Ю.А. Ведь
С. Искандаров

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ И КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$x'(t) = F\left(t, x, \int_{t_0}^{t} K(t,\tau, x(\tau))\,d\tau, \int_{t_0}^{T} H(t,\eta, x(\eta))\,d\eta\right)$$

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

Институт математики

Ю.А. Ведь
С. Искандаров

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ И КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Посвящается
всем нашим учителям
с глубокой благодарностью
за их бесценные уроки.*

Бишкек – 2023

УДК 517.968.72+74
ББК 22.161.6
В 26

Рекомендована к изданию Ученым советом
Института математики НАН Кыргызской Республики
(протокол № 3 от 9 декабря 2022 года)

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, профессор А.Саадабаев,
д-р физ.-мат.наук, профессор А.Асанов.

Ведь Ю.А., Искандаров С.

В 26 Некоторые вопросы общей и качественной теории интегро-дифференциальных уравнений. – Б.: «Айат», 2023. – 232 с.

ISBN 978-9967-16-302-7

В монографии исследуются вопросы корректности различных начальных задач для систем интегро-дифференциальных уравнений вольтерра-фредгольмого типа, типа Вольтерра, типа Фредгольма на конечном и бесконечном отрезках. Развиваются метод специальных последовательных приближений, метод последовательных приближений Пикара и принцип сжатых отображений Банаха, исследован вопросы ограниченности и стремления к конечным пределам решений рассматриваемых задач. Также исследуются асимптотические свойства (оценка, ограниченность, устойчивость, стремления к нулю и др.) на полуоси решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра различных порядков, асимптотическая эквивалентность систем линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Строятся иллюстративные примеры и показывается существенность некоторых наложенных условий.

Монография будет полезной для научных работников, соискателей ученых степеней, магистрантов и студентов по специальностям математика и механика.

УДК 517.968.72+74

ББК 22.161.6

ISBN 978-9967-16-302-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

«Учитель – плодоносное дерево»
/Кыргызская народная поговорка/

Эта монография наша совместная работа с моим дорогим учителем Юрием Александровичем Ведь. Я с октября 1975 года по 31 марта 2007 года работал с ним в тесном контакте. Мне повезло с научным руководителем. Юрий Александрович был талантливым математиком, крупным специалистом по общей и качественной теории интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами (с запаздывающими аргументами, с опережением аргументов, нейтрального типа), разностных и суммарно-разностных уравнений.

Сначала у меня ничего не получалось, было время, когда я хотел уйти думая о том, что наука не для меня. Иногда и Юрию Александровичу говорил об этом. Он убедил меня в том, что со временем всё образуется, и я остался работать.

Я учился у Юрия Александровича и учился с удовольствием, он мне раскрывал свои секреты ведения научно-исследовательских работ, мне говорил о таких вещах, которых нет ни в одном учебнике, ни в одной монографии. Юрий Александрович решал такие интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра и Фредгольма, что с трудом удаётся другим математикам и проводил проверку правильности найденных решений. Вот тут, как раз, начинается трудность. Он знал, как провести проверку более лёгким способом и меня научил этому. Это один из его секретов. Я с искренней благодарностью вспоминаю годы наших совместных работ. Теперь я начинаю понимать некоторые вещи - он долго не пропускал меня к защите. Он хотел, чтобы я работал, работал и работал, потому, что я действительно начал работать с рвением, стал получать новые научные результаты. Он, наверно, знал о том, что, если бы я стал молодым кандидатом наук, может быть я перестал бы работать. Оказывается, он хотел, чтобы я продолжил его научные дела, научные дела нашей лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений (ЛТИДУ), и дела всемирно известной кыргызской школы по интегро-дифференциальным уравнениям, возглавляемой нашими дорогими учителями - член-корреспондентом АН Киргизской ССР, д,ф.-м.н., профессором Яковым Васильевичем Быковым и академиком НАН Кыргызской Республики, чл.-корреспондентом Российской АН Мурзабеком Иманалиевичем Иманалиевым. Всё это я начал понимать тогда, когда мои дорогие учителя покинули этот мир. Теперь я вспоминаю своих учителей и думаю о своих учениках, и задаюсь вопросом: смогу ли я учить своих учеников так, как мои учителя меня учили?

Мне помнится, мы с Юрием Александровичем 40 лет назад хотели и планировали написать монографию об асимптотических свойствах решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Наша задумка так и осталась на бумажке. Не написали. Вот теперь я, уже без Юрия Александровича, задумал написать монографию. Конечно, если бы был Юрий Александрович, получилась бы другая монография, не такая, какую я предлагаю. Но тем не менее я начал писать и написал то, что получилось.

Я долго думал о том, какие результаты Юрия Александровича включить в данную монографию. Юрий Александрович оставил богатое научное наследие, написал и опубликовал более 250 научных работ. Из этих его работ в главу 1 включил 5 статей, результаты которых весьма оригинальные и основополагающие. Его результаты по корректности начальных и предельных задач для различных классов интегро-дифференциальных уравнений на конечных и бесконечных отрезках, составляющие содержание первой главы написаны с большим мастерством, и они могут быть использованы как «Спецкурс» для математических специальностей ВУЗов. Следует отметить, что в первых трёх параграфах главы 1 Юрий Александрович показал существенность основных достаточных условий, а это требует построения общего решения конкретных интегро-дифференциальных уравнений, что является очень трудным делом.

В главу 2 включены результаты научных исследований второго автора (§§1-9) и §10, написанный совместно с Юрием Александровичем.

