равномерно непрерывных отображений и пополнения равномерно непрерывных отображений и их свойства исследованы в книге [2].

Лемма 2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,\vartheta)$ - равномерно непрерывное отображения, а B −его база. Если $\tilde{f}:(\tilde{X},\tilde{U})\to(\gamma,\vartheta)$ −пополнение отображения f, то $\tilde{B}=\{\tilde{\alpha}:\alpha\in B\}$, где $\tilde{\alpha}=\{\tilde{X}[X\backslash A]\tilde{X}:A\in\alpha\}$ образует базу отображения $\tilde{f}$.

Доказательство не представляет труда.

Теорема 1. Пополнение равномерно связанного отображения снова является равномерно связным.

Схема доказательства. Пусть $f:(X,U)\to(Y,\vartheta)$ -равномерно связное отображения, а $\tilde{f}:(\tilde{X},\tilde{U})\to(X,Y)$ –пополнение равномерно связного отображения, $f=\tilde{f}/X$, $[X]=\tilde{X}$. Пусть $B-$ равномерно связная база отображение f. По лемме 2 система $\tilde{B}=\{\tilde{A}:\tilde{X}[X\backslash A]_{\lambda}:A\in\alpha\}$ является базой отображения f. Тогда по построению $\tilde{B}$ тоже не содержит дизъюнктное покрытие, содержащее более одного элемента. Следовательно, отображение $\tilde{f}$ является равномерно связным.

Лемма 3. Пусть $f_\alpha: (X_\alpha, U_\alpha) -$ семейство равномерно непрерывных отображений, а $B_\alpha -$ база отображения f_α, $\alpha \in A$. Тогда $B = \Pi\{B_\alpha: \alpha \in A\}$ является базой отображения $f = \Pi\{f_\alpha: \alpha \in A\}$.

Доказательство сводится к непосредственной проверке.

Теорема 2. Произведение любого семейства равномерно связных отображений снова является равномерно связным.

Схема доказательства. Пусть $f_\alpha: (X_\alpha, U_\alpha) \to (\gamma_\alpha, \vartheta_\alpha)$ семейство равномерных отображений, а B_α −равномерно связная равномерно связная база отображения f_α, $\alpha \in A$. Тогда произведение $\prod\{(X_2,\ B_2): \alpha \in A\}$ семейство равномерно связных пространств $\{(X_2 B_2): \alpha \in A\}$ снова будет равномерно связным (см.[2]). По лемме 3 система покрытий $B = \prod\{B_\alpha: \alpha \in A\}$ является базой отображения $f = \prod\{f_2 : \alpha \in A\}$. Следовательно, отображение f является равномерно связным. Теорема 2 доказано.

Конечная последовательность $\{A_1, \dots A_n\}$ подмножеств множества X называется сцепленной, если $A_i \cap A_{n-1} \neq \emptyset$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Псевдомерное пространство (X, U) называется равномерно сцепленным, если для любого покрытия $\alpha \in U$ существует такое натуральное число n, что ко всякой паре $x, y \in X$ можно подобрать такую сцепленную последовательность $\{A_1, A_2 \dots A_n\} \subset \alpha$ что $k \leq n$, $x \in A_1$ и $y \in A_k$.

Всякое предкомпактные псевдоравномерное пространство является равномерно сцепленным. Обратно, вообще говоря, неверно.

Равномерно непрерывное отображение $f: (X, U) \to (Y, \vartheta)$ называется равномерно сцепленным, если отображения имеет равномерно сцепленную базу.

Пример 1. Пусть m–бесконечный кардинат, S-множество мощности m и $I_s = I \times \{s\}$ для каждого $s \in S$, где $I = [0,1]$. Пологая $(x, s) \sim (y, s_2)$ тогда и только тогда когда $x = y = 0$ или $x = y$ и $s_1 = s_2$. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $U\{I_s : s \in S\}$. Легко установить, что формула

$$d_m(x, s_1), (y, s_2)) = \begin{cases} |x - y|, \text{если } s_1 = s_2 \\ |x + y|, \text{если } s_1 \neq s_2 \end{cases}$$

определяет метрику на множестве классов эквивалентности $\sim$. Это пространство называется «ежом колючести m» и обозначается через J_m (см.[5]) Пусть $\vartheta_m -$ равномерность на J_m, порожденная метрикой d_m . Нетрудно проверить, что равномерное пространство (J_m, ϑ_m) является равномерно сцепленным пространством. Нетрудно видеть, что при $m \geq \aleph_0$ равномерное пространство (J_m, ϑ_m) не является предкомпактным.

Если $g: (J_m, \vartheta_m) \to \{a\} -$ постоянное отображение, то g является равномерно сцепленным, но не является предкомпактным отображением. Понятие, равномерно предкомпактного отображения введено и исследовано в ([2]).

Пример 2. Пусть (Q, ϑ) –равномерное пространство рациональных чисел с естественной равномерностью ϑ. Нетрудно видеть, что равномерное пространство (Q, ϑ) является равномерно связным, но не является равномерно сцепленным пространством. Тогда постоянные отображение $f: (Q, \vartheta) \to \{a\}$ является равномерно связным, но не равномерно сцепленным отображением.

С помощью леммы 1, 2 и 3 легко доказываются, следующие свойства равномерно сцепленных отображений:

1. Композиция двух равномерно сцепленных отображений является равномерно сцепленным отображением.
2. Пополнение равномерно сцепленного отображения является равномерно сцепленным отображением.
3. При равномерно сцепленных отображениях свойство равномерной сцепленности сохраняется как в сторону образа так и в сторону прообраза.
4. Произведение любого семейства равномерно сцепленных отображений является равномерно сцепленным.

Псевдоравномерное пространство (X, U) называется равномерно псевдокомпактным, если всякая равномерно непрерывная вещественная функция на (X, U) является ограниченной равномерно псевдокомпактные пространства введены и исследованы в [2].

Равномерно непрерывные отображение $f: (X, U) \to (Y, \vartheta)$ равномерного пространства в равномерное пространство (X, U) называется равномерно псевдокомпактным, если отображение f имеет равномерно псевдокомпактную базу.

Заметим, что всякая равномерно непрерывное вещественная функция на равномерно сцепленном пространстве является ограниченной (см.[2]), следовательно, всякое равномерно сцепленное отображение является равномерно псевдокомпактным. Обратное, вообще говоря неверна.

Пример 3. Пусть Е $-$ единичный замкнутый шар гильбертова пространства ℓ_2, а $\vartheta -$ равномерность на Е, индуцированная метрикой d гильбертова пространства $\ell_{2.}$ Тогда равномерное пространство (E, ϑ) является равномерно псевдокомпактным, но не является предкомпактным. Действительна, пусть $f -$вещественная равномерно непрерывная функция на (E, ϑ). Тогда для $\mathcal{E} = 1$, найдется такое число δ, что $\alpha(x, y) \leq \delta$ влечет $|f(x) - f(y)| \leq 1$ для всех $x, y \in E$. Тогда $|f(x)| \leq |f(0)| + 1 + \frac{1}{\delta}$ для всех $x \in E$. Следовательно, равномерное пространство (E, ϑ) является равномерно псевдокомпактным. Заметим, что равномерное пространство (E, ϑ) не является равномерно сцепленным.

С помощью леммы 1 и 2 следующие свойства равномерно псевдокомпактных пространств:

1. Композиция двух равномерно псевдокомпактных отображений является равномерно псевдокомпактным.
2. Пополнение равномерно псевдокомпактного отображения является равнмерно псевдокомпактным.

3. При равномерно псевдокомпактных отображениях свойство равномерной псевдокомпактности сохраняется как в сторону образа и так в сторону прообраза.

Теорема 3. Равномерное непрерывное отображения является равномерно сцепленным тогда и только тогда, когда оно одновременно является равномерно связным и равномерно псевдокомпактным.

Доказательство следует из определений равномерной сцепленности, равномерной связности, равномерной псевдокомпактности и теоремы 1.5.23 из книги [2].

Список использованных источников.

1. James I.M. Topological and Uniform Spaces. Springer, New York, 1987.
2. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек, Издательство «Наука», 2013.
3. Е. А. Горин, "О равномерно-топологическом вложении метрических пространств в евклидовы и гильбертово пространства", *УМН*, **14**:5(89) (1959), 129–134.
4. *В. В. Успенский,* "Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций", УМН, **37**:4(226) (1982), с.183–184.
5. Энгелькинг Р. Общая топология. Изд-во «Мир», 1986.

2010 MSC: 37D99, 37H20

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУБОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ СИСТЕМНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ МВМВ СИСТЕМ

Оморов Р.О.

Институт физики им. акад. Ж. Жеенбаева НАН КР

Макалада топологиялык сезбестик усулунун негиздери жана аны көпченемдүү системалардын ("көпченемдүү кириш-көпченемдүү чыгыш" ("КККЧ") бузулуусунун маселесин чечүүгө колдонуусу каралат. Андронов-Понтрягин боюнча сезбестик түшүнүгүнүн негизинде иштелип чыккан топологиялык сезбестик усулу динамикалык системалардын сезбестигин ченөөгө жана алардын параметрлери өзгөрүлгөндөгү бифуркацияларды алдын ала аныктоого мүмкүнчүлүк түзөт. КККЧ системаларынын бузулуу маселесин системалык бузулуу жагдайында чечмеленет. Көпченемдүү системалардын бузулуу маселесинде топологиялык сезбестик усулун, өзгөчө түзсызыктуу эмес татал топологиялуу көптөгөн тендеш абалдары, циклдери жана башка аттракторлору бар фазалык мейкиндиктүү системаларга колдонуу мүмкүнчүлүктөрү көрсөтүлөт.

Урунтуу сөздөр: топологиялык сезбестик, көпченемдүү система, системалык бузулуу, системалардын бифуркациялары, матрицалардын шартоо саны.

Рассматриваются основы метода топологической грубости и его применение для решения задачи вырождения многомерных систем МВМВ («многомерный вход – многомерный выход»). Метод топологической грубости основанный на базе понятия грубости по Андронову-Понтрягину, позволяет оценивать грубость динамических систем, а также прогнозировать их бифуркации при изменениях параметров. Задача вырождения определяется в постановке системного вырождения систем МВМВ. Приведены возможности использования метода топологической грубости в задаче вырождения многомерных систем, в особенности для определения вырождения нелинейных многомерных систем со сложной топологией фазового пространства со множеством состояний равновесия, предельных циклов и иных аттракторов.

Ключевые слова: топологическая грубость, многомерная система, системное вырождение, бифуркация систем, число обусловленности матриц.

Basic of a method of topological roughness and its application for a solution of a problem of degeneration of the MIMO multidimensional systems are considered ("a multidimensional input – a multidimensional output"). The method of topological roughness based on base of a concept of roughness according to Andronov-Pontryagin allows to estimate roughness of dynamic systems and also to predict their bifurcations at changes of parameters. The problem of degeneration is defined directed by system degeneration of the MIMO systems. Possibilities of use of a method of topological roughness are given in a problem of degeneration of multidimensional systems, in particular for definition of degeneration of nonlinear multidimensional systems with difficult topology of phase space with a set of statuses of balance, limit cycles and other attractors.

Keywords: topological roughness, multidimensional system, system degeneration, bifurcation of systems, number of conditionality of matrixes.

Введение. Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1 – 3].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»; 2) на основе понятия грубости по Андронову – Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε– близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4].

В работе [5] на базе понятия грубости по Андронову – Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем [6], а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [7 - 9]. При этом следует отметить, что в научной литературе различных дисциплин встречаются разное понимание терминов «грубость» и «робастность». Чаще всего термин «грубость» применяется в математических дисциплинах, изучающих динамические системы, где, как правило, рассматриваются изменения в системе при малых аддитивных или мультипликативных возмущениях, а термин «робастность» как правило применяется в научных дисциплинах, связанных с техническими приложениями, в частности, в теории и практике систем управления, где предполагается конечные возмущения без предположения их малости.

О природе задачи вырождения многомерных систем и технологии (алгоритме) количественной оценки склонности к вырождению обстоятельно представлено в работе [10]. При этом, «вырождение» многомерных систем определено как «снижение или даже потеря их работоспособности». Также в этой работе выделены три вида постановки рассматриваемой задачи вырождения: функциональную, системную и физическую (материальную). Далее, представлен алгоритм (технология) количественной оценки склонности к системному вырождению, который разработан на базе сингулярного разложения специально конструируемых критериальных матриц.

В данной статье ставится задача применения «метода топологической грубости» для задачи вырождения многомерных систем МВМВ в системной постановке.

Топологическая грубость динамических систем. В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А.Пуанкаре, в частности термин «бифуркация» впервые введен им и означает дословно «раздвоение» или иначе от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется, как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии «бифуркация» употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем. Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства).

Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А.Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, которое впоследствии, названо понятием грубости по Андронову-Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) *n*-го порядка

$$\dot{z}(t) = F(z(t)), \qquad (1)$$

где $z(t) \in R^n$ - вектор фазовых координат (далее обозначение времени *t*, если не оговорено, для краткости опускаем), F – n – мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову – Понтрягину в некоторой области G если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$, области G:

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \qquad (2)$$

где $f(\tilde{z})$ – дифференцируемая малая по какой либо норме $\|\cdot\|$ n – мерная вектор-функция, являются ε – тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε – тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n – мерном фазовом пространстве также, что $D, \subset \tilde{D} \subset \tilde{G} \subset G$

$$\exists \varepsilon, \delta > 0 :$$

$$\text{если} \qquad \| f(\tilde{z}) \| < \delta,$$

$$| df_i(\tilde{z}) / d\tilde{z}_j | < \delta, \qquad i, j=\overline{1, n},$$

$$\text{то} \qquad | \| z \| - \| \tilde{z} \| | < \varepsilon,$$

или $\quad (\tilde{D},(2)) \equiv (D, (1)),$ (3)

иначе, разбиение областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε – тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову-Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек, особых линий, замкнутых траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [5] на основе понятия грубости по Андронову-Понтрягину предложены основы «метода топологической грубости» на базе меры грубости в виде числа обусловленности. $C\{M\}$ – матрицы M - нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь же, впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости систем, на отношениях пары δ и ε.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется теоремой 1, доказанной в работе [5].

Теорема 1. Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (z_0) была максимальна грубой, а в окрестности негиперболической –минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:

$$M^* = \operatorname{argmin} C\{M\},$$

где M - матрица приведения линейной части A системы (1) в особой точке (z_0) к диагональному (квазидиагональному) базису, $C\{M\}$- число обусловленности матрицы M.

Теоретические результаты «метода топологической грубости», полученные в работах [5, 7 - 9], позволяют управлять грубостью синергетических систем, соответствующая теорема доказана в работе [5].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев разработанных в работах [7, 8]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В диссертационной работе автора [7] доказана соответствующая теорема.

Приложение метода топологической грубости к задаче системного вырождения МВМВ систем (многомерных систем). В работе [10] рассмотрены базовые концепции контроля вырождения многомерных динамических систем. Предложены функционалы вырождения, построенные на спектре сингулярных чисел матриц систем, приведенных к линейной алгебраической задаче. Далее, определены критериальные матрицы D_0 , D_1 , D_2 соответственно по полиномиальному входному воздействию, скорости и ускорению изменения этого воздействия на рассматриваемую многомерную линейную систему в постановке модели «вход-выход».

Таким образом, в работе [10] решается задача контроля вырождения линейной системы «многомерный вход-многомерный выход» с применением аппарата сингулярных чисел матриц, применяя соотношения сингулярных чисел σ_i, $i=1,2,..,n$, упорядоченных по возрастанию к максимальному сингулярному числу $\sigma_{\max}$. При этом функционал, названный глобальным функционалом вырождения представляет собой спектральное число обусловленности критериальной матрицы. Последующие функционалы вырождения σ_i / $\sigma_{\max}$ представляют отношения величин соответствующих полуосей эллипсоида сингулярных чисел (сингулярного эллипсоида) к величине максимальной полуоси этого эллипсоида, т.е. множество функционалов вырождения $\{\sigma_i / \sigma_{\max}\}$ характеризует в целом деформацию единичной сферы, отображаемой вдоль осей эллипсоида.

Если теперь рассмотреть задачу вырождения линейных многомерных систем с применением метода топологической грубости, то мы констатируем что согласно теореме о бифуркациях [7, 8, 9], при вырождении любого из осей сингулярного эллипсоида происходит бифуркация топологии системы. Поэтому следует ожидать, что вырождения последующих осей эллипсоида предопределяют «усиление» глобальной бифуркации, т.е. усложнение постбифуркационной топологии системы.

Следует отметить, что использование метода топологической грубости для решения задачи вырождения будет особенно эффективно при рассмотрении нелинейных многомерных систем, когда требуется определять вырождения систем со сложной топологией со множеством состояний равновесия (особых точек), предельных циклов и иных аттракторов (многообразий). При этом, в отличие от прямой постановки задачи определения вырождения по линейной алгебраической задаче, в [10] через матрицы D_0 , D_1, D_2 предлагается перейти к нелинейной постановке задачи через соответствующие матрицы приведения к диагональному (квазидиагональному) виду M_0 , M_1 , M_2 и ограничиться определением вырождения через глобальный функционал вырождения $C_i\{M\}$, i =1,2,3.

Заключение. Задача вырождения относительно новая задача в теории многомерных систем управления. Вследствие новизны и неизученности различных подходов к этой задаче актуальность интереса к ней очевидна. Полагаем перспективность применения к задаче системного вырождения многомерных систем, метода топологической грубости, в особенности для нелинейных многомерных систем.

Список использованных источников

1. Андронов, А.А., Понтрягин, Л.С. Грубые системы // Докл.АН СССР. 1937. Т.14. №5. С. 247 -250.

2. Аносов Д. В. Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сборник обзорных

статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР.Т.169). М.: Наука, 1985. С. 59-93.

3. Джури, Э.И. Робастность дискретных систем //Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С.3-28.

4. Piexoto, M.M. On structural stability // Ann. .Math, 1959. V.69, № 1. P. 199 – 222.

5. Оморов, Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. №8. С. 36-45.

6. Хакен, Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. – 423 с.

7. Оморов, Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Диссертация доктора технических наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992. - 188 с.

8. Оморов, Р.О. Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. 1997. № 2. С. 26-36.

9. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. – 288 с.

10.Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Технология количественной оценки склонности систем многомерного управления к вырождению // Автометрия. 2010. 46, № 2. С. 20-26.

MSC 54F45

СРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И РАЗМЕРНОСТИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОКРЫТИЯМИ ПРОСТРАНСТВ

Панков П.С., Жораев А. Х.

Институт математики НАН КР, Кыргызско-Узбекский университет

Мейкиндикте бир учу кыймылсыз кесиндини жылдыруу аркылуу кинематикалык эки ченемдүү мейкиндиктин аныктамасы берилет. Бул макалада кинематикалык эки ченемдүүлүктүн болуусунун жабуулар аркылуу аныкталган эки ченемдүүлүк натыйжасы катары далилденген. Жалпысынан, кайтыш айтканы туура эмес.

Урунттуу сөздөр: топологиялык мейкиндик, кинематикалык мейкиндик, кыймылдоо, ченем

Через движение отрезка с фиксированным концом в пространстве нами было дано определение кинематической 2D-размерности пространства. В статье показано, что из наличия кинематической 2D-размерности следует наличие 2D-размерности, определенной покрытиями. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Ключевые слова: топологическое пространство, кинематическое пространство, движение, размерность

The definition of the kinematical 2B-dimensionality of a space was given by us by means of motion of a segment with a fixed end-point. This work demonstrates that existence of the kinematical 2B-dimensionality implies existence of the 2B-dimensionality defined by coverings. The reverse statement is not true in general case.

Keywords: topological space, kinematical space, motion, dimension

1. Введение. В [1] было введено понятие кинематического (к-) пространства на основе движения одной точки в топологическом (т-) пространстве. Оно дало возможность представить на компьютере в интерактивном режиме различные известные в математике неэвклидовы пространства [2], [3]. С использованием движения более сложных объектов в [5] предложено новое понятие «ориентационной, или кинематической размерности» пространства. В настоящей работе это определение сравнивается с ранее известным определением размерности пространства.

2. Известные определения и результаты. Определение 1. Dim-размерность. Если для метрического (м-)пространства (X, ρ) существуют сколь угодно мелкие открытые (или замкнутые) (о- или з-) покрытия кратности $(n+1)$, то $Dim(X)\leq n$; если также не существуют такие покрытия кратности n, то его $Dim(X)=n$.

Определение 2. Замкнутое (з-)множество C называется перегородкой между множествами A и B, $A \cap B=\varnothing$, в т-пространстве X, если о-множество $X\backslash C$ есть объединение двух о-множеств $A_1 \supset A$ и $B_1 \supset B$, $A_1 \cap B_1=\varnothing$.

Ind-размерность определяется по индукции. $Ind(\varnothing) = -1$. Если для любых двух з-множеств т-пространства X, имеющих пустое пересечение, существует «перегородка» Z, $Ind(Z) \le n-1$, то $Ind(X) \le n$; если неверно, что "$Ind(X) \le n-1$", то $Ind(X) = n$.

Для М-пространств эти два определения эквивалентны.

<u>Определение 3</u> [1]. *Кинематическое (к-)пространство* - это пара: множество G точек и множество K *маршрутов*. Каждый маршрут M – это пара: число $T_M > 0$ (*время* маршрута) и функция m_M: $[0, T_M] \to G$ (*траектория* маршрута). Выполняются следующие аксиомы.

(K1) Для любых точек $z_0 \ne z_1$ в G существует такой маршрут $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких маршрутов M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$, то также $\{T_M, m_M(T_M - t)\} \in K$ {всегда возможно движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то также: $\{T^*, m^*(t) \equiv m_M(t)(0 \le t \le T^*)\} \in K$ {можно остановиться в любой момент}.

Маршруты, существующие в силу этой аксиомы, называются *подмаршрутами* маршрута M.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1)=m_2(0)$, то пара: число $T_{12} = T_1 + T_2$ и функция $m_{12}(t) = m_1(t)$ $(0 \le t < T_1)$; $m_{12}(t) = m_2(t-T_1)$ $(T_1 \le t \le T_1+T_2)$ также является маршрутом из K {транзитивность}.

Для любой функции - траектории маршрута m_M: $[0, T_M] \to G$ множество ее значений называется *линией*. Несамопересекающаяся линия называется *отрезком*.

Если в (K1) точное нижнее значение всегда достигается, то к-пространство называется *плоским*.

3. Определение движения множества в пространстве. Нами предложены [5], как особые случаи гомотопии:

Определение 5. Пусть в т-пространстве G задано связное множество P. Говорится, что непрерывное отображение $F:P\times[0,T] \rightarrow G$ осуществляет *движение* множества P, если для фиксированного $t\in[0, T]$ отображение $F(z,t):P\rightarrow G$ является инъективным и $F(P,t)$ гомеоморфно P.

Для подклассов класса т-пространств соответственно гомеоморфизм заменяется на изоморфизм в соответствующем пространстве.

Для большей гибкости для м-пространств нами было предложено

Определение 6. Два ограниченных м-пространства (два множества м-пространства) A и B называются $[\alpha,\beta]$-подобными $(0<\alpha<1<\beta)$, если существует биективное отображение $f:A\rightarrow B$ такое, что $\rho_B(f(x),f(y))\in [\alpha,\beta]\rho_A(x,y)$ и $\rho_A(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\in [\alpha,\beta]\rho_B(x,y)$.

Соответственно, в м-пространстве нами введено понятие *обобщенное движение с сохранением* $[\alpha,\beta]$*-подобия.*

Определение 7. Говорится, что в к-пространстве непрерывное отображение (движение) $F:P\times[0,T] \rightarrow G$ осуществляет *обобщенный поворот* множества P вокруг его подмножества C, если

1) для всех $t\in[0, T]$ и $z\in C$ будет $F(z,t)\equiv z;$

2) для всех $t\in[0, T]$ и $z\in P\backslash C$ сужение $F:\{z\}\times[0,T]\rightarrow G$ будет маршрутом без самопересечений с начальной точкой $z;$

3) для всех $t_1, t_2\in[0, T)$ и $z_1\neq z_2\in P$ будет $F(z_1, t_1) \neq F(z_2, t_2);$

4) для всех $z\in P\backslash C$ будет $F(z,0)\neq F(z,T);$

5) для всех $t\in[0, T]$ $F(z,P)$ *будет* $[\alpha,\beta]$*-подобно* $P;$

6) множество $F(P,T)$ совпадает с множеством P.

Подмножество C называется *осью поворота***.**

Возможность обобщенного поворота множеств некоторого типа обозначает нижнюю границу для размерности пространства, а невозможность -

верхнюю границу.

Определение 8. Говорится, что непрерывное отображение (движение) $F:P\times[0,T] \to G$ осуществляет *обобщенный поворот* множества P в множество Q вокруг их общего подмножества C, если в Определении 7, п. 6) заменяется на

6) множество $F(P,T)$ совпадает с множеством Q.

Определение 9. Если для некоторого числа $d>0$ существует такой «отрезок» z_1-z_0-z_2 и его обобщенный поворот в отрезок z_2-z_0-z_1, что для всех $t\in[0, T_{12}]$ будет $\rho_K (m_1(t), m_2(t))\geq d, \rho_K (z_0, m_1(t))\leq d, \rho_K (z_0, m_2(t))\leq d,$

то говорится, что *сплошная ширина* (ориентационной размерности 2) кинематического пространства не меньше d.

Определение 10. Если никакое з-множество в к-пространстве не имеет сплошной ширины, то говорится, что ориентационная размерность такого пространства равна 1.

Определение 11. Если какое-нибудь з-множество в к-пространстве имеет сплошную ширину, но ни в каком таком множестве «треугольник» $z_1z_2z_3$ не может быть переведен обобщенным поворотом в «треугольник» $z_1z_3z_2$, то говорится, что ориентационная размерность такого пространства равна 2.

На основе Определений 10 и 11 введено

Определение 12. (По индукции) Если в пространстве существует множество P с ориентационной размерностью n и его можно повернуть вокруг оси $C\subset P$ с ориентационной размерностью $(n-1)$, то говорится, что ориентационная размерность пространства не меньше $(n+1)$.

Если высказывание «ориентационная размерность пространства не меньше $(n+2)$» неверно, то говорится, что ориентационная размерность пространства равна $(n+1)$.

В эвклидовых пространствах и их подпространствах обобщенный поворот совпадает с поворотом в геометрическом смысле. В эвклидовых пространствах все три Определения 1, 2 и 12 дают одинаковый результат.

Известно определение односвязного пространства - любой путь, начало которого совпадает с концом, может быть непрерывно стянут в точку.

Вместе с тем, например, 3D-сфера, как и 3D-шар, являются односвязными. Но для определения к-размерностей они различны. Поэтому мы предлагаем, для определения внутреннего различия (без объемлющего пространства) таких объектов 3D-сфера, как и 3D-шар,

Определение 12. Если любое подмножество т-пространства может быть гомеоморфно стянуто в точку, то такое пространство называется полностью односвязным.

Таким образом, nD-сферы не являются полностью односвязными, а nD-шары являются, $n \geq 2$.

4. Сравнение определений размерностей

Теорема 1. Если к-пространство получено обобщенным поворотом отрезка P вокруг одного из его концов C (ориентационная размерность 2), то его Dim-размерность также равна 2.

Доказательство (кратко). Обозначим длину отрезка через L, противоположный конец - через D, длину, пройденную точкой D, через W. По заданному $\varepsilon>0$ найдем такое натуральное n, что $2W\beta/\varepsilon < n$, $L\beta/\varepsilon < n$.

Разделим отрезок точками $\{C, d_1, d_2, \ldots, d_n = D\}$ на n одинаковых по длине частей и линию W точками $\{w_1, w_2, \ldots, w_{2n} = D\}$ - на $2n$ одинаковых по длине частей. Получим $2n^2$ «участков», которые будем считать вместе с границами, то есть замкнутыми. Проведем в соответствии с функцией F через точки $\{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}\}$ линии $\{W_1, W_2, \ldots, W_{n-1}\}$, «параллельные» линии W, и отрезки через точку C и точки $\{w_1, w_2, \ldots, w_{2n}\}$. Объединим все участки внутри линии W_1 и последовательно «четные» и «нечетные» пары между линиями W_1 и W_2, W_2 и $W_3, \ldots, W_{n-1}$ и W. Так получаем замкнутое, сколь угодно мелкое покрытие кратности 3. То есть, Dim-размерность равна 2.

Обратное, вообще говоря, неверно. Рассмотрим эвклидову 2D-плоскость и исключим все точки, у которых обе координаты - иррациональные числа. Тогда *Dim*-размерность остается равной 2, а никакая кинематическая размерность не существует.

Можно видеть, что это возникает вследствие того, что построенное пространство не является полным.

Другой пример: возьмем всюду плотную последовательность точек в 2D-плоскости и исключим эти точки с их уменьшающимися и взаимно непересекающимися открытыми окрестностями. Тогда получаем полное пространство, в котором никакая кинематическая размерность не существует. Вместе с тем, это пространство не является односвязным.

Аналогичное построение в 3D-пространстве дает односвязное пространство. Поэтому возникает гипотеза, что для наличия кинематической размерности требуется полная связность.

Список использованных источников

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.

2. Борубаев А.А., Панков П.С. Кинематическое изображение топологических пространств, представляемых в виде склейки // Вычислительные технологии (изд. СО РАН). – 1999, том 4, № 5. – С. 3-9.

3. Борубаев А.А., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings. – Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, Budapest, 2003. – 169 p.

4. Жораев А.Х. Исследование топологических пространств кинематическим методом. – Saarbrűcken, Deutschland: Lap Lambert Academic Publishing, 2017. – 78 с.

5. Жораев А. Х. Индуктивное определение кинематической размерности топологических пространств // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 139-144.

MSC 45A05, 45B 05

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТИЛТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Асанов А., Каденова З.А.

Кыргызско-Турецкий Университет Манас, ИМ НАН КР

Бул макалада өсүүчү функциянын туундусу жана тескери эмес квадраттык формалар методунун жардамында биринчи түрдөгү эки өзгөрүлмөлүү Стильтьесанын сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классы үчүн чечимдеринин жалгыздыгы теоремасы далилденди.

Урунттуу сөздөр: сызыктуу интегралдык теңдеме, биринчи түрдөгү, эки өзгөрүлмөлүү, жалгыздыгы.

В данной работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции и методом неотрицательных квадратичных форм доказывается единственность решений для одного классе линейных интегральных уравнений Стильтьеса первого рода с двумя независимыми переменными.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения, первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность.

In the present article the theorem about uniqueness of the linear integral equations Stielties of the first two independent variables with method of nonnegative quadratic forms and the consept of derivative with respect to increasing function.

Keywords: linear inteqral equations, first kind, two variables, uniqueness.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^T H(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$= f(t,x),(t,x)\in G, \qquad G=\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t\le T,\ a\le x\le b\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x), \psi(t)$

являются строго возрастающие непрерывные функции соответственно в области

$$[a,b], [t_0,T],$$

$$K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y), & t_0\le t\le T, \quad a\le y\le x\le b; \\ B(t,x,y), & t_0\le t\le T, \quad a\le x\le y\le b, \end{cases} \tag{2}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases} M(t,x,s), & t_0 \le s \le t \le T, \quad a \le x \le b; \\ N(t,x,s), & t_0 \le t \le s \le T, \quad a \le x \le b. \end{cases} \qquad (3)$$

$A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $M(t,x,s)$, $N(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y): \quad t_0 \le t \le T, \quad a \le y \le x \le b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y): \quad t_0 \le t \le T, \quad a \le x \le y \le b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s): \quad t_0 \le s \le t \le T, \quad a \le x \le b\};$$
$$G_4=\{(t,x,s): \quad t_0 \le t \le s \le T, \quad a \le x \le b\};$$
$$G_5=\{(t,x,s,y): \quad t_0 \le s \le t \le T, \quad a \le y \le x \le b\}.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$. Решение $u(t,x)$ ищется в $L^2{}_{\varphi,\psi}(G)$,

где $\nu(t,x)\in L^2{}_{\varphi,\psi}(G)$

тогда и только тогда когда $\int\limits_G \left|\nu(t,x)\right|^2 d\phi(x)d(t)<\infty$.

Различные вопросы интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1-8] и [10-11]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [6], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [1] для линейных интегральных уравнений Вольтерры первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование, многопараметрического семейства решений. В [4] изучены вопросы регуляризации и единственности решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В работах [10-11] с помощью понятия производной по возрастающей функции [9] изучены скалярные и системы интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого и третьего рода.

Обозначим

$$
\begin{cases}
P(s,y,z) = A(s,y,z) + B(s,z,y), & (s,y,z) \in G_1, \\
Q(s,y,\tau) = M(s,y,\tau) + N(\tau,y,s). & (s,y,\tau) \in G_3.
\end{cases}
\tag{4}
$$

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $P(s,b,a) \in C[t_0,T],\ P(s,b,a) \geq 0,$ для любого $t \in [t_0, T]$,

$P'_{\phi(y)}(s,y,a) \in C(G),\quad P'_{\phi(y)}(s,y,a) \leq 0, \forall\ (s,y) \in G,$

$P'_{\varphi(z)}(s,b,z) \in C(G),\ \ P'_{\varphi(z)}(s,b,z) \geq 0,\ \forall\ (s,z) \in G,$

$P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z) \in C(G_1),\quad P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z) \leq 0,\ \forall\ \ (s,y,z) \in G_1,$

$Q(T,y,t_0) \in C[a,b],\ Q(T,y,t_0) \geq 0,\ \forall\ \ y \in [a,b],$

$Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0) \in C(G),\ Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0) \leq 0,\ \forall\ \ (s,y) \in G,$

$Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau) \in C(G),\ \ Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau) \geq 0,\ \ \forall\ (y,\tau) \in G,$

$Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau) \in C(G_3),\ \ Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau) \leq 0\, \forall\ \ (s,y,\tau) \in G_3.$

и для любого

$v(t,x) \in L^2_{\varphi,\psi}(G),$

$\int\limits_a^x A(t,x,y)v(t,y)d\phi(y),\quad \int\limits_x^b B(t,x,y)v(t,y)d\phi(y),\quad \int\limits_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)d\psi(s),$

$\int\limits_t^T N(t,x,s)v(s,x)d\psi \in L^2_{\varphi,\psi}(G),$

где $C[t_0,T],\ C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$ -пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,T],\ G, G_1$ и G_3.