При написании настоящей монографии я почувствовал поддержку со стороны моих коллег, особую поддержку оказал директор нашего Института, академик Алтай Асылканович Борубаев.

При подготовке рукописи к изданию неоценимую помощь оказал мой ученик,к.ф.-м.н., с.н.с. ЛТИДУ ИМ НАН КР А.Т. Халилов; также приняли участие: с.н.с. лаб. ПМиИ М.М.Шаршенбеков, м.н.с. лаб. ТОЗ ИМ НАН КР З. Б. Бокобаева, м.н.с. ЛТИДУ ИМ НАН КР Г.С. Искандарова, студентка КРСУ З.С.Искандарова.

Всем названным моим коллегам выражаю глубокую благодарность. **Отдельно выражаю благодарность Ведь Александру Юрьевичу за финансовую поддержку в подготовке и опубликовании данной монографии.**

Искренно благодарен рецензентам нашей монографии: д.ф.-м.н., профессору Аскербеку Саадабаеву и д.ф.-м.н., профессору Авыту Асанову за объективную оценку нашей работы, ценные советы и поддержку наших исследований.

Замечания и пожелания с благодарностью принимаю.

Самандар Искандаров, E-mail: mrmacintosh@list.ru

Введение

Оценки и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси

Как известно, теоретическая необходимость исследования различных задач для интегро-дифференциальных уравнений с различными пределами интегрирования с операторами Вольтерра и Фредгольма, а также Волтерра-Фредгольма, в связи с изучением некоторых практических задач для процессов с последействием (с предысторией), процессов в средах с памятью, обоснована в монографиях В.Вольтерра [1, с.162-227; 2, с.177-230], Я.В.Быкова [3,с.3-9], М.И.Иманалиева [4], А.Д.Мышкиса [5, с.9-16], G.Gripenberg`s, S.- O.Londen`s, O. Staffans [6], Н.В.Азбелева, В.П.Максимова, Л.Ф.Рахматулиной [7, с.5-20], V.Lakshmikantham, M.R.M.Rao [8, p.271-338], А.И.Боташева [9], М.К.Дауылбаева [10], С.Искандаров [11, с.10-41], T.A.Burton's [12], А.Б.Байзакова [13, с.9], R.P.Agarwal`s, L.Berezansky, E.Braverman, A.Domoshnitsky [14].

Отметим, что все фигурирующие функции в рассматриваемых уравнениях являются непрерывными в соответствующих областях изменения переменных, а также нелинейные функции удовлетворяют условию Липщица по пространственным переменным.

Настоящая монография носит теоретический характер и состоит из двух глав.

В первой главе, состоящей и пяти параграфов исследованы вопросы корректности различных начальных задач для системы интегро-дифференциальных уравнений вольтерра-фредгольмова типа, типа Вольтерра, типа Фредгольма на конечном и бесконечных отрезках.

В § 1 методом построения специальных последовательных приближений Пикара устанавливаются новые результаты (достаточные коэффициентные признаки) по однозначной разрешимости на бесконечном полуинтервале начальных и предельной задач Коши для систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с липшицевыми нелинейностями, содержащими вольтерровы и фредгольмовы интегральные операторы. Начальные данные Коши задаются в нижнем пределе интегрирования, т.е. в начальной точке полуинтервала (первая начальная задача Коши), и в любой точке полуинтервала (вторая начальная задача Коши). Для первой начальной задачи и предельной задачи последовательные приближения определяются из систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, а для второй начальной задачи - из систем нелинейных дифференциальных уравнений. Выводятся оценки скорости сходимости последовательных приближений. Устанавливаются ограниченность и стремление к конечным пределам решений начальных задач, устойчивость (по Ляпунову) нулевого решения рассматриваемых систем относительно начальных и предельных данных Коши. Устанавливается также равномерная устойчивость нулевого решения интегро-дифференциальных уравнений.

В § 2 рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений (с. и.-д. у.) вида

$$y'(x) = F(x, y, \int_a^x K(x, \tau, y(\tau))d\tau), \tag{2.1}$$

$$y'(x) = \Phi(x, y, \int_a^b H(x, \tau, y(\tau))d\tau). \tag{2.2}$$

В соответствии с [3, с. 27] будем говорить, что с. и.-д. у. (2.1) или (2.2) не имеет особенных точек (в некотором классе S n - мерных векторных функций), если задача Коши $y(x_0) = y^0$ для с. и.-д. у. (2.1) или (2.2) в каждой фиксированной точке $x_0 \in J = (c, d)$ и с любым фиксированным начальным вектором y^0 имеет единственное решение (в классе S).

Устанавливаются достаточные условия, при которых точка $x = a$ не является особенной точкой для и.-д. у. (2.1) и все точки отрезка $[a,b]$ не являются особенными точками для с. и.-д. у. вида (2.2):

$$y'(x) = \Phi(x, \int_a^b H(x,\tau,y(\tau))d\tau) \ . \qquad (2.2')$$

§ 3 посвящен установлению достаточных коэффициентных условий существования в классе $C^1[t_0,\infty)$ $n \times 1$ векторных функций, определенных и непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J, единственного решения задачи (3.1), (3.1′) :

$$x'(t) = F(t, x(t), \int_{t_0}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau, \int_{t_0}^{T} H(t,\eta,x(\eta))d\eta), t \ge t_0 \qquad (3.1)$$

изучается начальная задачи Коши

$$x(t_0) = x^0. \qquad (3.1')$$

В § 4 устанавливаются достаточные коэффициентные условия корректности на полуоси основной начальной задачи для системы слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вольтеррова типа с запаздывающим аргументом, ограниченности и стремления к конечным пределам ее решений, а также условия на начальные данные, для соответствующих которым решений изучаемой системы конечные пределы отличны от нуля. Выводятся достаточные коэффициентные условия стремления к ненулевым конечным пределам решений изучаемой системы с определенными начальными данными. Выясняется, когда решения изучаемой задачи обладают асимптотами из заданного однопараметрического семейства векторных кривых.