2) $C(T,b,t_0,a) \geq 0$,

$C'_{\psi(s)}(s,b,t_0,a) \in C[t_0,T],\ C'_{\psi(s)}(s,b,t_0,a) \leq 0, \forall\, s \in [t_0,T],$

$C'_{\psi(\tau)}(T,b,\tau,a) \in C[t_0,T],\ C'_{\psi(\tau)}(T,b,\tau,a) \geq 0\,, \forall\ \tau \in [t_0,T],$

$C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a) \in C[a,b],\ \ C'_{\varphi(y)}(T,y,t_0,a) \leq 0,\ \forall\ \ y \in [a,b],$

$C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z) \in C[a,b],\ C'_{\varphi(z)}(T,b,t_0,z) \geq 0,\ \forall\ \ z \in [a,b],$

$C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\in C(G),\ C''_{\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,a)\ge 0,\forall\ (s,y)\in G,$

$C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(y)}(T,y,\tau,t_0)\le 0,\forall\ (y,\tau)\in G,$

$C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\in C(G),\ C''_{\varphi(z)\psi(s)}(s,b,t_0,z)\le 0,\forall\ (s,z)\in G,$

$C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\in C(G),\ C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(T,b,\tau,z)\ge 0,\forall\ (\tau,z)\in G,$

$C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,a)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,a)\ge 0,\forall\ (s,y,\tau)\in G_3,$

$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\in C(G_3),\ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)}(s,b,\tau,z)\le 0,\forall\ (s,z,\tau)\in G_3,$

$C'''_{\varphi(z)\psi(z)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\in C(G_1),\ \ C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,t_0,z)\ge 0,\forall\ (s,y,z)\in G_1,$

$C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\in C(G_1),\ \ C'''_{\psi(\tau)\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,\tau,z)\le 0,\forall\ (\tau,y,z)\in G_1,$

$C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\in C(G_4),\ C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}(s,y,\tau,z)\ge 0,\forall\ (s,y,\tau,z)\in G_4,$
$C''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,b,\tau,a)\in C(G_5),\ C''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,b,\tau,a)\le 0,\forall\ (s,\tau)\in G_5=$
$=\{(s,\tau): t_0\le\tau\le s\le T\},$

$C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\in C(G_6),\ C''_{\varphi(z)\varphi(y)}(T,y,t_0,z)\le 0,\forall\ (y,z)\in G_6=$
$=\{(y,z): a\le z\le y\le b\}.$

3) При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(\psi(s)-\psi(t_0))(\varphi(y)-\varphi(a))}\left(-P'_{\phi(y)}(s,y,a)\right)\alpha_1^2+$$

$$+\frac{1}{(\psi(s)-\psi(t_0))(\varphi(y)-\varphi(a))}\left(-Q'_{\phi(y)}(s,y,t_0)\right)\alpha_2^2+$$
$$+\frac{2}{(\psi(s)-\psi(t_0))(\varphi(y)-\varphi(a))}\left(-C(s,y,t_0,a)\right)\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{\varphi(y)-\varphi(a)}\left(-Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau)\right)\alpha_3^2+\frac{2}{\varphi(y)-\varphi(a)}\left(-C'_{\psi(\tau)}(s,y,\tau,a)\right)\alpha_3\alpha_1+$$

$$+\frac{2}{\psi(s)-\psi(t_0)}\left(-C'_{\phi(z)}(s,y,t_0,z)\right)\alpha_2\alpha_4+\frac{1}{\psi(s)-\psi(t_0)}\left(-P''_{\phi(z)\phi(y)}(s,y,z)\right)\alpha_4^2+$$
$$+\left(-2C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(s,y,\tau,z)\right)\alpha_3\alpha_4\ge 0;$$

4) Если при почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется, хотя бы, один из следующих условий:

1) $\alpha_1=0$; 2) $\alpha_2=0$; 3) $\alpha_3=0$; 4) $\alpha_4=0$.

Теорема Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (1) единственно в классе $L^2_{\varphi,\psi}(G)$.

Доказательство. В силу (2), (3) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)d\varphi(y)+\int_{t_0}^t M(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+$$

$$+\int_t^T N(t,x,s)u(s,x)d\psi(s)+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=f(t,x).\ (t,x)\in G. \qquad (5)$$

Обе части уравнения (5) умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y A(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_y^b B(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(s)d\varphi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s M(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\phi(y)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_s^T N(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\psi(s)d\phi(y)= \qquad (6)$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\phi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\phi(y)=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy.$$

Применяя формулу Дирихле и учитывая обозначения (4), из (6) получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\phi(z)d\phi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_{t_0}^T\int_a^b\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\psi(\tau)d\phi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)=\int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)d\psi(s)d\varphi(y). \quad (7)$$

Преобразуем каждый из интегралов левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, для первого интеграла получим

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)d\varphi(z)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)dz\, u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=-\int_{t_0}^T\int_a^b\left\{P(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)\Big|_a^y-\int_a^y P'_{\phi(z)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)d\varphi(z)\right\}\times$$

$$\times u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P(s,y,a)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2\right]d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_z^b P'_{\phi(z)}(s,y,z)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2\right]d\varphi(y)d\varphi(z)d\psi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\left[P(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2\right]\Big|_a^b d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P'_{\phi(y)}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2 d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\left[P'_{\varphi(z)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2\right]\Big|_z^b d\varphi(z)d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_z^b P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\varphi(\nu)\right)^2\varphi(y)d\varphi(z)d\psi(s)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)\,d\varphi(\nu)\right)^2 d\psi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P'_{\varphi(y)}(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)\,d\varphi(\nu)\right)^2 d\varphi(y)\,d\psi(s)+ \tag{8}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P'_{\varphi(z)}(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)\,d\varphi(\nu)\right)^2 d\varphi(z)\,d\psi(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P''_{\varphi(z)\varphi(y)}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)\,d\varphi(\nu)\right)^2 d\varphi(z)\,d\varphi(y)\,d\psi(s);$$

где $P_{\varphi(z)}{}'(t,x,z)$, $P'_{\varphi(x)}(t,x,z)$ частные производные по $\varphi(z)$ и $\varphi(x)$ соответственно.

Аналогично этому, для второго интеграла имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} Q(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)\,d\psi(\tau)\,d\psi(s)\,d\varphi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b Q(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{T} u(\xi,y)\,d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T} Q'_{\psi(s)}(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)\,d\psi(\xi)\right)^2 d\psi(s)\,d\varphi(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T} Q'_{\psi(\tau)}(T,y,\tau)\left(\int_\tau^{T} u(\xi,y)\,d\psi(\xi)\right)^2 d\psi(\tau)\,d\varphi(y)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} Q''_{\psi(\tau)\psi(s)}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^{s} u(\xi,y)\,d\psi(\xi)\right)^2 d\psi(\tau)\,d\psi(s)\,d\varphi(y). \tag{9}$$

Для преобразования третьего интеграла, используем соотношение

$$C\nu''_{\psi(\tau)\varphi(z)}=(C\nu)''_{\psi(\tau)\varphi(z)}-\left(C'_{\psi(\tau)}\nu\right)'_{\varphi(z)}-\left(C'_{\varphi(z)}\nu\right)'_{\psi(\tau)}+C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}\nu.$$

Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s}\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)\,d\varphi(z)\,d\psi(\tau)\,d\varphi(y)\,d\psi(s)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)\frac{\partial^2}{\partial\psi(\tau)\partial\varphi(z)}\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\nu d\xi\right)d\varphi(z)d\psi(\tau)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T\left[C(s,y,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)-\right.$$

$$-\int_{t_0}^s\int_a^y\frac{\partial}{dz}\left(C'_{\psi(\tau)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)d\varphi(z)d\psi(\tau)-$$

$$\int_{t_0}^s\int_a^y\frac{\partial}{d\tau}\left(C'_{\phi(z)}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)d\phi(z)d\psi(\tau)+$$

$$\left.+\int_{t_0}^s\int_a^y C''_{\psi(\tau)\phi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)dzd\tau\right]u(s,y)d\phi(y)d\psi(s)=$$

$$=\int_a^b\int_{t_0}^T C(s,y,t_0,a)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T C'_{\psi(\tau)}(s,y,\tau,a)\left(\int_\tau^s\int_a^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)u(s,y)d\psi(\tau)d\varphi(y)d\psi(s)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_z^b C'_{\phi(z)}(s,y,t_0,z)\left(\int_{t_0}^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)u(s,y)d\phi(y)d\psi(s)d\varphi(z)+$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_\tau^T\int_z^b C''_{\psi(\tau)\varphi(z)}(s,y,\tau,z)\left(\int_\tau^s\int_z^y u(\xi,\nu)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)\times$$

$$\times u(s,y)d\varphi(y)d\psi(s)d\psi(\tau)d\varphi(z).$$

Далее, имея в виду, что

$$C\nu\nu''_{\psi(s)\varphi(y)}=\frac{1}{2}\left(C\nu^2\right)''_{\psi(s)\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_s\nu^2\right)'_{\varphi(y)}-\frac{1}{2}\left(C'_y\nu^2\right)'_{\psi(s)}+\frac{1}{2}C''_{\psi(s)\varphi(y)}\nu^2-C\nu'_{\varphi(y)}\nu'_{\psi(s)}$$

и применением формулу Дирихле получим

$$\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)d\varphi(z)d\psi(\tau)d\psi(s)d\varphi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}C\left(T,b,t_0,a\right)\left(\int_a^b\int_{t_0}^T u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T C'_{\psi(s)}\left(s,b,t_0,a\right)\left(\int_a^b\int_{t_0}^s u\left(\nu,\xi\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(s\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b C'_{\phi(y)}\left(T,y,t_0,a\right)\left(\int_a^y\int_{t_0}^T u\left(\nu,\xi\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C''_{\psi(s)\phi(y)}\left(s,y,t_0,a\right)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T C\left(s,y,t_0,a\right)\left(\int_{t_0}^s u\left(\xi,y\right)d\xi\right)\left(\int_a^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T C'_{\psi(\tau)}\left(T,b,\tau,a\right)\left(\int_\tau^T\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C''_{\psi(\tau)\psi(s)}\left(s,b,\tau,a\right)\left(\int_\tau^s\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C''_{\psi(\tau)\phi(y)}\left(T,y,\tau,t_0\right)\left(\int_\tau^T\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)d\varphi\left(y\right)+$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,\tau,a\right)\left(\int_\tau^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'_\tau\left(s,y,\tau,a\right)\left(\int_\tau^s u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi)\right)\left(\int_a^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b C'_z\left(T,b,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^T\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(z\right)-$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C''_{\phi(z)\psi(s)}\left(s,b,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^s\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(s\right)d\varphi\left(z\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^y C''_{\phi(z)\phi(y)}\left(T,y,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^T\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(z\right)d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y C'''_{\psi(z)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^s\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(z\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y C'_{\phi(z)}\left(s,y,t_0,z\right)\left(\int_{t_0}^s u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi)\right)\left(\int_z^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)d\varphi\left(z\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T C''_{\psi(\tau)\phi(z)}\left(T,b,\tau,z\right)\left(\int_\tau^T\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)d\varphi\left(z\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_a^y C'''_{\psi(\tau)\phi(z)\phi(y)}\left(T,y,\tau,z\right)\times$$

$$\times\left(\int_\tau^T\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(z\right)d\psi\left(\tau\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s C'''_{\psi(\tau)\phi(z)\psi(s)}\left(s,b,\tau,z\right)\times$$

$$\left(\int_\tau^s\int_z^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(z\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\phi(y)}\left(s,y,\tau,z\right)\times$$

$$\times\left(\int_\tau^s\int_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(z\right)d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y C''_{\psi(\tau)\phi(z)}\left(s,y,\tau,z\right)\left(\int_\tau^s u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi)\right)\times$$

$$\left(\int_z^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)d\varphi\left(z\right)d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right). \qquad (10)$$

Выражения (8), (9) и (10) подставляя в (7), получим

$$\frac{1}{2}C\left(T,b,t_0,a\right)\left(\int_a^b\int_{t_0}^T u\left(\xi,\nu\right)d\psi(\xi)d\varphi(\nu)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\left\{P\left(s,b,a\right)\left(\int_a^b u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)^2-C'_{\psi(s)}\left(s,b,t_0,a\right)\left(\int_a^b\int_{t_0}^s u\left(\nu,\xi\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2+\right.$$

$$\left.+C'_{\psi(s)}\left(T,b,s,a\right)\left(\int_s^T\int_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\psi(\xi)d\varphi(\nu)\right)^2\right\}d\psi\left(s\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\{Q\left(T,y,t_0\right)\left(\int_{t_0}^T u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi)\right)^2-C'_{\phi(y)}\left(T,y,t_0,a\right)\left(\int_a^y\int_{t_0}^T u\left(\nu,\xi\right)d\psi(\xi)d\varphi(\nu)\right)^2+\right.$$

$$\left.+C'_{\varphi(y)}\left(T,b,t_0,y\right)\left(\int_{t_0}^T\int_y^b u\left(\xi,\nu\right)d\psi(\xi)d\varphi(\nu)\right)^2\right\}d\varphi\left(y\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s\int_a^y\left\{L\left(s,y,\tau,z,\int_a^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu),\int_{t_0}^s u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi),\int_\tau^s u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi),\int_z^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\left(\psi(s)-\psi(t_0)\right)\left(\varphi(y)-\varphi(a)\right)}\left[P'_{\varphi(y)}\left(s,b,y\right)\left(\int_y^b u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)\right)^2+\right.$$

$$+Q'_{\psi(s)}\left(T,y,s\right)\left(\int_s^T u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi)\right)^2+$$

$$+C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,t_0,a\right)\left(\int_{t_0}^s\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2-$$

$$-C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(T,y,s,t_0\right)\left(\int_s^T\int_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2-$$

$$-C''_{\varphi(y)\psi(s)}\left(s,b,t_0,y\right)\left(\int_{t_0}^s\int_y^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2+$$

$$+C''_{\psi(s)\varphi(y)}\left(T,b,s,y\right)\left(\int\limits_s^T\int\limits_y^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2\Bigg]+$$

$$\frac{1}{\varphi(y)-\varphi(a)}\Bigg[C'''_{\psi(\tau)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,\tau,a\right)\left(\int\limits_\tau^s\int\limits_a^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2-$$

$$-C'''_{\psi(\tau)\varphi(y)\psi(s)}\left(s,b,\tau,y\right)\left(\int\limits_\tau^s\int\limits_y^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2\Bigg]$$

$$+\frac{1}{\psi(s)-\psi(t_0)}\Bigg[C'''_{\phi(z)\psi(s)\phi(y)}\left(s,y,t_0,z\right)\left(\int\limits_{t_0}^s\int\limits_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2-$$

$$-C'''_{\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}\left(T,y,s,z\right)\left(\int\limits_s^T\int\limits_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2\Bigg]$$

$$+C^{(IV)}_{\psi(\tau)\varphi(z)\psi(s)\varphi(y)}\left(s,y,\tau,z\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_\tau^s\int\limits_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2\Bigg\}d\varphi\left(z\right)d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^T\int\limits_{t_0}^s C''_{\psi(\tau)\psi(s)}\left(s,b,\tau,a\right)\left(\int\limits_\tau^s\int\limits_a^b u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\psi\left(\tau\right)d\psi\left(s\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^y C''_{\varphi(z)\varphi(y)}\left(T,y,t_0,z\right)\left(\int\limits_{t_0}^T\int\limits_z^y u\left(\xi,\nu\right)d\varphi(\nu)d\psi(\xi)\right)^2 d\varphi\left(z\right)d\varphi\left(y\right)=$$

$$=\int\limits_a^b\int\limits_{t_0}^T f\left(s,y\right)u\left(s,y\right)d\psi\left(s\right)d\varphi\left(y\right). \qquad (11)$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$ Тогда учитывая условия 1), 2), 3) и 4), из (11) имеем $\int\limits_{t_0}^s u\left(\xi,y\right)d\psi(\xi)=0\,\forall\left(s,y\right)\in G$ или $\int\limits_a^y u\left(s,\nu\right)d\varphi(\nu)=0\ \forall\left(s,y\right)\in G.$

Отсюда $u(t,x)=0,$ при всех $(t,x)\in G.$ Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение (1) при

$A(t,x,y) = m_0(t)\beta_0(x)\gamma_0(y),\ B(t,x,y) = m_0(t)m_1(x)\beta_0(y),$

$M(t,x,s) = \frac{1}{2}m_1(t)\beta_1(x)\beta_2(s),\ N(t,x,s) = \frac{1}{2}m_2(s)\beta_1(x)\beta_2(t),$

$C(t,x,s,y) = \gamma_1(t)\gamma_2(x)\gamma_3(s)\gamma_4(y),$

где $\beta_0(x),\ \beta_0^{'}(x), \gamma_0(x), \gamma_0^{'}(x), m_1(x), m_1^{'}(x), \beta_1(x), \gamma_2(x),\ \gamma_2^{'}(x), \gamma_4(x)\gamma_4^{'}(t) \in C[a,b],$

$m_0(t) \geq 0, m_2(t) \geq 0, m_2^{'}(t) \leq 0, \beta_2(t) \geq 0,\ \beta_2^{'}(t) \geq 0, \gamma_1(t) \geq 0, \gamma_1^{'}(t) \leq 0, \gamma_3(t) \geq 0$

и $\gamma_3^{'}(t) \geq 0$ для всех $t \in [t_0, T], \beta_0(x) \geq 0,\ \beta_0^{'}(x) \leq 0, \gamma_0(x) + m_1(x) \geq 0,$

$\gamma_0^{'}(x) + m_1^{'}(x) \geq 0, \beta_1(x) \geq 0, \gamma_2(x) \geq 0,\ \gamma_2^{'}(x) \leq 0, \gamma_4(x) \geq 0, \gamma_4^{'}(x) \geq 0$ для всех

$x \in [a,b], \gamma_3(t_0) = 0, \gamma_4(a) = 0, \gamma_0(a) + m_1(a) \neq 0, m_0(t)\beta_0^{'}(x) < 0$ для почти всех

$(t,x) \in G, m_0(s)\beta_0^{'}(y)[y_0(z) + m_1(z)]m_2^{'}(s)\beta_1(y)\beta_2^{'}(\tau) - \left(\psi(s) - \psi(t_0)\right)\left(\varphi(y) - \varphi(a)\right) \times$
$\times\left[\gamma_1(s)\gamma_2(y)\gamma_3^{'}(\tau)\gamma_4^{'}(z)\right]^2 \geq 0$ для всех $(s, y, \tau, z) \in G_4.$

В этом случае

$P(t,x,y) = m_0(t)\beta_0(x)[\gamma_0(y) + m_1(y)], (t,x,y) \in G_1, Q(t,x,s) = m_2(t)\beta_1(x)\beta_2(s),$

$$L(s, y, \tau, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$$
$$= \frac{1}{\left(\psi(s) - \psi(t_0)\right)\left(\varphi(y) - \varphi(a)\right)}\left\{-m_0(s)\beta_0^{'}(y)[\gamma_0(a) + m_1(a)]\alpha_1^2 - m_2^{'}(s)\beta_1(y)\beta_2(t)\alpha_2^2 -\right.$$
$$-m_2^{'}(s)\beta_1(y)\beta_2(t)\alpha_2^2 - [\left(\psi(s) - \psi(t_0)\right)m_2^{'}(s)\beta_1(y)\beta_2^{'}(\tau)\alpha_3^2 +$$
$$+\left(\varphi(y) - \varphi(a)\right)m_0(s)\beta_0^{'}(y)[\gamma_0(z) + m_1(z)]\alpha_4^2 +$$
$$\left. 2\left(\psi(s) - \psi(t_0)\right)\left(\varphi(y) - \varphi(a)\right)\gamma_1(s)\gamma_2(y)\gamma_3^{'}(\tau)\gamma_4^{'}(z)\alpha_3\alpha_4]\right\},\ (s, y, \tau, z) \in G_4.$$

Тогда условия 1), 2), 3), 4) выполняются.

Список использованных источников

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода. //Журнал вычислительной математики и математический физики. 1979. Т.19. № 4. С. 970-989.

2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. //ДАН СССР. 1959. Т.127. № 1. С. 31-33.

3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980, 286 с.

4. Иманалиев М.И., Асанов А. // О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН 2007. Т. 415. № 1. с. 14-17.

5. Иманалиев М.И., Асанов А., Каденова З.А. Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными // ДАН 2014. Т. 454. № 5. С. 518-522.

6. Aparstyn A.S. Nonclassical linear Volterra Equations of the First Kind. Utrecht, VSP, 2003. 168 p.

7. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Utrecht, VSP, 1998, 276 p.

8. Bukhgeim A.L. Volterra Equations and Inverse Problems, Utrecht, VSP, 1999. 204 p.

9. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. //Журнал Естественных наук, КТУМ, Бишкек, 2001, №1, С.18-64.

10. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго и первого рода. // Журнал Естественных наук, КТУМ, Бишкек, 2002, №2, С.79-95.

11. Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса // Журнал Естественных наук, КТУМ, Бишкек, 2003, №4, С.65-78.

2010 MSC: 34K20, 45J05

МЕТОД ЧАСТИЧНОГО СРЕЗЫВАНИЯ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Искандаров С., Киязова С.Б.

Жекече кесүү методунун жардамы менен биринчи тартиптеги Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жетиштүү шарттары аныкталат. Иллюстративдик мисал тургузулат.

Урунттуу сөздөр: сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме, чыгарылыштардын чектелгендиги, жекече кесүү методу.

С помощью метода частичного срезывания устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси решений нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка. Строится иллюстративный пример.

Ключевые слова: нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, ограниченность решений, метод частичного срезывания.

The sufficient conditions for boundedness of solutions of nonlinear first order Volterra type integro-differential equation are established by method of partial cutting. An illustrative example is constructed.

Keywords: nonlinear integro-differential equation, boundedness of solutions, method of partial cutting.

Все фигурирующие функции от t, (t,τ), x являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0, |x| < \infty; J = [t_0, \infty)$; ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале J решений следующего нелинейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра:

$$x'(t) + h\big(t, x(t)\big) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau) g\big(x(\tau)\big) d\tau = f(t), \quad t \geq t_0. \tag{1}$$

Под решением ИДУ(1) понимается решение $x(t) \in C^1(J, R)$ с любым начальным данным $x(t_0)$. Существование такого решения предполагается, хотя и можно установить методом монотонных операторов [1].

Отметим, что задачи, аналогичные сформулированной нами, ранее были изучены во многих работах, часть которых можно найти в [2,3]. Заметим, что в [4] развит метод функционалов Ляпунова, [5] - метод весовых и срезывающих функций. В настоящей статье развивается метод частичного срезывания [6].

Введем предположения и обозначения [3,6]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t), \tag{f}$$

$\Psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$P_i(t) \equiv K_i(t,t)(\Psi_i(t))^{-2}, Q_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\big(\Psi_i(\tau)\big)^{-1}$,

$E_i(t) \equiv f_i(t)\big(\Psi_i(t)\big)^{-1} \quad (i = 1..n)$,

$P_i(t) = A_i(t) + B_i(t) \qquad (i = 1..n)$,

$c_i(t)\ (i = 1..n)$ – некоторые функции.

Ядра $Q_i(t,\tau)$ называется частично срезанными [6].

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ умножаем на $g\big(x(t)\big)$[5], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом аналогично [3,6] вводим функции $\Psi_i(t), P_i(t), Q_i(t,\tau)$, используем лемму [6], вводим условие (P), функции $c_i(t)$ $(i = 1..n)$. Вследствие чего будем иметь следующее тождество:

$$G\big(x(t)\big) + 2\int_{t_0}^{t} h\big(s,x(s)\big)g\big(x(s)\big)ds + \sum_{i=1}^{n}\Big\{A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 + B(t)(X_i(t,t_0)^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}[B_i{}'(s)(X_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i{}'(s)]ds\Big\} \equiv c_* + \sum_{i=1}^{n}[\int_{t_0}^{t} A_i'(s)\big(X_i(s,t_0)\big)^2 + 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{S} Q'{}_{i\tau}(s,\tau)X_i(\tau,t_0)g(x(\tau))d\tau], \qquad (2)$$

где

$$G(x) \equiv \int_0^x g(u)du, \quad X_i(t,\tau) \equiv \int_\tau^t \Psi_i(s)g\big(x(s)\big)ds \quad (i = 1..n),$$

$$c_* = G\big(x(t_0)\big) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0).$$

Аналогично статье [5], применяя лемму 1 [7], исходя из тождества (2), доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $0 < G(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$; 2) существует число g_0 такое, что $|g(x)| \le g_0[1 + G(x)]$; 3) $h(t,x)g(x) \ge 0$; 4) $A_i(t) > 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t) \le A_i^*(t)A_i(t)\ \ (i = 1..n)$; 5) $B_i(t) \ge 0, B_i'(t) \le 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $\Big(E_i^{(k)}(t)\Big)^2 \le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ \ (i = 1..n; k = 0,1)$; 6) $\int_{t_0}^{t}|Q_{i\tau}'(t,\tau)|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau \in L^1(J,R_+)\ \ (i = 1..n)$.

Тогда любое решение $x(t)$ ИДУ (1) ограничено на полуинтервале J и обладает следующим свойством:

$$h\big(t, x(t)\big) g\big(x(t)\big) \in L^1(J, R_+). \tag{3}$$

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются все условия теоремы и $h(t,x)g(x) \geq \Delta(t)x^{2m}, m \in N, \Delta t \geq \Delta_0 > 0,$ (4)

то любое решение $x(t)$ ИДУ принадлежит пространству $L^{2m}(J, R)$ $(m \in N)$. Если, кроме того, $(\Delta(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$, то любое решение $x(t)$ ИДУ (1) принадлежит пространству $L^m(J, R)$ $(m \in N)$.

Утверждения этого следствия вытекают из (3), (4) и в силу неравенства:

$$2|x|^m = 2(\Delta(t))^{\frac{1}{2}}|x|^m(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}} \leq \Delta(\mathrm{t})x^{2m} + (\Delta(t))^{-1},$$

интегрированием от t_0 до t.

Приведем простейший пример.

ПРИМЕР. ИДУ

$$x'(t) + e^{\sqrt{t}}x^5(t) + \int_0^t e^{t+\tau}\sqrt{e^{-15t}(t-\tau)+4}\ x^3(\tau)d\tau = -2e^t, \ \ t \geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствия при $n = 1, \Psi_1(t) \equiv e^t$, здесь $\Delta(t) \equiv e^{\sqrt{t}}, m = 4, P_1(t) \equiv 2, A_1(t) \equiv 1, B_1(t) \equiv 1, E_1(t) \equiv -2, c_1(t) \equiv 4$, и следовательно, все его решения $x(t) \in C^1(R_+, R)$ ограничены на полуоси R_+ и $x(t) \in L^4(R_+, R) \cap L^8(R_+, R)$.

Список использованных источников

1. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

2. Керимов М.К. Библиография некоторых новых работ по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям // Дополнение к книге: В.Вольтерра. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. С англ. – М.: Наука, 1982. – С.257-302.

3. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

4. Levin J.J. Nonlinear Volterra Equation Not of Convolution Type // J.different.equat. – 1968. – Vol.4. – P.176-186.

5. Искандаров С. Об ограниченности решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра // Исслед.по интегро-дифференц.уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1982. – Вып.15. – С.127-134.

6. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Там же. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33. – С.67-71.

7. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед.по интегро-дифференц.уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып.9. – С.68-103.

MSC 18C05

ФУНКТОРЫ В КАТЕГОРИИ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПОДКАТЕГОРИЯХ

Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Кененбаев Э., Абдалиев Т.С.

Институт математики НАН КР, КНУ им. Ж.Баласагына,

Мурда өзгөртүүлөрдө чыгарылышты сактоо принцибинин негизинде «предикат» түшүнүгүнүн жардамы менен теңдеменин жаңы жалпы түшүнүгүн киргенбиз. Бул макаланын максаты: башка категориялардын объекттери менен морфизмдерин теңдемелердин категориясына, ошондой эле теңдемелердин категориясынан башка категорияларга дагы өзгөртүүчү функторлорду түзүү.

Урунттуу сөздөр: категория, функтор, морфизм, теңдеме, предикат, чыгарылыш

Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия “предикат” на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений на основе известных категорий. Цель данной статьи: построить функторы, преобразующие объекты и морфизмы из других категорий в категорию уравнений, а также – из категории уравнений в другие категории.

Ключевые слова: категория, функтор, морфизм, уравнение, предикат, решение

Supra a new general notion of equation was introduced by us with assistance of the notion “predicate” on the base of the principle of preservation of solution while transformations and elements of the category of equations were constructed on the base of well-known categories. The aim of this paper is to construct functors that transform objects and morphisms of other categories to the category of equations, also do from the category of equations into other categories.

Keywords: category, functor, morphism, equation, predicate, solution

Введение. Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия “предикат” на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений и ее подкатегорий на основе известных категорий. Цель данной статьи: построить некоторые функторы, преобразующие объекты и морфизмы из других категорий в категорию уравнений, а также преобразующие категорию уравнений в другие категории.

Термин «категория», как математический, был введен в [1]. Это понятие оказалось удобным для изложения многих разделов математики, поскольку теория категорий рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев [2], ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками, см. [3].

Категория для одного из видов уравнений была построена в [4]. Нами предложены новое понятие уравнения и аксиоматика для уравнений в целом, на основании чего определена «категория уравнений» [5]-[6], и ее подкатегория «корректных уравнений» [7]. В данной статье описаны некоторые функторы, естественно возникающие в этих категориях.

2. Некоторые сведения из теории категорий. Данная теория возникла из того, что с теоретико-множественной точки зрения совокупность всех множеств не является множеством - это приводит к противоречиям (допущение только «не содержащих самих себя» множеств также приводит к противоречиям). То же относится и к совокупности преобразований множеств и другим совокупностям в различных разделах математики. Поэтому для них ввели понятие «класс». Таким образом, нельзя говорить, например, о «категории всех категорий».

Определение 1. Категория K задаётся

1) Совокупностью $A,B,C,\ldots$объектов $Ob(K)$;

2) Совокупностью $f,g,h,\ldots$морфизмов $Mor(K)$;

3) Операциями dom и cod, которые сопоставляют каждому морфизму f некоторые объекты $dom(f)$ и $cod(f)$ (они называются началом и концом f). Тот факт, что $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, изображается так $f : A \to B$ (морфизм из A в B).

4) Операцией композиции, которая по каждой паре морфизмов f и g, таких, что $cod(f) = dom(g)$, выдаёт некоторый морфизм $g \circ f : A \to C$.

5) Операцией I, которая по каждому объекту A выдаёт некоторый морфизм $I_A : A \to A$ (он называется тождественным или единичным морфизмом объекта A).

Совокупность всех морфизмов из A в B в категории K обозначается $K(A, B)$.

При этом:

1. Для любой тройки морфизмов $f, g, h, f:A \to B; g:B \to C; h:C \to D$ выполнено равенство $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

2. Для любого морфизма $f : A \to B$ выполнены равенства $f \circ I_A = f, I_B \circ f = f$.

(Ковариантный) функтор для категорий K и M, $F: K \to M$ - это такое отображение, которое сопоставляет каждому объекту $X \in K$ объект $F(X) \in M$ и сопоставляет каждому морфизму $f:X \to Y$ в категории K морфизм $F(f):F(X) \to F(Y)$ в категории M. Это сопоставление должно обладать следующими свойствами: $F(I_A) = I_{F(A)}$; $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Таким образом, функтор должен сохранять тождественные морфизмы и структуру композиции морфизмов.

3. Примеры категорий. Основными категориями, из которых строятся все остальные, являются следующие:

3.1. Категория множеств *Set*. *Ob(Set)* - непустые множества, *Mor(Set)* – функции, отображающие одни множества в другие.

3.2. Категория топологических пространств *Top*. *Ob(Top)* - топологические пространства, *Mor(Top)* - непрерывные отображения.

Следующие категории в литературе явно не определены, но неявно используются. Мы предлагаем

3.3. Категория функций *Func*[5] (операторов, преобразований, отображений). *Ob(Func) = Mor(Set), Mor(Func)* – преобразования функций, и ее подкатегории:

- категория непрерывных функций *Func-Top;*
- категория предикатов (или: функций, принимающих два значения, или: характеристических функций множеств, или: множеств с выделенным подмножеством) *Pred;*
-категория устойчивых предикатов *Pred-Top;*
-категория предикатов трехзначной логики *Pred 3*, принимающих три значения «Да», «Нет», «Неопределенность»;
-категория «индикаторных функций» *Pred-I* (возникающих в приложениях интервального анализа) - определены на прямоугольных множествах, принимают конечное количество значений.

3.4. Категория уравнений *Equa*. Ранее уравнения подразделялись неформально на алгебраические, дифференциальные, интегральные, с начальными или краевыми условиями и т.д. Нами был использован тот факт, что уравнения и системы уравнений различных типов эквивалентны. Более того, известный прием понижения порядка автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, различные методы подстановок и преобразований аргумента, развиваемый в Кыргызстане метод преобразования решений, созданные в Кыргызстане метод дополнительного аргумента, метод сведения дифференциальных уравнений к системам операторно-разностных уравнений показали, что эквивалентными могут быть уравнения с различными решениями, и даже в различных пространствах.

<u>Определение 2</u>. *Ob(Equa)* - наборы {непустые множества *X, Y,* предикат *P(x)* на *X,* преобразование $B{:}X\to Y\}$.

Решением уравнения $\{X, Y, P, B\}$ называется такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x))$.

В частности, если *B= I*- тождественное отображение, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x)"*.

Mor(Equa) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Некоторые подкатегории категории *Equa*.

Категория уравнений для функций *Equa-Func*.