В § 5 развивается метод использования эквивалентной системы интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования из § 1 настоящей главы к решению одной предельной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра.

В главе 1 развит метод специальных последовательных приближений, метод последовательных приближений Пикара и принцип сжатых отображений Банаха. В параграфах 1-3 показывается существенность основных достаточных условий.

В главе 2, состоящей из 10 параграфов, устанавливаются достаточные условия, гарантирующие оценки и асимптотические свойства решений (и их производных для уравнений высоких порядков) интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) типа Вольтерра первого, второго, третьего, седьмого, восьмого порядков и системы таких уравнений в критическом случае на полуоси. Изучается также асимптотическая эквивалентность линейных и слабо нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

В § 1 устанавливаются достаточные условия гарантирующие асимптотического представления вида:

$$x(t) = P(t) + o(1) \tag{1.1}$$

для любого решения $x(t)$ ИДУ первого порядка

$$L[x] \equiv x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t \geq t_0, \tag{1.2}$$

где $P(t)$ - известная функция с заранее заданными асимптотическими свойствами, $o(1)$ - символ Э. Ландау, означающий бесконечно малую величину при $t \to \infty$, т.е. $o(1) \to 0,\ t \to \infty$.

§ 2 посвящен установлению достаточных условий ограниченности на полуинтервале $J = [t_0, \infty)$ всех решений следующего линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q(t,\tau)x(\tau) + K(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t), \tag{2.1}$$

$t \geq t_0$, в случае, когда соответствующее ДУ второго порядка

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t), \quad t \geq t_0 \tag{2.1$_0$}$$

может иметь неограниченные на полуинтервале J решения.

В § 3 устанавливаются достаточные условия, дающие оценки на J всех решений и их первых производных линейного неявного ИДУ второго порядка вида

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\big[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+ \\ +Q_2(t,\tau)x''(\tau)\big]d\tau=f(t),\ t\geq t_0. \qquad (3.1)$$

В § 4 даются достаточные условия устойчивости и стабилизуриемости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\big[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+ \\ +Q_2(t,\tau)x''(\tau)\big]d\tau=f(t),\quad t\geq t_0\ . \qquad (4.1)$$

В § 5 исследуются асимптотические свойства (оценка, ограниченность и степенная абсолютная интегрируемость на J, стремление к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону) решений и их первых и вторых производных линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+ \\ +\int_{t_0}^{t}\big[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)\big]\,d\tau=f(t),\, t\geq t_0\,. \qquad (5.1)$$

§ 6 посвящен установлению достаточных условий экспоненциальной устойчивости ИДУ третьего порядка:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+ \\ +\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau=f(t),\ t\geq t_0. \qquad (6.1)$$

В § 7 устанавливаются достаточные условия устойчивости любого решения линейного ИДУ седьмого порядка типа Вольтерра вида

$$x^{(7)}(t)+a_6(t)x^{(6)}(t)+a_5(t)x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+ \\ +a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)+ \\ +Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)+Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau)+Q_6(t,\tau)x^{(6)}(\tau)]d\tau=f(t),\, t\geq t_0\,. \qquad (7.1)$$

§ 8 посвящен установлению достаточных условий устойчивости любого решения линейного ИДУ восьмого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(8)}(t)+a_7(t)x^{(7)}(t)+a_6(t)x^{(6)}(t)+a_5(t)x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+$$

$$+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+$$

$$+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)+Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)+Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau)+Q_6(t,\tau)x^{(6)}(\tau)+$$

$$+Q_7(t,\tau)x^{(7)}(\tau)]d\tau = f(t), \quad t\ge t_0 . \qquad (8.1)$$

В § 9 устанавливаются достаточные условия для оценки, ограниченности на J, принадлежности пространству $L^p(J,R)$ $(p>0)$, стремления к нулю при, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, $t\to\infty$ компонент $x_i(t)$ $(1\le i\le n)$ любого решения $x(t)=\{x_i(t)\}$ системы ИДУ вида

$$x'(t)+\int\limits_{t_0}^{t}K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau=0, \quad t\ge t_0. \qquad (9.1)$$

В § 10 изучается асимптотическая эквивалентность интегро-дифференциальных систем

$$x'(t)=[A+B(t)]x(t)+\int_{t_0}^{t}[K(t-\tau)+Q(t,\tau)]x(\tau)d\tau,\ t\ge t_0, \qquad (10.1)$$

$$y'(t)=Ay(t)+\int_{t_0}^{t}K(t-\tau)y(\tau)d\tau,\ t\ge t_0, \qquad (10.2)$$

$$x'(t)=Ax(t)+\int\limits_{t_0}^{t}K(t-\tau)y(\tau)d\tau+$$

$$+f(t)+F(t,x(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau))d\tau,\ \ t\ge t_0 \qquad (10.3)$$

$$y'(t)=Ay(t)+\int_{t_0}^{t}K(t-\tau)y(\tau)d\tau+f(t),\ \ t\ge t_0. \qquad (10.4)$$

В главе 2 развиты метод срезывающих функций, нестандартные методы сведения к системе, метод частичного срезывания, метод интегральных неравенств, метод сравнения с решениями невозмущенных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, разработанные в нашей лаборатории теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики НАН Кыргызской Республики.