<u>Определение 3</u>. *Ob(Equa-Func)* - наборы $\{\ X\in Ob(Func),\ Y\in Ob(Func),$ предикат *P(x)* на *X,* преобразование $B{:}X\to Y\}$. *Mor(Equa-Func)* - преобразования, в том числе следующие:

Преобразование аргумента. Для функции *x(t)* вводится биективная замена $t=\psi(s)$, обозначается $z(s)=x(\psi(s))$ из нового пространства функций *Z* и вводится предикат P_1, такие, что $\{x\in X{:}P(x)\}=\{z\in Z{:}\ P_1(z)\}$.

Категория уравнений с параметрами *Equa-Par*.

<u>Определение 4</u>. *Ob(Equa-Par)* - наборы {непустые множества*X, F, Y,* предикат *P(x,f)* на $X\times F$, преобразование $B{:}X\to Y\}$.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f\in F$ названо такое $y(f)\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$. В частности, если *B* - тождественное преобразование, то получаем только задачу решения уравнения *"P(x,y)"*.

Mor(Equa-Par) - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$ (кроме *F),* что решения (или их отсутствие) сохраняются.

Категория корректных уравнений *Equa-Par-Top*. При нашем подходе «корректность» может быть только по параметру (в широком смысле).

Определение 5. *Ob(Equa-Par-Top)* - наборы {топологические пространства $X, F, Y,$ предикат $P(x,f)$ на $X\times F,$ непрерывное преобразование $B:X\to Y\}$. При этом 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)\ (P(x,f)\wedge(y=B(x));$
2)элемент yнепрерывно зависит от элемента f.

Mor(Equa-Par-Top) - преобразования, сохраняющие свойства 1) и 2).

4. Примеры предикатов в категории уравнений

4.1. По традиции категории уравнений, вводится «забывающий» функтор F_1: *Equa*$\to$*Pred*, переводящий уравнение в используемый в нем предикат. Соответствующие предикаты вводятся в подкатегориях категории уравнений.

4.2. «Канонический» функтор F_2: *Pred*$\to$*Equa*, который переводит предикат $P(x)$ в уравнение согласно Определения 2 с B - тождественным оператором.

4.3. «Решающий» функтор F_3: *Equa*$\to$*Set*, который дает множество решений уравнения.

Список использованных источников

1. Eilenberg S.,MacLaneS. A general theory of natural equivalences // Transactions of American Mathematical Society, 1945, 58: pp. 231–294.

2. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками: Автореферат дисс. … к. ф.-м.н. (01.01.04). - Новосибирск, 1973. - 17 с.

3. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равно-мерных пространств и полных по Райкову топологических групп // Известия Академии наук, вып. 4, 2007. - С. 1-6.

4. Rosický J. Equational categories // Cachiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - Pp.85-95.

5. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.

6. Kenenbaeva G.M., Askarkyzy L. Foundations of category of equations // Тезисы докладов Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР. - Бишкек: Институт математики, 2019. - С. 46.

7. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Элементы категории корректных уравнений // Вестник Института математики НАНКР, 2019, № 1. - С. 69-74.

MSC 70F99

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ЭФФЕКТА МНОЖЕСТВЕННОСТИ

Тагаева С.Б.
Институт математики НАН КР

Макалада белгилүү жана автордун тарабынан табылган кубулуштар көпчүлүк эффектинин натыйжасы катары жана кокустан сандарды иштеп чыгаруучу менен дал келген дифференциалдык жана айырма теңдемелер жазылган. Төмөнкү ireттөөнүн синергетикалык сандуу тажрыйбалар аркылуу ачылды. Топологиялык шакекте, кокустан баштапкы жайлаштыруудан, Кулон закону боюнча түртүлүүчү, бирдей электр заряддардын кыймылдоосун компьютерде моделдешти. Заряддардын саны жетишерлик көп болгондо, алардын акыркы жайгаштыруусу регулярдык тор түрүндө пайда болот.
Урунттуу сөздөр: көптүүчүлүк эффекти, синергетика, кубулуш, Кулон закону, электр заряддар.

В статье описаны как известные, так и найденные автором явления - следствия эффекта множественности, и соответствующие дифференциальные и разностные уравнения с генераторами случайных чисел. Следующее синергетическое явление упорядочивания было обнаружено численными экспериментами. На компьютере было моделировано движение отталкивающихся по закону Кулона одинаковых электрических зарядов из случайного начального расположения на топологическом торе. Когда количество зарядов достаточно велико, их окончательное расположение образует регулярную сетку.
Ключевые слова: эффект множественности, синергетика, явление, численный эксперимент, закон Кулона, электрические заряды

Both well-known and found by the author phenomena as consequences of the effect of numerousity as well as corresponding differential and difference equations with random number generators are described in the paper. The following synergetic phenomenon of regularity was opened by means of numerical experiments. Motion of equal, repelling by the Coulomb law

electrical charges from a random initial distribution on a topological torus was modeled by computer. When the number of charges is sufficiently large they form a final regular grid.
Keywords: effect of numerousity, synergetic, phenomenon, numerical experiment, Coulomb law, electrical charges

1. Введение

В Институте математики в 1980-е годы была поставлена задача о поиске новых явлений в теории сингулярных возмущений (см. например [1]), в дальнейшем проведены исследования по возможной формализации для математики известных понятий «эффектов» и «явлений». При этом были заново сформулированы известные факты, а также найдены новые.

Были сформулированы эффекты «бесконечности», «синергетический», «влияния малого параметра», выявлены эффекты «аналитичности», «множественности» - эффект, вызывающий явления, которые имеют место только для больших количеств каких-либо объектов (в математике – уравнений).

Было введено ([2], с уточнениями)

О п р е д е л е н и е 1. Диссипативная система – это такая полностью ограниченная (компактная) система, имеющая достаточно большое количество возможных состояний и переходов между ними, что энтропия входящей энергии (вводится ограниченно по мощности, но неограниченно по времени) значительно меньше энтропии выходящей энергии. Таким образом, внутренняя энтропия уменьшается, что эквивалентно возникновению упорядоченности.

2. Обзор явлений - следствий из эффекта множественности

2.1. Явление «иргөө», которое возникает для достаточно большого количества шаров (по проведенным расчетам – более 50), может быть отнесено к синергетическому эффекту, а также - к эффекту множественности. Его можно наблюдать в реальности, система разностных уравнений была построена, см. например, [2].

2.2. Явление гауссовской функции распределения вероятностей при большом числе попыток (несколько десятков). Его можно наблюдать в реальности, а также моделировать системой дифференциальных или разностных уравнений, выражающих случайные отклонения в разные стороны. Продолжение исследования этого явления привело к Центральной предельной теореме теории вероятностей.

2.3. Моделирование возможного периодического создания и распада единого материка (более 20 блоков) на поверхности Земли в рамках гипотезы мобилизма [6], см. ниже раздел 3.

2.4. Явление упорядочения при движении большого количества (более 100) одноименных электрических зарядов в вязкой среде [7]-[11], см. ниже раздел 4.

3. Моделирование возможного движения блоков земной поверхности

По вопросу о происхождении и эволюции материков среди специалистов есть различные мнения, см. например [12]. Их можно разделить на два больших направления: "фиксизм" (предполагается, что движения в земной коре в большие геологические периоды происходили в основном в вертикальных направлениях) и "мобилизм" (предполагается, что происходили "плавания" материков, как частей земной коры, по мантии). В рамках последней гипотезы также предполагается, что раньше существовал единый материк, который потом раскололся на отдельные части (А. Вегенер, 1912). Причины возникновения такого материка, насколько известно, до работы [6] не обсуждались.

Поскольку прямых доказательств справедливости той или иной гипотезы быть не может, использовались различные косвенные доводы по геологическому строению, измерениям, проводимым в наше время, также гипотезам о физико-механических свойствах земных пород на больших интервалах времени и т.д. Установлено, что материковая кора отличается от океанической не только по толщине, но и качественно, что также требует своего объяснения.

В [6] предположено, что в какую-то геологическую эпоху земная кора материкового типа достаточно отвердела и состояла из отдельных блоков (характерный размер 1000 км), которые имели внутреннюю относительную жесткость, но под влиянием различных факторов двигались одни относительно других. Совокупность этих факторов (тектонические процессы, кориолисова сила, лунные и солнечные приливы) моделировалась при помощи случайных смещений на протяжении временного шага (условно 100000 лет). Если один из блоков случайно надвигается на второй, то второй также смещается на половину ширины надвижения. Соответствующая программа была написана на языке Visual Basic. Таким путем было установлено, что когда блоки находятся по отдельности, более вероятно соединение почти всех из них в один "материк", а для него, в свою очередь, более вероятно раскалывание на 2-3 крупных части. То есть, одни и те же математические причины приводят к формированию одного материка, а потом – нескольких. Это явилось дополнением (более естественное начальное условие) и подтверждением гипотезы А.Вегенера, а также процессов, наблюдаемых в настоящее время.

4. Постановка задачи и расчетная программа

На топологическом торе в вязкой среде случайным образом располагаются одноименные электрические заряды. После этого они начинают отталкиваться по закону Кулона, пока не почти остановятся. При этом движение N зарядов описывается системой N двумерных дифференциальных уравнений первого порядка. Их особенностью является то, что правые части разрывны, но решения - непрерывные и гладкие. Для учета особенностей топологии тора учитывается отталкивание каждого заряда только от близких зарядов.

Была составлена программа для решения соответствующих разностных уравнений с использованием генератора случайных чисел с графической демонстрацией начального и конечного расположения зарядов.

С программой можно ознакомиться по адресу

https://cloud.mail.ru/public/83U4/SaE2e7gmN

До ста зарядов получающиеся равновесные расположения были разнообразными и не имели никаких общих закономерностей, заряды располагались треугольниками, четырехугольниками, пятиугольниками ….

Начиная со 100 зарядов, уже стали появляться регулярные области, а после 200 выявилась закономерность, в особенности для количеств зарядов - квадратов чисел.

Для «квадрата четного числа» зарядов в большинстве попыток (поскольку исходные данные случайны), образуется правильная квадратная сетка, а для «квадрата нечетного числа» зарядов - правильная треугольная сетка.

Теперь возникает вопрос об экспериментальном обнаружении данного явления.

Список использованных источников

1. Иманалиев М.И., Панков П.С. Явление вращающегося пограничного слоя в теории сингулярно-возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Докл. АН СССР, 1986, том 289, № 3. – С. 536-538.

2. Kenenbaeva G.M., Tagaeva S. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014). – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

3. Pankov P. S., Kenenbaeva G. M. Hypothesis on effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 60-62.

4. Pankov P., Kenenbaeva G. Effect of "numerosity" and other effects in mathematics // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 87.

5. Kenenbaeva G. On mathematical effects // Abstracts of the VI Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Astana: L.N.Gumilyov Eurasian National University, 2017. - P. 320.

6. Щебланова С.О. Моделирование процесса случайного движения частиц / дипломный проект. Научный руководитель П.С.Панков. - Бишкек: КРСУ, 2005. - 66 с.

7. Pankov P., Tagaeva S. Mathematical modeling of distribution of discrete electrical charges // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 58.

8. Тагаева С.Б. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, описывающих отталкивание частиц // Вестник Жалал-Абадского государственного университета, 2016, № 1(32). – С.78-82.

9. Панков П.С., Тагаева С.Б. Условия гладкости решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Доклады НАН КР, 2016, № 2. - С. 26-30.

10. Tagaeva S. Example of trifurcation of distribution of repelling electrical charges // Abstracts of the Third International Scientific Conference "Actual problems of the theory of control, topology and operator equations" / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2017. – P. 89.

11. Тагаева С.Б. Экспериментальное исследование распределения электрических зарядов в ограниченных областях // Тезисы докладов II Борубаевских чтений (г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018. - С. 32.

12. Куликов К.А., Сидоренков Н.С. Планета Земля. – Москва: Наука, 1977. – Глава VI. Оболочки Земли в движении, с. 156-186.

MSC 34E05

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УМЕНЬШЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ж.К.Жээнтаева

Кыргызско-Узбекский университет

Мурдагы макалада эволюциялык теңдемелер үчүн баштапкы маселелер чыгарылыштарынын мейкиндигинде асимптотикалык эквиваленттик катышы киргизилген: убакыттын көбөйүшү менен алардын чексиз жакындашуусу. Фактор-мейкиндик ченеми баштапкы мейкиндик ченеминен кичүү болгон кубулуш, «чыгарылыштар мейкиндигинин ченемин асимптотикалык төмөндөтүү» деп айтылган. Бул макалада кечигүүчү аргументтүү сызыктуу эмес теңдемелер үчүн ал кубулушту колдонуу көрсөтүлдү.
Урунттуу сөздөр: сызыктуу эмес теңдеме, кечигүүчү аргументтүү дифференциалдык теңдеме, теңдемелер системасы, баштапкы маселе, асимптотика, атайын чыгарылыш.

В предыдущей статье было введено отношение асимптотической эквивалентности в пространстве решений начальных задач для эволюционного уравнения: их неограниченное сближение с увеличением времени. Явление, когда размерность фактор-пространства меньше размерности исходного пространства, названо «асимптотическим уменьшением размерности пространства решений». В данной статье показано применение этого явления для нелинейных уравнений с запаздыванием аргумента.
Ключевые слова: нелинейное уравнение, уравнение с запаздывающим аргументом, начальная задача, асимптотика, специальное решение

In the preceding paper the following equivalence relation was introduced in the space of solutions of initial value problems for evolutional equations: their infinite convergencewhile time tends to infinity. The phenomenon “the dimension of the factor-space is less than one of the initial space” was called “asymptotical reducing of dimensionof space ofsolutions”. In this paper an application of such phenomenon for non-linear equations with delay of argument is demonstrated.
Keywords: non-linear equation, delay-differential equation, initial value problem, asymptotic, special solution

Введение. В нашей предыдущей статье [7] было введено отношение асимптотической эквивалентности в пространстве решений начальных задач для эволюционного уравнения: их неограниченное сближение с увеличением времени. Такие общие определения, по нашему мнению, дали возможность объединить некоторые ранее введенные определения и единообразно изложить результаты, полученные различными многие математическими методами, в том числе теория устойчивости, метод малого параметра, метод характеристических уравнений для автономных и периодических эволюционных уравнений.

В данной статье мы предлагаем некоторые общие определения, которые, по нашему мнению, дают возможность объединить некоторые ранее введенные определения и единообразно изложить полученные результаты.

1. Обзор некоторых определений и результатов

В [7] решение некоторого эволюционного уравнения с начальным условием φ было представлено в виде оператора $W(t,\varphi):\Lambda\times\Phi\to Z$, где Λ - линейно упорядоченное множество с наименьшим, но без наибольшего элемента (обычно берется $\Lambda=\boldsymbol{R}_+\equiv [0,\infty)$ или $\Lambda=\boldsymbol{N}\equiv \{1,2,3,\ldots\}$), Φ - топологическое пространство начальных условий, Z - топологическое пространство значений решений.

Создание теории устойчивости А.Пуанкаре [1] и А.М.Ляпуновым [2] дало достаточные условия о стремлении решений с любыми начальными условиями (линейных) и в некоторой области (нелинейных) к некоторому одному решению.

А.М.Ляпунов также дал (в упомянутых обозначениях [7])

<u>Определение 1</u>. ($\Phi = Z = \boldsymbol{R}^n$). Если существует такой k-мерный «диск» $D_k\subset\Phi$, $k\leq n$, $\varphi_0\in D_k$, что

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\varphi\in D_k)((||\varphi-\varphi_0||<\delta)\Rightarrow(\forall t\in\Lambda)(||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)||<\varepsilon)),$$

то решение $W(t,\varphi_0)$ называется условно устойчивым с индексом k; если также $\lim\{||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_0)||: t\to\infty\}= 0$, то решение называется асимптотически условно устойчивым.

А.Д.Мышкис [3] обнаружил явление расщепления пространства решений линейных дифференциальных уравнений с малым запаздыванием на «медленно меняющиеся» и «быстро затухающие». В дальнейшем Ю.А.Рябов, П.С.Панков и другие авторы (см. обзор в [4]) получили результаты, которые дают достаточные условия для следующего.

Пусть $h>0, \Phi=C([-h,0]\to\boldsymbol{R}^n)$ - бесконечномерное пространство, $Z = \boldsymbol{R}^n$, $D\subset\Phi$ - конечномерное пространство.

<u>Определение 2</u>. Если $(\forall\varphi\in\Phi)(\exists\varphi_1\in D)(\lim\{||W(t,\varphi)-W(t,\varphi_1)||: t\to\infty\}= 0)$, то элементы $W(t,\varphi_1), \varphi_1\in D$ называются специальными, имеющими асимптотическое свойство.

<u>Определение 3</u>. Фактор-пространство Φ^* пространства начальных условий Φ по отношению «асимптотической эквивалентности»:

Если Z - линейное нормированное пространство, то

$$\varphi_1\sim\varphi_2\Leftrightarrow(\lim\{||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||: t\to\infty\}= 0), \quad (1)$$

Если Z- метрическое пространство, то

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (lim\{ \rho_Z(W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)): t\to\infty\}= 0), \quad (2)$$

Если Z - равномерное пространство с множеством Γ окружений диагонали (наиболее общий случай), то

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow (\forall V\in\Gamma)\ (\exists t_1\in\Lambda)\ (\forall t>t_1)((W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \in V) \quad (3)$$

называется асимптотическим фактор-пространством. Если размерность пространства Φ^* меньше размерности пространства Φ, то имеет место явление асимптотического уменьшения размерности пространства решений.

Примечание. В ряде работ (см. например [9]) термин «асимптотическая эквивалентность» применялся в другом смысле: как близость между решениями различных уравнений с одним и тем же пространством начальных значений. В наших обозначениях:

$$W_1(t,\varphi)\sim W_2(t,\varphi) \Leftrightarrow (\forall\varphi_1\in\Phi)\ (\exists\varphi_2\in\Phi)\ (lim\ \{\ ||W_1(t,\varphi_1)-W_2(t,\varphi_2)||: t\to\infty\}= 0).$$

Нами [5] показано, что линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием можно преобразовать в эквивалентную систему операторно-разностных уравнений с дискретным временем, с соответствующими свойствами.

В данной статье это показывается для нелинейных уравнений.

2. Примеры явления асимптотического уменьшения размерности пространства решений

Пример 1. Для многих видов линейных автономных эволюционных уравнений существует такой набор (конечный или счетный, тогда $lim_{k\to\infty}Re\lambda_k = -\infty$) характеристических чисел λ_1, λ_2, λ_3, … в комплексной плоскости, таких, что $\exp(\lambda_k t)$ является решением уравнения, и соответственно общее решение представимо в виде суммы или асимптотического ряда

$$W(t,\varphi)\sim \sum_k C_k(\varphi)\exp(\lambda_k t), t\in\boldsymbol{R}_+, \quad (4)$$

где C_k - линейные функционалы от начального условия.

При существовании таких λ_k, что $Re\lambda_k< 0$, возникает явление асимптотического уменьшения размерности пространства решений и пространство Φ^* представляется в виде $\sum\{\gamma_k \exp(\lambda_k t): Re\ \lambda_k \geq 0\}$.

Пример 2. Для гладкой функции $F: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ рассмотрена система уравнений

$$x'(t)=-grad(F(x(t))),\ t\in\boldsymbol{R}_+,\ x(0)=\varphi\in\Phi=\boldsymbol{R}^n. \qquad (5)$$

Здесь пространство Φ^* совпадает с множеством решений уравнения

$$grad(F(x))=0. \qquad (6)$$

Устойчивые и условно устойчивые решения (6) отождествляются с их областями притяжения в $\boldsymbol{R}^n$.

Основной

Пример 3. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с одним постоянным запаздыванием

$$z'(t)=F(t,z(t-h)),\ h\geq 0, \qquad (7)$$

или линейное уравнение

$$z'(t)=P(t)z(t-h),\ h\geq 0, \qquad (8)$$

с начальным условием

$$z(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0], \qquad (9)$$

где $\varphi(t)\in C[-h,0]$, $F(t,z)\in C[\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}]$, и $P(t)\in C[\boldsymbol{R}_+]$ – заданные функции,

$$F(t,z)\equiv 0;\ |F(t,z_1)-F(t,z_2)|\leq p_0\,|z_1-z_1|;\ |P(t)|\leq p_0=const. \qquad (10)$$

При $P(t)=const$ получается теория Флоке, обобщающая теорию Эйлера для автономных дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение $\lambda = pe^{-\lambda h}$, см. Пример 1 выше.

При

$$||P(t)||\cdot h<e^{-1}=0.367\ldots, \qquad (11)$$

возникают специальные решения, см. выше Определение 2.

Если $P(t)\geq 0$, то пространство $\Phi^*=\boldsymbol{R}$.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментальных – операторно-разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Мы обосновали эту гипотезу в [5], где установлено взаимно-однозначное соответствие между уравнениями вида (8) и системами операторно-разностных уравнений, причем условию вида (10) соответствует условие доминирования одного из диагональных коэффициентов над всеми другими.

Уравнение (7) сначала преобразуем в интегральное уравнение сдвига на величину шага в пространстве $C[-h,0]$, а потом это пространство расщепляется на одномерное пространство констант и пространство функций, обращающихся в нуль при $t=0$.

3. Система нелинейных операторно-разностных уравнений

Пусть Ω - некоторое нормированное пространство. Мы рассматриваем четыре последовательности операторов (первая – функции вещественной переменной, вторая – «функционалы»):

$$a_n: \mathbf{R}\to\mathbf{R};\ b_n: \mathbf{R}\times \Omega\to\mathbf{R};\ c_n: \mathbf{R}\to\Omega;\ d_n: \mathbf{R}\times\Omega\to\Omega,\ n=0,1,2,\dots \quad (11)$$

с интервальными ограничениями

$$a_n(x)\in Ax;\ A=[a_-,a_+];\ ||b_n(x,y)||\le b\,||y||,\ b>0,$$

$$||c_n(x)||\le c|x|,\ c>0,\ ||d_n(x,y)||\le d||y||,\ d>0, \quad (12)$$

и систему операторно-разностных уравнений

$$x_{n+1}= a_n(x_n)+ b_n(x_n,y_n),$$

$$y_{n+1}= c_n(x_n)+ d_n(x_n,y_n), n=0,1,2,\dots \quad (13)$$

<u>Теорема 1</u>. Если $(\forall w>0)((\ q_-:= [a + b[-w,w]]\ _->0)\wedge(\ |c+[-w,w]d|\le wq_-)$, то существуют «специальные» (положительные по первой компоненте) решения.

<u>Теорема 2</u>. Если $(d<a_-)\wedge(\ (a_- - d)^2>4bc)$, то выполняются условия Теоремы 1 и можно взять $w=(a_- -d-((a_- -d)^2-4bc)^{1/2})/(2b)$.

Теорема 3. Если $\omega := sup\{||a_n d_n - b_n c_n|| : n=1,2,3\ldots\}q_{-}^{-2} < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и «специального» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x,y\}:=lim_{n\to\infty} x_n/X_n$.

Теорема 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_{+}+bw)<1$, то «специальные» решения имеют асимптотическое свойство.

Эти теоремы доказываются аналогично теоремам для линейного случая [5]. Если $a_{-}>0$, то пространство $\Phi^{*}=\boldsymbol{R}$.

Переход от (8) к (13) осуществляется с помощью замены

$$\Xi_m(t) = W\big(t + mh, \varphi(\cdot)\big), -h \leq t \leq 0, \quad (14)$$

$$S_m \Xi(\cdot)(t) = \Xi(0) + \int_{-h}^{t} F(s + mh + h, \Xi(s))\, ds \quad (15)$$

- интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (8) на шаг h.

В качестве пространства Ω мы выбрали $\{y(t)\in C^{(1)}[-h,0]: y(0)=0\}$, с нормой $||y||_{\Omega} :=sup\{ |y(t)/t|: -h\leq t<0\}$, тогда $|y(t)| \leq ||y||_{\Omega}| t |$.

Используем подстановку $x(t) = x(0) + y(t)t$, где $y(t)$ - непрерывная функция; $S_m \Xi(\cdot)(t) = \Xi(0) + \int_{-h}^{t} F(s + mh + h, \Xi(s))\, ds$.

Имеем: $S(x + y(\cdot))(t) = x + \int_{-h}^{t} F(s, x + y(s))\, ds =$

$= x + \int_{-h}^{0} F\big(s, x + y(s)\big)ds + \int_{0}^{t} F\big(s, x + y(s)\big)\, ds =$

$= x + \int_{-h}^{0} F(s, x)ds + \int_{-h}^{0}\Big(F\big(s, x + y(s)\big) - F(s, x)\Big)\, ds +$

$+ \int_{0}^{t} F(s, x)ds + \int_{0}^{t}\Big(F\big(s, x + y(s)\big) - F(s, x)\Big)\, ds.$

Отсюда, обозначая $\Delta= p_0 h$, получаем для (12):

$[a_{-}, a_{+}] = [1 - \Delta, 1 + \Delta]$; $b = \Delta h/2$, $c = p_0$; $d = \Delta/2$.

Таким образом, для нелинейных уравнений с запаздыванием получаются результаты, аналогичные результатам для линейных уравнений.

Список использованных источников

1. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une equation différentielle // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1881, 3e série, tome 7, p. 375-422.

2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков, 1892. - 250 с.

3.Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. - Москва: Наука, 1972. - 352 с.

4. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения (Минск), 1977, т. 13, № 4. - С. 455-462.

5. Жээнтаева Ж.К. Исследование асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием с помощью расщепления пространства // Инновации в науке / Сборник статей по материалам LVII междунар. научно-практ. конф. № 5 (54). Часть I. Новосибирск: Изд. АНС СибАК , 2016. – С. 149-154.

6. Жээнтаева Ж.К. Асимптотическое уменьшение размерности пространства решений эволюционных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2019, № 1. - С. 98-105.

7. Levinson N. The asymptotic behavior of system of linear differential equations // American J. Math., 68, 1946. - Pp. 1-6.

MSC 45A05, 45B05

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Абдукаримов А.М.
Институт математики НАН КР

Бул макалада үчүнчү тартиптеги сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемелер системалардын чечиминин чексиз аймактагы чектелгендиги изилденет.

Урунттуу сөздөр: матрицалык функция, вектордук функция, дифференцирленүүчү вектордук функция, интегралдоо.

В этой статье изучается ограниченность решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка на бесконечных областях.
Чтобы показать ограниченность решения систем, применяется метод неотрицательных квадратичных форм.
Ключевые слова: матричная функция, вектор-функция, дифференцируемая вектор функция, интегрирование.

In this paper we study the boundedness of solutions of systems of linear integro-differential equations of the third order on infinite domains.
The method of nonnegative quadratic forms is applied to show the limitation of the solution of systems.
Keywords: matrix function, vector-function, differentiable vector function, integration.

Рассматривается векторно-матричное уравнение

$$Q(t,x)u_{txt}(t,x)+P(t,x)u_{tx}(t,x)+A(t,x)u_x(t,x)+B(t,x)u_t(t,x)+C(t,x)u(t,x)+$$
$$+\int_0^t K_1(t,x)M(t,x,s)K_1(s,x)u_{xs}(s,x)ds+\int_0^x K_1(t,x)N(t,x,y)K_1(t,y)u_{ty}(t,y)dy+$$
$$+\int_0^t\int_0^x K_1(t,x)K(t,x,s,y)K_1(s,y)u_{sy}(s,y)dyds=f(t,x),$$
$$(t,x)\in G=\{(t,x)/0\le t<\infty, 0\le x<\infty\}, \qquad (1)$$
$$f(t,x)\in L_{2,n}(G)\cap C_n(G), \qquad (f')$$

с условиями

$$u(0,x)=0, \qquad x\in[0, \ +\infty),$$
$$u(t,0)=0, \qquad t\in[0, \ +\infty). \qquad (*)$$
$$u_{tx}(0,x)=0, \qquad x\in[0, \ +\infty)$$

где $Q(t,x)P(t,x)A(t,x), B(t,x), C(t,x), K_1(t,x), M(t,x,s), K(t,x,s,y), N(t,x,y)$ - $n\times n$мерные самосопряженные заданные матричные функции, $f(t,x)$- заданная и $u(t,x)$ -неизвестная n-мерные вектор- функции; $(t,x)\in G$.

В [2] статье введено понятие производной и дифференциала функции по возрастающей функции $\varphi(x)$. Здесь на основе этого понятия изучены вопросы квадратичной интегрируемости решений интегро-дифференциальных уравнений с частным производным на бесконечной области. Вопросы ограниченности квадратичной интегрируемости и устойчивости решений для дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений изучались во многих работах, например в [1,3 ,4].

Нам понадобятся следующие легко доказуемые леммы:

ЛЕММА 1. Пусть k – самосопряженная дифференцируемая матричная функция размера $n\times n$ и $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ - – дифференцируемые вектор-функции. Тогда справедливо соотношение

$\left\langle k\vartheta,\vartheta_s\right\rangle=\frac{1}{2}\langle k\vartheta,\vartheta\rangle_s-\frac{1}{2}\left\langle k_s\vartheta,\vartheta\right\rangle$, где $\langle u,\vartheta\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\vartheta_i$;

ЛЕММА 2. Для любых дифференцируемых K,ν имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\langle K\nu_{\tau z}\rangle=\langle K\nu\rangle_{\tau z}-\langle K_\tau\nu\rangle_z-\langle K_z\nu\rangle_\tau+\langle K_{\tau z}\nu\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\nu-n$ - мерный вектор.

ЛЕММА 3. Для любых дифференцируемых K,ϑ имеющих смешанные производные, справедливо соотношение

$$\left\langle K\vartheta,\vartheta_{sy}\right\rangle=\frac{1}{2}\langle K\vartheta,\vartheta\rangle_{sy}-\frac{1}{2}\langle K_s\vartheta,\vartheta\rangle_y-\frac{1}{2}\langle K_y\vartheta,\vartheta\rangle_s+\frac{1}{2}\langle K_{sy}\vartheta,\vartheta\rangle-\left\langle K\vartheta_s,\vartheta_y\right\rangle,$$

где K – самосопряженная матрица размера $n\times n$, а $\vartheta(s,y)$ - n – мерный вектор.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия: (f'),

а) матричные функции: $Q(t,x)P(t,x)A(t,x), B(t,x), C(t,x), A_x(t,x), B(t,x)$,

$B_t(t,x)\in C_{n\times n}(G)$, $<Q(t,x)>\ge 0$, $<P(t,x)>\ge 0$, $<B(t,x)>\ge 0$

$P(t,x)\ge\beta\cdot E,\qquad \beta>1$

$<A(t,x)>\ge 0$, $<B(t,x)>\ge 0$, $<-\left[A_t(t,x)\right]\vartheta,\vartheta>-2<C(t,x)\vartheta,w>-<B_x(t,x)w,w>\le 0$,

$<[C(t,x)]>\ \ge\alpha\cdot E,\ \alpha>0$ при $(t,x)\in C(G)$,

б) матричные функции: $M(t,x,s), M_t(t,x,s), M_s(t,x,s), M_{ts}(t,x,s)\ \in C_{n\times n}(G_1)$,

$M(t,x,0)\ge 0$, $M_t(t,x,0)\le 0$, при $(t,x)\in G$ и $M_s(t,x,s)\ge 0$,

$M_{ts}(t,x,s)\le 0$ при $(t,x,s)\in G_1$; $G_1=\{(t,x,s):\ 0\le s\le t<\infty;\ \ 0\le x<\infty\}$;

$N(t,x,y),\ N_x(t,x,y),\ N_y(t,x,y),\ N_{xy}(t,x,y)\ \in C_{n\times n}(G_2)$,

$N(t,x,0)\ge 0$, $N_x(t,x,0)\le 0$ при $(t,x)\in G$ и $N_y(t,x,y)\ge 0$, $N_{xy}(t,x,y)\le 0$

при $(t,x,y)\in G_2$; $G_2 = \{(t,x,y):\ 0\le t<\infty;\quad 0\le y\le x<\infty\}$;

в) матричные функции:

$K(t,x,s,y), K_y(t,x,s,y), K_s(t,x,s,y), K_t(t,x,s,y), K_x(t,x,s,y),$

$K_{ts}(t,x,s,y), K_{tx}(t,x,s,y), K_{xs}(t,x,s,y), K_{xy}(t,x,s,y), K_{txy}(t,x,s,y), K_{tys}(t,x,s,y), K_{xsy}(t,x,s,y)$

и $K_{txsy}(t,x,s,y) \in C_{n\times n}(G_3)$, $G_3 = \{(t,x,s,y):\ 0\le s\le t<\infty;\ 0\le y\le x<\infty\}$

$K_y(t,x,0,y)\equiv 0$ при $(t,x,y)\in G_2$, $K_s(t,x,s,0)\equiv 0$ при $(t,x,s)\in G_1$,

$K(t,x,0,0)\ge \alpha>0,\quad K_t(t,x,0,0)\le 0$, $K_x(t,x,0,0)\le 0,\quad K_{tx}(t,x,0,0)\ge 0$

при $(t,x)\in G$ и $K_{sy}(t,x,s,y)\ge 0$, $K_{tsy}(t,x,s,y)\le 0$, $K_{xsy}(t,x,s,y)\le 0$,

$K_{txsy}(t,x,s,y)\ge 0$ при $(t,x,s,y)\in G_3$;

г) для любых $u,\vartheta\in R^n$ $<-M_t(t,x,0)u,u>-2<K(t,x,0,0)u,\vartheta>-<N_x(t,x,0)\vartheta,\vartheta>\le 0$

при $(t,x)\in G$, то задача (1) – (*) имеет единственное решение в $L_{2,n}(G)\cap C_n(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем следующую подстановку

$$u(t,x)=\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)dyds,\quad (t,x)\in G. \qquad (2)$$

Тогда задача (1)-(*) сводится к следующей системе интегральных уравнений второго рода

$$Q(t,x)\vartheta_t(t,x)+P(t,x)\vartheta_x(t,x)+A(t,x)\int_0^t \vartheta(s,x)ds+B(t,x)\int_0^x \vartheta(t,y)dy+C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(s,y)dyds+$$

$$+\int_0^t K_1(t,x)M(t,x,s)K_1(s,x)\vartheta(s,x)ds+\int_0^x K_1(t,x)N(t,x,y)K_1(t,y)\vartheta(t,y)dy+$$

$$+\int_0^t\int_0^x K_1(t,x)K(t,x,s,y)K_1(s,y)\vartheta(s,y)dyds = f(t,x), \qquad (3)$$