На многие теоремы и на некоторые следствия глав 1, 2 построены иллюстративные примеры, а также показана существенность некоторых наложенных условий.

Отметим, что в главе 2 в теоремах и следствиях содержатся некоторые вспомогательные параметры, весовые и срезывающие функции. Выбирая их конкретно, можно получить коэффициентные признаки. В соответствующих иллюстративных примерах показан выбор таких параметров и функций.

Глава 1

О корректной разрешимости и некоторые свойства решений различных задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений

В этой главе излагаются результаты Ю.А.Ведь, которые опубликованы в статьях [15-19]. Мы сохранили его стиль изложения результаты исследований, в необходимых случаях провели редактирование.

§ 1. Об одном методе изучения задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений

Методом построения специальных последовательных приближений Пикара устанавливаются новые результаты (достаточные коэффициентные признаки) по однозначной разрешимости на бесконечном полуинтервале начальных и предельной задач Коши для систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с липшицевыми нелинейностями, содержащими вольтерровы и фредгольмовы интегральные операторы. Начальные данные Коши задаются в нижнем пределе интегрирования, т.е. в начальной точке полуинтервала (первая начальная задача Коши), и в любой точке полуинтервала (вторая начальная задача Коши). Для первой начальной задачи и предельной задачи последовательные приближения определяются из систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, а для второй начальной задачи - из систем нелинейных дифференциальных уравнений. Выводятся оценки скорости сходимости последовательных приближений. Показывается существенность основных достаточных условий. Устанавливаются ограниченность и стремление к конечным пределам решений начальных задач, устойчивость (по Ляпунову) нулевого решения рассматриваемых систем относительно начальных и предельных данных Коши. Устанавливается также равномерная устойчивость нулевого решения интегро-дифференциальных уравнений.

В дальнейшем C^1 - класс $n\times 1$ вектор-функций $x(t)$, определенных и непрерывно дифференцируемых на полуинтервале $J=[t_0,\infty)$; Γ - класс $n\times 1$ вектор-функций $x(t)$, непрерывно дифференцируемых и ограниченных на J; $\|x\|$ - сумма или максимум абсолютных величин компонент вектора x.

1. Первая начальная задача Коши

Рассмотрим для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$x'(t)=F\left(t,x,\int_{t_0}^{t}K(t,\tau,x(\tau))d\tau,\int_{t_0}^{T}H(t,\eta,x(\eta))\,d\eta\right),\, t\ge t_0, \tag{1.1}$$

начальную задачу Коши

$$x(t_0)=x^0, \tag{1.1'}$$

где $x(t)$ - $n\times 1$ вектор-функция T - $const; t_0<T\le\infty; F(t,x,u,v), K(t,\tau,x)$ и $H(t,\eta,x)$ - $n\times 1$, $p\times 1$ и $r\times 1$, соответственно, вектор-функции, непрерывные в области $D_1=\{t_0\le\tau\le t<\infty, \eta\in J_T, \|x\|<\infty, \|u\|<\infty, \|v\|<\infty\}$, $J_T=\left[t_0,T\right]$ в случае $T<\infty$ и $J_T=J$ в случае $T=\infty$, и удовлетворяющие в этой области условию Липшица

$$\begin{aligned}&\left\|F(t,x^{(1)},u^{(1)},v^{(1)})-F(t,x^{(2)},u^{(2)},v^{(2)})\right\|\le g_1(t)\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|+\\&+g_2(t)\left\|u^{(1)}-u^{(2)}\right\|+g_3(t)\left\|v^{(1)}-v^{(2)}\right\|,\end{aligned} \tag{L_1}$$

$$\left\|K(t,\tau,x^{(1)})-K(t,\tau,x^{(2)})\right\|\le g_4(t,\tau)\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|, \tag{L_2}$$

$$\left\|H(t,\eta,x^{(1)})-H(t,\eta,x^{(2)})\right\|\le g_5(t,\eta)\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\| \tag{L_3}$$

с неотрицательными непрерывными функциями $g_i(t)\,(i=1,2,3), g_4(t,\tau)$ и $g_5(t,\eta)$ при $t\ge\tau\ge t_0, \eta\in J_T; x^0$ - заданный постоянный $n\times 1$ вектор.

Лемма 1.1. Пусть $u(t),\varphi(t),v(t),\omega(t,\tau)$ и $h(t,\eta)$ - неотрицательные непрерывные функции при $t\ge\tau_0\ge t_0, \eta\in J_T$;

$$R(t)\equiv\int_{t_0}^{t}\left[v(s)+\int_{t_0}^{s}\omega(s,\tau)d\tau\right]ds,\ P(t)\equiv\varphi(t)\exp\left[-R(t)\right]+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\left[v(s)\varphi(s)+\int_{t_0}^{s}\omega(s,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right]\exp[-R(s)]ds,$$

$$H(t,\eta)\equiv h(t,\eta)\exp\left[R(\eta)-R(t)\right],$$

$$q(t)\equiv\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}H(s,\eta)d\eta ds,\ \ Q(t)\equiv\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T}H(s,\eta)P(\eta)d\eta ds,$$

причем в случае $T=\infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty}H(t,\eta)d\eta,\int_{t_0}^{\infty}H(t,\eta)P(\eta)d\eta,\int_{t_0}^{\infty}h(t,\eta)u(\eta)d\eta$$

сходятся по t на полуинтервале J и сходятся равномерно по t на всяком конечном отрезке $J_0=\left[t_0,t^*\right], t^*>t_0$, и

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}H(t,\eta)d\eta dt<\infty,\ \int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}H(t,\eta)P(\eta)d\eta dt<\infty,$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}h(t,\eta)\exp[-R(t)]u(\eta)d\eta dt<\infty.$$

Пусть, кроме того,

$$q(T)=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}H(s,\eta)d\eta ds<1.$$

Тогда, если

$$u(t)\le\varphi(t)+\int_{t_0}^{t}\left[v(s)u(s)+\int_{t_0}^{s}\omega(s,\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{T}h(s,\eta)u(\eta)d\eta\right]ds,\ t\ge t_0, \tag{1.2}$$

то

$$u(t)\le\left[P(t)+Q(t)+\frac{Q(T)}{1-q(T)}q(t)\right]\exp[R(t)],\ \ t\ge t_0. \tag{1.3}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$X(t) \equiv \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} h(s,\eta)u(\eta)d\eta ds,\ \Phi(t) \equiv \varphi(t) + X(t).$$

Тогда неравенство (1.2) принимает вид

$$u(t) \le \Phi(t) + \int_{t_0}^{t}\left[v(s)u(s) + \int_{t_0}^{s} \omega(s,\tau)u(\tau)d\tau \right]ds,\ t \ge t_0, \tag{1.4}$$

Решая интегральное неравенство (1.4) аналогично неравенству из [20,с.47-48], где $\omega(t,\tau) \equiv 0$, и неравенству из [21,с.121-122], где $\Phi(t) \equiv const$, получим

$$u(t) \le \exp[R(t)]\left\{ P(t) + X(t) + \int_{t_0}^{t} W(s)\exp[-R(s)]ds \right\},\ t \ge t_0, \tag{1.5}$$

где

$$W(t) \equiv v(t)X(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(t,\tau)X(\tau)d\tau.$$

Имеем

$$W(t) \le R'(t)X(t),\ t \ge t_0. \tag{1.6}$$

Используя (1.6) и затем интегрируя по частям, получаем

$$\int_{t_0}^{t} W(s)\exp[-R(s)]ds \le -X(t)\exp[-R(t)] + \int_{t_0}^{t} X'(s)\exp[-R(s)]ds. \tag{1.7}$$

Следовательно, из (1.5) имеем

$$u(t) \le \exp[R(t)]\left\{ P(t) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} \exp[-R(s)]h(s,\eta)u(\eta)d\eta ds \right\},\ \ t \ge t_0, \tag{1.8}$$

или, обозначая

$$u_1(t) \equiv u(t)\exp[-R(t)],$$

$$u_1(t) \le P(t) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} H(s,\eta)u_1(\eta)d\eta ds,\ t \ge t_0 \tag{1.9}$$

Обозначая второе слагаемое в правой части неравенства (1.9) через $U(t)$, имеем

$$u_1(t) \le P(t) + U(t),\ t \ge t_0. \tag{1.10}$$

Следовательно, при $t \in J$ получаем

$$U(t) \le Q(t) + U(T)\, q(t). \tag{1.11}$$

Отсюда имеем

$$U(T) \le \frac{Q(T)}{1 - q(T)}. \tag{1.12}$$

В силу (1.12) из (1.11) и (1.10) получаем неравенство (1.3).

Замечание 1.1. Пусть $h(t,\eta) \equiv 0, \varphi(t) \equiv \varphi_1(t) + \varphi_2(t),$ где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - неотрицательные непрерывные функции на полуинтервале J, причем $\varphi_2(t)$ имеет неотрицательную непрерывную производную на J. Тогда из неравенства (1.3) аналогично получению неравенства (1.8) из (1.5) находим

$$u(t) \le \left\{ P_0(t) + \varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi'_2(s) \exp[-R(s)] ds \right\} \exp[R(t)], \, t \ge t_0,$$

где $P_0(t)$ - функция, полученная из функции $P(t)$ заменой $\varphi(t)$ на $\varphi_1(t)$.

Следствие 1.1. Если выполняются условия леммы 1.1 и $\varphi(t) \equiv 0$ на J, то $u(t) \equiv 0$ на J.

Введем обозначения:

$$f_1(t) \equiv F(t, 0, \int_{t_0}^{t} K(t,\tau,0) d\tau, \int_{t_0}^{T} H(t,\eta,0) d\eta);$$

$$h_1(t,\tau) \equiv g_2(t) g_4(t,\tau), h_2(t,\eta) \equiv g_3(t) g_5(t,\eta);$$

$$M_1(t) \equiv \left\| \int_{t_0}^{t} f_1(s) ds \right\|, N_1(t) \equiv \left\| x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s) ds \right\|;$$

$$R_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \left[g_1(s) + \int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau) d\tau \right] ds;$$

$$P_1(t) \equiv M_1(t) \exp[-R_1(t)] + \int_{t_0}^{t} \left[g_1(s) M_1(s) + \int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau) M_1(\tau) d\tau \right] \exp[-R_1(s)] ds;$$

$$H_1(t,\eta) \equiv h_2(t,\eta)\exp[R_1(\eta) - R_1(t)];$$

$$q_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} H_1(s,\eta)d\eta ds, Q_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} H_1(s,\eta)P_{10}(\eta)d\eta ds;$$

$P_{10}(t)$ - функция, полученная из функции $P_1(t)$ заменой $M_1(t)$ на $N_1(t)$.