Ясно, что, задача (1)-(*) эквивалентна системе интегральных уравнений (2)-(3). Умножив скалярно обе части системы (3) на вектор функцию $\vartheta(t,x)$ и интегрируя по области

$G_{tx}=\{(s,y): 0\le s\le t,\ 0\le y\le x\}$, имеем:

$$\int_0^t\int_0^x <Q(s,y)\vartheta_s(s,y),\vartheta(s,y)>dyds+\int_0^t\int_0^x <P(s,y)\vartheta(s,y),\vartheta(s,y)>dyds+$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < A(s,y)\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y)> d\tau dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^z < B(s,y)\vartheta(s,z),\ \vartheta(s,y)> dzdyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)> dzd\tau dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s < K_1(s,y)M(s,y,\tau)K_1(\tau,y)\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y)> d\tau dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y < K_1(s,y)N(s,y,z)K_1(s,z)\vartheta(s,z),\vartheta(s,y)> dzdyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K_1(s,y)K(s,y,\tau,z)K_1(\tau,z)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)> dzd\tau dyds = \int_0^t\int_0^x < f(s,y),\vartheta(s,y)> dyds\,.$$

Введем обозначение $v_1(t,x) =< K_1(t,x), v(t,x) > (t,x) \in G$

$$\int_0^t\int_0^x < Q(s,y)\vartheta_s(s,y),\vartheta(s,y)> dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x < P(s,y)\vartheta(s,y),\vartheta(s,y)> dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < \left[A(s,y)\right]\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y)> d\tau dyds +$$

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^z < B(s,y)\vartheta(s,z),\ \vartheta(s,y)> dzdyds$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y)\vartheta(\tau,z),\vartheta(s,y)> dzd\tau dyds + \int_0^t\int_0^x\int_0^s < M(s,y,\tau)\vartheta_1(\tau,y),\vartheta_1(s,y)> d\tau dyds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y < N(s,y,z)\vartheta_1(s,z),\vartheta_1(s,y)> dzdyds$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < K(s,y,\tau,z)\vartheta_1(\tau,z),\vartheta_1(s,y)> dzd\tau dyds =$$

$$= \int_0^t\int_0^x < f(s,y),\vartheta(s,y)> dyds\,. \qquad (4)$$

На основании леммы 1 третье слагаемое левой части системы преобразуем к следующему виду:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s < \left[A(s,y)\right]\vartheta(\tau,y),\vartheta(s,y)> d\tau dyds = = \int_0^x\int_0^s < \left[A(s,y)\right]\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau, \frac{\partial}{\partial s}\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau > dyds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x < \left[A(t,y)\right]\int_0^t \vartheta(\tau,y)d\tau, \int_0^t \vartheta(\tau,y)d\tau > dy - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < \left[A_s(s,y)\right]\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau, \int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau > dyds\,. \quad (5)$$

Аналогично, для четвертого слагаемого получаем

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^z < B(s,y)\vartheta(s,z),\vartheta(s,y) > dzdyds = \frac{1}{2}\int_0^t < B(s,x)\int_0^x \vartheta(s,z)dz, \int_0^x \vartheta(s,z)dz > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_y(s,y)\int_0^y \vartheta(s,z)dz, \int^y \vartheta(s,z)dz > dyds. \qquad (6)$$

Заметив, что $\frac{\partial^2}{\partial s \partial y}\int_0^s\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau = \vartheta(s,y)$, и используя лемму 3, пятое слагаемое левой части системы (4) перепишем в виде:

$$\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y < C(s,y)\vartheta(\tau,z), \vartheta(s,y) > dzd\tau dyds = \frac{1}{2} < C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau > -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau > ds - \frac{1}{2}\int_0^x < C_y(t,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau,$$

$$\int_0^t\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau > dy + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < C_{sy}(s,y)\int_0^s\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau, \int_0^s\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau > dyds -$$

$$\int_0^t\int_0^x < C(x,y)\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau, \int_0^y \vartheta(s,z)dz > dyds. \qquad (7)$$

Учитывая соотношения (4) – (7) и (5) – (7), условия г) и формулу Дирихле, из (4) имеем:

$$\int_0^t\int_0^x < Q(s,y)\vartheta_s(s,y),\vartheta(s,y) > dyds + \int_0^t\int_0^x < P(s,y)\vartheta(s,y),\vartheta(s,y) > dyds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x < A(t,y)\int_0^t v(\tau,y)d\tau, \int_0^t v(\tau,y)d\tau > dy$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x \{ < [A_s(s,y)]\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau,$$

$$\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau > + 2 < C(s,y)\int_0^s \vartheta(\tau,y)d\tau, \int_0^y \vartheta(s,z)dz > + < B_y(s,y)\int_0^y \vartheta(s,z)dz, \int_0^y \vartheta(s,z)dz > \} dyds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t < B(s,x)\int_0^x \vartheta(s,z)dz, \int_0^x \vartheta(s,z)dz > ds - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x < B_y(s,y)\int_0^y \vartheta(s,z)dz, \int_0^y \vartheta(s,z)dz > dyds +$$

$$+\frac{1}{2} < C(t,x)\int_0^t\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau, \int_0^t\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau > -\frac{1}{2}\int_0^t < C_s(s,x)\int_0^s\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau, \int_0^s\int_0^x \vartheta(\tau,z)dzd\tau > ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x <C_y(t,y)\int_0^t\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau,\int_0^t\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau > dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <C_{sy}(s,y)\int_0^s\int_o^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau,$$

$$\int_0^s\int_0^y \vartheta(\tau,z)dzd\tau > dyds+\frac{1}{2}\int_0^x <M(t,y,0)\int_0^t \vartheta_1(\xi,y)d\xi\times$$

$$\times\int_0^t \vartheta_1(\xi,y)d\xi > dy+\frac{1}{2}\int_0^t <N(s,x,0)\int_0^x \vartheta_1(s,\nu)d\nu,\int_0^x \vartheta_1(s,\nu)d\nu > ds+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <N_z(s,x,z)\int_z^x \vartheta_1(s,\nu)d\nu,\int_z^x \vartheta_1(s,\nu)d\nu > dzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <M_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^t \vartheta_1(\xi,y)d\xi,\int_\tau^t \vartheta_1(\xi,y)d\xi > dyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\left[<M_s(s,y,0)\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\xi,\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\xi > +2<K(s,y,0,0)\int_0^s \vartheta_1(\xi,y)d\xi,\int_0^y \vartheta_1(s,\nu)d\nu > +\right.$$

$$\left.+<N_y(s,y,0)\int_0^y \vartheta_1(s,\nu)d\nu,\int_0^y \vartheta_1(s,\nu)d\nu >\right]dyds-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y\left\{<\frac{1}{y}M_{\tau s}(s,y,\tau)\times\right.$$

$$\times\int_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\xi > +2<K_{\tau z}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s \vartheta_1(\xi,y)d\xi,\int_z^y \vartheta_1(s,\nu)d\nu > +$$

$$\left.+<\frac{1}{s}N_{zy}(s,y,z)\int_z^y \vartheta_1(s,\nu)d\nu,\int_z^y \vartheta_1(s,\nu)d\nu >\right\}dzd\tau dyds+\frac{1}{2}<K(t,x,0,0)\times$$

$$\times\int_0^t\int_0^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > -\frac{1}{2}\int_0^t <K_s(s,x,0,0)\int_0^s\int_0^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x <K_y(t.y,0,0)\int_0^t\int_0^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^t\int_0^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dy+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <K_{sy}(s,y,0,0)\times$$

$$\int_0^s\int_0^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_0^s\int_0^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dyds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x <K_{\tau z}(t,x,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,$$

$$\int_\tau^t\int_z^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^y <K_{\tau zy}(t,y,\tau,z)\int_\tau^t\int_z^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^t\int_z^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzdyd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s <K_{\tau zs}(s,x,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^x \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > d\tau dzds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^x\int_0^s\int_0^y <K_{z\tau sy}(s,y,\tau,z)\int_\tau^s\int_z^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi,\int_\tau^s\int_z^y \vartheta_1(\xi,\nu)d\nu d\xi > dzd\tau dyds=$$

$$= \int_0^t \int_0^x < f(s,y), \vartheta(s,y) > dyds \qquad (8)$$

В силу условий а) – г) левая часть соотношения (8) неотрицательна и отсюда с учетом (4) следует оценка

$$\int_0^t \int_0^x [Q(s,y) v_s(s,y), v(s,y) dyds] \le \frac{1}{2} \left(\int_0^t \int_0^x Q(s,y) \|v_s(s,y)\|^2 dyds + \right.$$

$$+ \int_0^t \int_0^x Q(s,y) \|v(s,y)\|^2 dyds \left. \right) +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \|u(t,x)\|^2 \le \left\| \int_0^t \int_0^x < f(s,y), v(s,y) > dyds \right\|. \qquad (9)$$

В правой части неравенства (9) применяем неравенство Коши – Буняковского.

$$\int_0^t \int_0^x \beta \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \frac{\alpha}{2} \|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \|f(s,y)\|^2 dyds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds.$$

$$(2\beta - 1) \int_0^t \int_0^x \|\vartheta(s,y)\|^2 dyds + \alpha \|u(t,x)\|^2 \le \int_0^t \int_0^x \|f(s,y)\|^2 dyds$$

$$\|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^x \|f(s,y)\|^2 dyds, \quad (t,x) \in G$$

Из последнего неравенства переходом к пределу при $t \to \infty$ и $x \to \infty$ получим

$$\|u(t,x)\|^2 \le \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty \|f(s,y)\|^2 dyds \ \text{ при } (t,x) \in G.$$

Таким образом, теорема доказана.

Список использованных источников

1. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. – 352 с.

2. Асанов А. Манас университети, Табигый Илимдер журналы, №1 – Бишкек, 2001. С. 18-45.

3. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений дифференциальных уравнений с частными производными на бесконечных областях //Вестн. КГНУ. – Бишкек, 2001. – Вып. 6. – С. 80–84.

4. Асанов А., Абдукаримов А.М. О квадратичной интегрируемости решений линейных двумерных интегро-дифференциальных уравнений с

частными производными на бесконечных областях //Вестн. ОшГУ. Сер.физ.-мат. наук. – Ош, 2003. – Вып. 7. – С. 35–40.

MSC 49M37

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ КЫРГЫЗСТАНА

Жусупбаев А., Асанкулова М.. Суйуналиева Н., Чороев К.
Институт математики НАН КР

ЕАЭС эл аралык рыноктун шартында Кыргыз Республикасы үчүн макроэкономикалык тармак аралык моделди түзүү актуалдуу проблема болуп эсептелет. Түзүлүштүк өзгөрүүлөрдү анализдөө үчүн үч секторлуу тармак аралык модель сунушталды. Ал модель сызыкту эмес, себеби секторлодун продукция чыгаруусу сызыктуу эмес өндүрүштүк функциялар аркылуу берилет. Моделде башкаруүэмгек жана инвестиция ресурстарын баа тариф, салык жана башка эконмикалык инструменттер аркылуу жүргүзүлөт.

Урунттуу сөздөр: экономикалык системанын «архитектурасы», экономикалык системанын динамикалык өсүшү, коомдук өндүрүштөгү сызыктуу эмес структуралык өзгөрүүлөр, экономиканын биринчи жана экинчи тартиптеги секторлорунун өнүгүүсү, экономикалык өсүштүүн неоклассикалык модели.

В условиях международного рынка ЕАЭС разработка новой макроэкономической межотраслевой модели для Кыргызской Республики, является актуальной проблемой. Для анализа структурных изменений предложена трехсекторная межотраслевая модель. Трехсекторная модель является нелинейная, так как выпуски секторов заданы нелинейными производственными функциями. Управление осуществляется путем распределения трудовых и инвестиционных ресурсов с помощью цен, тарифов, налогов и других экономических инструментов.

Ключевые слова: «архитектура» экономической системы,динамичное развитие экономических систем, нелинейность структурных изменений общественного производства, трехсекторная модель, развитие первичных и вторичных секторов экономики, создание новой модели экономики.

In the conditions of the EAEU international market, the development of a new macroeconomic intersectoral model for the Kyrgyz Republic is a problem. To analyze structural changes, a three-sector intersectoral model is proposed. The three-sector model is non-linear, since it is convex. Management is carried out by the distribution of labor and investment resources sing prices, tariffs, taxes and other economic instruments.

Keywords:"architecture" of economic system, dynamic development of economic systems, nonlinearity of structural changes of a social production, development of primary and secondary sectors of economy, creation of new model of economy, neoclassical models of economic growth.

Дальнейшее развитие экономики Кыргызстана в как полноправного члена ЕАЭС требует от ученых - специалистов новые подходы и методологии анализа, моделирования и прогнозирования отечественной экономики. Разработка новой макроэкономической межотраслевой модели, учитывающей рыночный характер отечественной экономики должна учитывать проблему обеспеченности внутреннего рынка отечественными товарами (особенно потребности продовольственного рынка), а также соотношение импорта и экспорта. В настоящее время Кыргызстан переживает период кардинальной структурных изменений. Именно структурные изменения – структура выпуска, структура затрат, ценовые соотношения, структура доходов – определяют суть того, что в последние годы происходит в стране.

Для эффективного роста экономики необходимо анализ и прогноз структурных изменений экономики страны. Анализ структурных изменений общественного производства страны показывает, что оно значительно отличается от стандартных значений, которые сложились в передовых развитых странах – доля сельского хозяйства в ВВП составляет от 1,5% до 12% (у нас - 31%), доля промышленности составляет от 22% до 45 % ВВП (в КР - 27,8%), доля транспорта и связи от 2,3% до 15,3% (в КР - 10%), доля торговли составляет от 10 до 25% (в КР - 16,2%) и финансовые услуги составляют от 12% до 28% (в КР - 0,47%) [1]. На наш взгляд, невозможно объяснить причины неравномерного роста не прибегая к анализу и рассмотрению проблем с точки зрения структуры экономики. Та структура производства, которая сформировалась в последние годы – с большей долей сырьевого сектора – не может нас удовлетворить и, самое главное, она не содержит потенциала долгосрочного развития. Таким образом, если говорить о каком-либо позитивном сценарии развития на перспективу и о прогнозе, то он с необходимостью должен содержать в себе развитую структурную составляющую.

Структура экономики в модели должна быть существенным моментом для результатов расчетов, т.е. она, во-первых, должна быть восприимчивой к изменениям параметров экономической политики, а во-вторых, в свою очередь оказывать воздействие на характеристики макроэкономической динамики и эффективности производства.

В последние годы структура экономики страны претерпела значительные изменения, носил неравномерный характер. Решение экономических, социальных и экологических проблем не учитывала эффективности функционирования составных элементов структуры экономики, включающей базовые отрасли, рыночную инфраструктуру и сферу жизнеобеспечения. Проблему экономического роста необходимо решить в отсутствии качественных характеристик в общественном производстве, в слабой экспортной составляющей ориентированных на экстенсивное развитие (всевозрастающим расходом финансовых ресурсов). Для эффективного роста экономики необходимо анализ и прогноз структурных изменений экономики страны.

Значительное отличие структуры экономики КР показывает преимущественное развитие первичного (сельского хозяйства) и вторичного (промышленность) секторов нашей экономики и значительным отставанием других секторов (особенно отраслей услуг и финансовой индустрии). Последние два сектора будут существенно возрастать по объему, численности занятых и используемого капитала, они будут задавать качественные изменения в первых двух секторах. Такое функциональное деление экономики ставит задачу интеграции и взаимозависимости «архитектуры» экономической системы, а в будущем служит толчком для создания нового технологического уклада и высокотехнологичных отраслей лидеров.

Создание новой модели экономики требует изменения макроструктурных пропорций, а именно ориентация на внутренний спрос и сокращение доли импорта, увеличение доли отечественных товаров, увеличение доходов и накоплений реального сектора, изменение структуры товарного производства в пользу обрабатывающей промышленности.

Анализ основных тенденций развития экономики свидетельствует о том, что при удовлетворительных результатах макроэкономического развития, экономика не сбалансирована на структурном уровне. Одновременно с низким ростом ВВП, вроде бы стабильным – нацинальный валютой сомом, большим дефицитом бюджета, высоким государственным долгом и высокой процентной ставкой на кредиты, происходит увеличение расходов государства, высокая безработица и налицо неравномерное развитие регионов.

Макроэкономическая динамика - сложный, многогранный процесс, затрагивающий аспекты экономического, институционального и социального развития. Поэтому оценка влияния происходящих в экономике структурных изменений, на макроэкономическую динамику является особенно актуальной.

В экономической системе можно выделить экономические пропорции, которые определяют качество и эффективность экономических процессов. К таковым относятся, например, структура собственности, доходов, потребления и накопления, национального богатства. На наш взгляд, сферы потребления и накопления выступают главными компонентами экономической системы, структурные сдвиги в которых оказывают существенное влияние на макроэкономическую динамику любой страны (рис. 1).