Теорема 1.1. Пусть

1) в случае $T = \infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta,0)d\eta, \int_{t_0}^{\infty} g_5(t,\eta)\exp[R_1(\eta)]d\eta,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} g_5(t,\eta)P_1(\eta)\exp[R_1(\eta)]d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$, и

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} H_1(t,\eta)d\eta dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} H_1(t,\eta)P_1(\eta)d\eta dt < \infty;$$

2) $$q_1(T) = \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} H_1(s,\eta)d\eta ds < 1. \qquad (q_1)$$

Тогда задача (1.1), (1.1′) имеет решение $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| \le \exp[R_1(t)]\left[P_{10}(t) + Q_1(t) + \frac{Q_1(T)}{1 - q_1(T)}q_1(t)\right], \ t \ge t_0; \qquad (1.13)$$

решение задачи (1.1), (1.1′) в случае $T < \infty$ единственно в классе C^1, а в случае $T = \infty$ единственно в классе G^1 тех вектор-функций $x(t) \in C^1$, для которых интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} g_5(t,\eta)\|x(\eta)\|d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$, и

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} h_2(t,\eta)\exp[-R_1(t)]\|x(\eta)\|d\eta dt < \infty.$$

Доказательство. Для задачи (1.1) , (1.1′) построим последовательные приближения

$$x'_m(t)=F\left(t,x_m,\int_{t_0}^{t}K(t,\tau,x_m(\tau))d\tau,\,u_{m-1}(t)\right),\ t\ge t_0,\ (m=1,2,...);\tag{1.14}$$

$$x_m(t_0)=x^0\quad (m=1,2,...);\tag{1.14′}$$

$$x_0(t)=0,\,t\ge t_0,$$

где

$$u_m(t)\equiv\int_{t_0}^{T}H(t,\eta,x_m(\eta))d\eta\ (m=0,1,2,...).$$

Для каждого $m=1,2,...$ система (1.14) есть система интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и задача (1.14), (1.14′) имеет единственное решение $x_m(t)$ в классе C^1 [16], если в случае $T=\infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty}H(t,\eta,x_m(\eta))d\eta\ \ (m=1,2,...)\tag{1.15}$$

сходятся по $t\in J$ и сходятся равномерно по $t\in J_0$. Справедливость последнего будет вытекать из устанавливаемых ниже оценок для $\|x_m(t)\|\,(m=1,2,...),\,t\in J.$ При этом будем пользоваться представлениями

$$H(t,\eta,x_m(\eta))\equiv H(t,\eta,0)+[H(t,\eta,x_m(\eta))-H(t,\eta,0)]\quad (m=1,2,...);\tag{*}$$

$$F(t,x,u,v)\equiv f_1(t)+[F(t,x,u,v)-f_1(t)].\tag{**}$$

Для каждого $m=1,2,...$ задача (1.14), (1.14’) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x_m(t)=x^0+\int_{t_0}^{t}F(s,x_m(s),\int_{t_0}^{s}K(s,\tau,x_m(\tau))d\tau,u_{m-1}(s))ds.\tag{1.16}$$

Из (1.16) имеем

$$\|x_m(t)\|\le N_1(t)+\psi_m(t)+\int_{t_0}^{t}\left[q_1(s)\|x_m(t)\|+\int_{t_0}^{s}h_1(s,\tau)\|x_m(\tau)\|d\tau\right]ds\tag{1.17}$$

$$(m=1,2,...),t\ge t_0,$$

где

$$\psi_m(t) \equiv \int_{t_0}^{t} q_3(s)\left\|u_{m-1}(s)-u_0(s)\right\|ds \quad (m=1,2,...).$$

Применяя к (1.17) лемму 1.1 с учетом замечания 1.1, получаем

$$\left\|x_1(t)\right\| \le \exp[R_1(t)]P_{10}(t), \; t \ge t_0, \tag{1.18}$$

$$\left\|x_m(t)\right\| \le \exp[R_1(t)]\left\{P_{10}(t) + \int_{t_0}^{t} q_3(s)\exp[-R_1(s)]\left\|u_{m-1}(s)-u_0(s)\right\|ds\right\} \tag{1.19}$$

$(m=1,2,...), t \ge t_0$.

Покажем, что в случае $T=\infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty}\left\|H(t,\eta,x_m(\eta)) - H(t,\eta,0)\right\|d\eta \quad (m=1,2,...) \tag{1.20}$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. Тогда в силу условия 1) и представления (*) следует, что интегралы (1.15) также сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. В силу (1.18) при $t \in J$, $\eta \in J_T$ имеем

$$\left\|H(t,\eta,x_1(\eta)) - H(t,\eta,0)\right\| \le q_5(t,\eta)P_{10}(\eta)\exp[R_1(\eta)]. \tag{1.21}$$

В силу условия 1) из (1.21) следует, что интеграл (1.20) при $m=1$ сходится по $t \in J$ и сходится равномерно по $t \in J_0$. Из (1.19) имеем

$$\left\|x_2(t)\right\| \le \exp[R_1(t)][P_{10}(t)+Q_1(t)], t \ge t_0. \tag{1.22}$$

В силу (1.22) получаем, что интеграл (1.20) при $m=2$ сходится по $t \in J$ и сходится равномерно по $t \in J_0$. Методом полной математической индукции можно показать, что для любого натурального числа $m \ge 3$ справедлива оценка

$$\left\|x_m(t)\right\| \le \exp[R_1(t)]\left[P_{10}(t)+Q_1(t)+Q_1(T)q_1(t)\sum_{k=0}^{m-3}(q_1(T))^k\right], \; t \ge t_0. \tag{1.23}$$

Следовательно, интегралы (1.20) сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. Таким образом, из (1.14), (1.14′) однозначно определяются функции

$x_m(t) \in C^1 (m = 1, 2, ...)$, для которых справедливы оценки (1.18), (1.22) и (1.23).

Составим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m(t), \tag{1.24}$$

где $v_m(t) \equiv x_m(t) - x_{m-1}(t) \quad (m = 1, 2, ...)$.

Из (1.16) при $t \in J$ получаем

$$\|v_m(t)\| \le \Psi_m(t) + \int_{t_0}^{t} \left[g_1(s)\|v_m(s)\| + \int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau)\|v_m(\tau)\| d\tau \right] ds \tag{1.25}$$
$$(m = 1, 2, ...),$$

где

$$\Psi_m(t) \equiv \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} h_2(s,\eta)\|v_{m-1}(\eta)\| d\eta ds \quad (m = 2, ...).$$

Применяя к (1.25) лемму 1.1 с учетом замечания 1.1, имеем

$$\|v_m(t)\| \le \exp[R_1(t)] \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{T} h_2(s,\eta) \exp[-R_1(s)] \|v_{m-1}(\eta)\| d\eta ds \quad (m = 2, ...), \ t \ge t_0. \tag{1.26}$$

В силу (1.18) из (1.26) имеем

$$\|v_2(t)\| \le \exp[R_1(t)] Q_1(t), \quad t \ge t_0. \tag{1.27}$$

По индукции получаем, что для любого натурального числа $m \ge 3$ справедлива оценка

$$\|v_m(t)\| \le \exp[R_1(t)] Q_1(T) q_1(t) \left(q_1(T)\right)^{m-3}, \ t \ge t_0. \tag{1.28}$$

Из (1.18), (1.27) и (1.28) в силу условия (q_1) вытекает, что ряд (1.24) сходится абсолютно на полуинтервале J и равномерно на отрезке J_0. Сумма, скажем, $x(t)$ ряда (1.24) непрерывна на J. Из (1.23) получаем оценку (1.13). Следовательно, в случае $T = \infty$ интеграл, полученный из интеграла (1.15) заменой $x_m(\eta)$ на $x(\eta)$, сходится по $t \in J$ и сходится равномерно по $t \in J_0$. Переходя в (1.16) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $x(t)$ является решением задачи (1.1), (1.1′) в классе C^1.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - любые два решения задачи (1.1), $(1.1')$ в классе C^1 для случая $T < \infty$ и в классе G^1 для случая $T = \infty; u(t) \equiv \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Тогда при $t \in J$ получаем

$$u(t) \le \int_{t_0}^{t} \left[g_1(s)u(s) + \int_{t_0}^{s} h_1(s,\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T} h_2(s,\eta)u(\eta)d\eta \right] ds,$$

откуда на основании следствия 1.1 вытекает, что $x_2(t) \equiv x_1(t)$ на J.

Замечание 1.2. Справедливы следующие оценки:

$$\|x(t) - x_1(t)\| \le \exp[R_1(t)] \left[Q_1(t) + \frac{Q_1(T)}{1 - q_1(T)} q_1(t) \right], t \ge t_0, \tag{1.29}$$

$$\|x(t) - x_m(t)\| \le \exp[R_1(t)] \frac{Q_1(T)(q_1(T))^{m-2}}{1 - q_1(T)} q_1(t)(m = 2,...), t \ge t_0, \tag{1.30}$$

где $x(t)$ - решение задачи (1.1), $(1.1')$; $x_m(t)$ $(m = 1,2,...)$ - последовательные приближения, определенные соотношениями (1.14), $(1.14')$.

Справедливость оценок (1.30) получается путем использования (1.28), а оценки (1.29) - путем использования (1.30) при $m = 2$ и (1.27).

Замечание 1.3. При нарушении условия (q_1) задача (1.1), $(1.1')$ может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе C^1. В самом деле, для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$x'_1(t) = -x_2 + \int_0^t 12x_1(\tau)d\tau + \int_0^1 \frac{1}{2} x_2(\eta)d\eta, \; x'_2(t) = 12x_1, \; t \ge 0,$$

нарушается условие (q_1) и ни одно из ее решений $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$:

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t, x_2(t) = (6 + 12t)c_1 + 6c_2 t^2$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные) не удовлетворяет начальным условиям $x_i(0) = x_i^0$ $(i = 1,2)$ при $x_2^0 \ne 6x_1^0$; если же $x_2^0 = 6x_1^0$, то соответствующая задача имеет однопараметрическое семейство решений.

Следствие 1.2. Если

1) в случае $T=\infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta,0)d\eta,\ \int_{t_0}^{\infty} g_5(t,\eta)d\eta$$

сходятся по $t\in J$ и сходятся равномерно по $t\in J_0$;

2) выполняются условия (q_1),

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[g_1(t)+\int_{t_0}^{t}h_1(t,\tau)d\tau+\int_{t_0}^{T}h_2(t,\eta)d\eta\right]dt<\infty, \tag{A$_1$}$$

$$\sup_J M_1(t)<\infty, \tag{B$_1$}$$

то решение $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ задачи (1.1), (1.1′) ограничено на полуинтервале J. Если, кроме того,

$$\left|\int_{t_0}^{\infty} f_{1i}(t)dt\right|<\infty \quad (1\le i\le n), \tag{C$_1$}$$

где $f_{1i}(t)$ - компонента вектора $f_1(t)$, то компонента $x_i(t)\ (i\le i\le n)$ стремится к конечному пределу при $t\to\infty$. Если же $f_1(t)\equiv 0$, то нулевое решение системы (1.1) устойчиво относительно начальных данных (1.1′).