Рис 1. Механизм взаимосвязи структурных изменений в потреблении и накоплении и макроэкономической динамики

В последнее время для анализа экономического роста часто используется нелинейные классические модели. Для анализа воспроизводственного процесса и структурных изменений недостаточно рассматривать экономику, состоящую только из двух подразделений. Ведь средства производства, являющиеся продуктом первого подразделения, включают две принципиально отличные друг от друга составляющие: предметы труда, используемые в одном производственном цикле, и средства труда, принимающие участие во многих производственных циклах.

Таким образом, разделив первое подразделение на два сектора — материальный и фондосоздающий, приходим к модели трехсекторной экономики:

1) материальный (нулевой) сектор — предметы труда (топливо, электроэнергия, сырье и другие материалы);

2) фондосоздающий (первый) сектор — средства труда (машины, оборудование, производственные здания, сооружения и т.д.);

3) потребительский (второй) сектор — предметы потребления. Предполагается, что за каждым сектором закреплены основные производственные фонды (ОПФ), в то время как трудовые ресурсы и инвестиции могут свободно перемещаться между секторами.

Кроме того, примем предположения, аналогичные сделанным в односекторной модели Солоу, которая выполняет роль базовой.

1. Технологический уклад считается постоянным и задается с помощью линейно-однородных неоклассических производственных функций:

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \qquad i = 0,1,2,$$

где $X_i, K_i, L_i -$ выпуск, ОПФ и число занятых в $i -$ секторе.

2. Общее число занятых в производственной сфере L изменяется с постоянным темпом прироста ν.

3. Лаг капиталовложений отсутствует.

4. Коэффициенты износа ОПФ μ_i, и прямых материальных затрат a_i, секторов постоянны.

5. Экономика замкнутая, т.е. внешняя торговля напрямую не рассматривается.

6. Время t изменяется непрерывно.

Предположение 2 в дискретном времени имеет вид (t — номер года): которое при переходе к непрерывному времени принимает форму:

$$\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{L(t)}=\nu\Delta t.$$

Последнее соотношение при $\Delta t \to 0$ переходит в дифференциальное уравнение: $\frac{L(t)}{dt}=\nu\Delta t,\ \ L(0)=L^0,$

которое имеет решение: $L=L^0e^{\nu t}$ (1)

где $\frac{L(t+1)-L(t)}{L(t)}=\nu.$

Из предположений 3,4 вытекает, что изменение за год ОПФ $i-$го сектора состоит из двух частей: износа $(-\mu_iK_i)$ и прироста за счет валовых капиталовложений $(+I_i)$, т. е.

$$K_i(t+1)-K_i(t)=-\mu_iK_i(t)+I_i(t),\qquad i=0,1,2,$$

$$[\mu_iK_i(t)+I_i(t)]$$

или в непрерывном времени: $K_i(t+\Delta t)-K_i(t)=-[\mu_iK_i(t)+I_i(t)]\Delta t.$

При $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальные уравнения для ОПФ секторов:

$$\frac{dK_i}{dt}=\mu_iK_i(t)+I_i(t),\qquad K_i(0)=K_i^0, i=0,1,2. \qquad (2)$$

ОПФ и число занятых в секторах (K_i,L_i) можно определить в любой момент времени, т.е. в течение года.

Таким образом, при сделанных предположениях в состав трехсекторной модели входят следующие уравнения:

Трудовой баланс: $L=L_0+L_1+L_2$

Инвестиционный баланс: $X_1+Y_1=I_0+I_1+I_2$

Материальный баланс: $(1-\alpha_0)X_1=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2$

Динамика основных производственных фондов по секторам:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i, \text{где}, K_i|_{t=0} = K_i(0), \qquad i = 0,1,2;$$

Динамика трудовых ресурсов: $\frac{L(t)}{dt} = \nu L;$

3) три нелинейных статических элемента: $X_i = F_i(K_i, L_i),\ \ i = 0,1,2.$

Трехсекторная модель является динамической, поскольку имеет в своем составе четыре линейных динамических элемента. Она нелинейная, поскольку выпуски секторов заданы нелинейными производственными функциями. Также она многосвязна, поскольку ее состояние представлено тремя (не одной!) фазовыми (выходными) переменными, взаимосвязанными с помощью балансов.

Управление осуществляется путем распределения трудовых и инвестиционных ресурсов и это распределение реализуется косвенно, с помощью цен, тарифов, налогов и других экономических инструментов.

Список использованных источников.

1. Годовой отчет НБКР за 2017г. nbkr.kg.
2. Чороев К.. и др. Прогнозирование структурных изменений экономики Кыргызской Республики//Актуальные проблемы экономики и управления, 2(22)/2019-Санк-Петербург.- с. 59-64.

MSC 49M37

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА РАЗВИТИЯ ХОЗЯЙСТВА

Жусупбаев А., Асанкулова М., Жусупбаев Г.А.,
Институт математики НАН КР, КНАУ им.К. Скрябина

Бул жумушта мал чарба продукцисын өндүрүү жана кайра иштетүүнү оптималдаштыруу маселесине математикалык модель тургузулган, мындан өндүрүлүүчү жана кайра иштетилүчү мал-чарба продукциясынын оптималдуу көлөмдөрү жана аларды кайра иштетүү ишканасын куруугa жумшалуучу инвестициянын (кредиттин) көлөмү аныкталат.

Урунттуу сөздөр: математикалык модель, өндүрүш, кайра иштетүү, продукция, насыя, чарба, киреше, айдоо аянты, көптүк, чыгым, баа.

В работе разработана математическая модель задачи оптимизации производства и переработки продукции животноводства, где определяется оптимальный объем производимой и перерабатываемой продукции и соответствующий объем инвестиции (кредита), получаемый хозяйством для создания предприятия по переработке этой продукции.
Ключевые слова: математическая модель, производство, переработка, продукция, кредит, хозяйство, доход, посевная площадь, множество, расход, цена.

In the work, a mathematical model of the problem of optimizing the production and processing of livestock products is developed, where the optimal volume of produced and processed products and the corresponding amount of investment (credit) received by the farm to create an enterprise for processing these products are determined.
Keywords: mathematical model, production, processing, products, credit, economy, income, sown area, many, expense, price.

Сформулируем математическую модель задачи оптимального выбора варианта развития хозяйства, отличной от рассмотренной в [1] в следующей постановке.

1. Постановка задачи. Пусть животноводческое хозяйство имеющее посевные площади различной категории (орошаемые, богарные и др.) в размере s_k, $k \in K$ планирует развивать свою деятельность. Для хозяйства имеется широкая возможность на производство сельхоз продукции в зависимости от выбранного варианта развития r, $r \in R$. Так как продукции животноводства (мясо, молоко и др.) производимое хозяйством входит в состав скоропортящихся продуктов, то для них необходимо своевременное переработка. В этой связи хозяйство планирует создать у себя малое предприятие по переработке животноводческой продукции. Для создания малого предприятия хозяйству необходимо получить инвестиции (кредит). Размер инвестиции (кредита) получаемой хозяйством зависит от мощности создаваемого предприятия по переработке, а мощность переработки в своей очереди непосредственно связано от выбранного варианта развития хозяйства , т.е. от объема производимой продукции животноводства.

В зависимости от выбранного варианта развития $r \in R$ будут определены количество содержимых животных различного направления (

молочного, мясного и др.) и отводимых посевных площадей под кормовые культуры $s_k^r (s_k^r = \mathrm{s_k}),\ k \in K,\ r \in R$.

Требуется определить наилучший вариант развития хозяйства и соответствующий объем инвестиции (кредита) так чтобы, получаемая прибыль от производства, переработки и реализации продукции была максимальной.

Математическая модель задачи может быть представлена в следующем виде.

$$\sum_{v \in V_0} (d_v - c_v) z_v - \sum_{r \in R} (\Delta_l^r - (c^r + \Delta_0^r)) y^r \to max \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{r \in R} (a_j^r - \overline{a}_j^r) y^r = \sum_{v \in V} x_{jv},\ j \in J^*, \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in J^*} \frac{1}{a_{jv}} x_{jv} = z_v,\ v \in V,\ v \in V, \qquad (3)$$

$$\sum_{r \in R} k^r y^r \le G, \qquad (4)$$

$$\sum_{r \in R} y^r = 1, \qquad (5)$$

$$y^r \in \{0,1\}, \quad r \in R, \qquad (6)$$

$$x_{jv} \ge 0, \quad j \in J^*, \quad v \in V, \qquad (7)$$

где $$\Delta_0^r = \sum_{j \in J_0} \sum_{k \in K} c_{jk}^r \overline{x}_{jk}^r, \qquad \Delta_1^r = \sum_{j \in J_0} c_j \overline{y}_j^r, \quad r \in R,$$

а $\{\overline{x}_{jk}^r\}, \quad \{\overline{y}_j^r\}, \quad r \in R$ - оптимальные решения задачи

$$L(y,r) = \sum_{j \in J_0} c_j y_j^r - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J_0} c_{jk}^r x_{jk}^r \to max, \quad r \in R \qquad (8)$$

при условиях

$$\sum_{j \in J_0} x_{jk}^r = s_k^r,\ k \in K,\ r \in R, \qquad (9)$$

$$\sum_{k \in K} a_{jk}^r x_{jk}^r = v_j^r \ge b_j^r,\ j \in J_0,\ r \in R, \qquad (10)$$

$$v_j^r - b_j^r = y_j^r,\ \ j \in J_0,\ \ r \in R, \qquad (11)$$

$$x_{jk}^r \geq 0,\ \ \ j \in J_0,\ \ k \in K,\ \ \ r \in R, \qquad (12)$$

$$y_j^r \geq 0,\ \ j \in J_0,\ \ r \in R, \qquad (13)$$

где j- индекс вида сельхоз продукции производимой хозяйством, $j \in J$, а J - множество индексов вида сельхоз продукции хозяйства, $J=\{1,2,\ldots n\}$.

Множество J рассмотрим как объединение двух непересекающихся подмножеств, т.е. $J=J^* \cup J_0$, $J^* \cap J_0=\varnothing$.

J_0 - множество вида продукции растениеводства, направляемые на корм животных, $j \in J_0$;

J^* - множество видов продукции животноводства, предназначенные на переработку, $j \in J^*$;

v - индекс вида готовой продукции после переработки, $v \in V$;

V - множество видов получаемой продукции после переработки , $V=\{1,2,\ldots,v\}$.

Известные параметры:

s_k^r -размер посевной площади k-ой категории используемое хозяйством по r-му варианту развития (при любом варианте развития $r \in R$ хозяйство предпочитает использовать посевные площади всех категории полностью, т.е. $s_k^r = s_k$), $k \in K$, $r \in R$;

a_{jk}^r - урожайность j -го вида культуры на k-ой категории посевной площади при r-ом варианте развития хозяйства, $j \in J_0$, $k \in K$, $r \in R$;

b_j^r - годовая потребность хозяйства на j-ый вид продукции растениеводства используемый на корм животных по r -му варианту развития, $j \in J_0$, $r \in R$, где $b_j^r = \sum_{l \in L} \alpha_{jl}^r D_l^r$, $j \in J_0$, $r \in R$, α_{jl}^r - годовая потребность на j -й вид сельхоз продукции на одного животного, согласно l-го суточного рациона кормления по r -му варианту развития хозяйства, $j \in J_0$, $l \in L$, $r \in R$;

D_l^r - количество животного содержащиеся согласно по l-му суточному рациону кормления по r -му варианту развития, $l \in L$, $r \in R$;

c_j - оптовая цена реализации j -го вида продукции растениеводства, $j \in J_0$;

c_{jk}^r - расходы на единицу размера k-ой категории посевной площади под j -ый вид культуры в хозяйстве, $j \in J_0$, $k \in K$, $r \in R$;

a_j^r - объем производства продукции животноводства j -го вида по r-му варианту развития хозяйства, где $a_j^r = \sum_{l \in L} \theta_{jl}^r D_l^r$, $j \in J^*$, $r \in R$;

θ_{jl}^r - годовой объем продукции j-го вида получаемый из одного животного согласно l-го суточного рациона кормления по r -му варианту развития хозяйства, $j \in J_0$, $l \in L$, $r \in R$;

$a_{j\nu}$ - норма расхода j-го вида продукции животноводства на ν-го вида готовый продукции, $j \in J^*$, $\nu \in V$;

k^r - размер (кредита) используемое на создание перерабатывающего предприятия хозяйством по r-му варианту развития, $r \in R$;

c^r - суммарные расходы на производство продукции животноводства по r-му варианту развития, $r \in R$;

d_ν, c_ν - цена реализации и расход на единицу объема ν-го вида готовой продукции хозяйства, $\nu \in V$;

G - максимально допустимый размер инвестиции (кредита) получаемой хозяйством на развитие хозяйства (на создание перерабатывающего предприятия) ;

Δ_0^r - суммарные расходы хозяйства на производство продукции растениеводства по r -му варианту развития, $r \in R$;

Δ_1^r - доход получаемый хозяйством от реализации продукции растениеводства по r -му варианту развития, $r \in R$.

Искомые переменные

x_{jv} - объем продукции животноводства *j-го* вида направляемое на производство v-го вида готовый продукции, $j \in J^*$, $v \in V$; x_{jk}^r - размер посевной площади *k*-ой категории под *j*-ый вид культуры растениеводства по *r*-му варианта развития хозяйства, $j \in J_0$, $k \in K$, $r \in R$; v_j^r - объем производства *j*-го вида продукции растениеводства по *r*-му варианту развития, $j \in J_0$, $r \in R$; y_j^r- объем реализуемой продукции *j*-го вида растениеводства по *r*-му варианту развития, $j \in J_0$, $r \in R$; z_v - объем готовой продукции v-го вида для реализации хозяйством, $v \in V$; y^r - булева переменная, принимающее значение 0 или 1, определяющая вариант развития хозяйства, $r \in R$.

Целевая функция (1) определяет максимальный чистый доход хозяйства от производства и переработки сельхоз продукции;

Ограничение (2) потребует, что объем произведенной продукции животноводства каждого вида за исключением используемой продукции для внутренней нужды хозяйства должен быть распределен для производства на каждый вид производимой готовой продукции;

Ограничение (3) определяет объем реализуемой готовой продукции по каждому виду;

Ограничения (4) требует, что объем инвестиции (кредита) получаемой хозяйством для создания предприятия по переработке продукции животноводства, не должен превышать максимальной возможности хозяйства;

Равенства (5) указывает, что хозяйство должно выбирать только один вариант развития;

Условия (6) – булева переменная, принимающая значение 0 или 1, (7) требует не отрицательности искомых переменных.

Целевая функция (8) определяет чистой доход от производства и реализации продукции растениеводства, за исключением продукции используемый для внутренней нужды хозяйства;

Ограничение (9) требует, чтобы посевные площади всех категории хозяйство полностью были использованы для выращивания сельхоз культуры;

Ограничение (10) требует, что объем производства сельхоз продукции в хозяйстве должно быть не меньше объема потребности хозяйства для внутренней нужды, т.е. на корм.

Равенство (11) показывает объем реализуемой продукции растениеводства по каждому виду;

Условия (12) и (13) требует не отрицательности переменных.

2. Алгоритм решения задачи. Расчеты начинаем с определения значения параметров $b_j^r,\ j \in J_0,\ r \in R,\ a_j^r,\ j \in J^*,\ r \in R.$ Используя известные данные $s_k^r,\ k \in K,\ r \in R,\ a_{jk}^r,\ c_{jk}^r,\ j \in J_0,\ k \in K,\ r \in R,\ c_j,\ j \in J_0$ составляем числовую модель задачи согласно (8)-(13). Решая задачу для каждого варианта развития хозяйства $r \in R,$ будем определять оптимальные планы посевных площадей, отводимые под каждой вид культуры $\{\bar{x}_{jk}^r,\ j \in J_0,\ k \in K,\ r \in R\}$ и соответствующие объемы производства по каждому виду $\{\bar{v}_j^r,\ j \in J_0,\ r \in R\},$ а также объемы реализуемой продукции растениеводства $\{\bar{y}_j^r,\ j \in J_0,\ k \in K,\ r \in R\}$ и суммарный расход и доход хозяйства от реализации продукции растениеводства соответственно, т.е. $\{\Delta_0^r,\ \Delta_1^r,\ r \in R\}.$

Далее, сформулируем числовую модель вида (1)-(7) используя известные данные $a_{jv},\ j \in J^*,\ v \in V,\ a_j^r,\ \bar{a}_j^r,\ j \in J^*,\ r \in R,\ d_v,\ c_v,\ v \in V,\ k^r,\ \Delta_0^r,\ \Delta_1^r,\ c^r,\ G.$

Из решения сформулированной числовой модели вида (1)-(7) определяем эффективной вариант развития и соответствующий размер (кредита) доставляющий хозяйству максимум суммарной прибыли от производства, переработки и реализации сельхоз продукции, т.е. определяем оптимальный план $\{\bar{y}^r,\ r \in R\}$ и соответствующие значения искомых переменных $\{\bar{x}_{jk}^r,\ y_j^r,$ $j \in J_0,\ k \in K,\ r \in R,\ z_v,\ v \in V\}.$ Алгоритм расчета заканчивается.

Список использованных источников

1. Борубаев А.А., Жусупбаев А., Асанкулова М. Математическая модель определения эффективного варианта развития агрофирмы региона (рукопись научного исследования) // Свидетельство № 3712 Кыргызпатента от 16 сентября 2019 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