В самом деле, учитывая, что $P_1(t)\le \sup\limits_J M_1(t), t\in J$, заключаем, что условия 1), (A$_1$) и (B$_1$) обеспечивают выполнимость условия 1) теоремы 1.1. Учитывая также, что $P_{10}(t)\le \sup\limits_J N_1(t),\ t\in J$, из оценки (1.13) получаем справедливость первой и третьей частей данного предложения. Справедливость второй части вытекает из тождества, получающегося интегрированием от t_0 до t результата подстановки решения $x(t)$ в систему (1.1), при этом используются ограниченность $x(t)$ на J, условия (A$_1$), (C$_1$) и представление (**).

Замечание 1.4. Пусть в системе (1.1) вектор-функция $F(t,x,u,v)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (L_1) не в области D_1, а в области $D_1^{(1)} = \{t_0 \le t < \infty, \|x\| < \infty, \|u\| < \infty, \|v\| \le \rho_1\}$, $\rho_1 - const > 0$; выполняются условия теоремы 1.1,

$$H(t,\eta,0) \equiv 0,\ g_5 = \sup_J \int_{t_0}^{T} g_5(t,\eta)\exp[R_1(\eta)]d\eta < \infty \qquad (q_5)$$

и в случае $T=\infty$ условие (B_1). Тогда задача (1.1), (1.1′) с начальным вектором x^0, для которого

$$\sup_J \left\| x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s)ds \right\| \le \rho_1 \left[g_5 + \frac{g_6}{1-q_1(T)} \right]^{-1}, \qquad (x^0)$$

где

$$g_6 = \sup_J \int_{t_0}^{T} g_5(t,\eta)\exp[R_1(\eta)]q_1(\eta)d\eta < \infty,$$

имеет решение $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству (1.13); решение задачи (1.1), (1.1′) в случае $T<\infty$ [соответственно $T=\infty$] единственно в классе C^1 [соответственно G^1] тех вектор-функций $x(t)$, для которых

$$\left\| \int_{t_0}^{T} H(t,\eta,x(\eta))d\eta \right\| \le \rho_1,\ t \ge t_0. \qquad (1.31)$$

Действительно, достаточно доказать, что

$$\|v_m(t)\| \le \rho_1 \quad (m=1,2,\ldots),\ t \ge t_0, \qquad (1.32)$$

где

$$v_m(t) \equiv \int_{t_0}^{T} H(t,\eta,x_m(\eta))d\eta \ \ (m=1,2,\ldots).$$

Из оценок (1.18), (1.22) и (1.23) имеем

$$\|x_m(t)\| \le N_1^0 \exp[R_1(t)]\left[1 + \frac{q_1(t)}{1-q_1(T)}\right](m=1,2,\ldots),\ t \in J_T, \qquad (1.33)$$

где $N_1^0 = \sup_{J_T} N_1(t) < \infty.$

В силу (1.33) и условий $(q_5), (x^0)$ получаем (1.32).

Замечание 1.5. Пусть в системе (1.1) вектор-функция $H(t,\eta,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (L_3) не в области D_1, а в области $D_1^{(2)}=\{t\in J,\eta\in J_T,\|x\|\le\rho_2\}$, ρ_2 - $const>0$; выполняются условия 1) и 2) следствия 1.2. Тогда задача (1.1), (1.1′) с начальным вектором x^0, для которого

$$\sup_J\left\|x^0+\int_{t_0}^t f_1(s)ds\right\|\le\rho_2\exp[-R_1(\infty)]\left[1+\frac{g_1(\infty)}{1-q_1(T)}\right]^{-1}, \qquad (x_1^0)$$

где

$$R_1(\infty)=\lim_{t\to\infty}R_1(t),\ q_1(\infty)=\lim_{t\to\infty}q_1(t),$$

имеет решение $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству (1.13); решение задачи (1.1), (1.1′) единственно в классе C^1 тех вектор-функций $x(t)$, для которых

$$\|x(t)\|\le\rho_2,\ t\ge t_0. \qquad (1.34)$$

Действительно, из (1.18), (1.22) и (1.23) имеем

$$\|x_m(t)\|\le N_1\exp[R_1(\infty)]\left[1+\frac{q_1(\infty)}{1-q_1(T)}\right](m=1,2,...),\ t\in J, \qquad (1.35)$$

где $N_1=\sup_J N_1(t)<\infty.$

В силу (x^0) из (1.35) получаем

$$\|x_m(t)\|\le\rho_2\ (m=1,2,...,),\ t\ge t_0.$$

Замечание 1.6. Пусть в системе (1.1) вектор-функции $F(t,x,u,v)$ и $H(t,\eta,x)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица (L_1) и (L_3) не в области D_1, а в области $D_1^{(1)}$ и $D_1^{(2)}$ соответственно; выполняются 1) , 2) следствия 1.2. и условия (q_5). Тогда задача (1.1), (1.1′) с начальным вектором x^0, для которого выполняются неравенства (x^0) и (x_1^0), имеет решение $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству (1.13); решение задачи (1.1), (1.1′)

единственно в классе C^1 тех вектор-функций $x(t)$, для которых выполняются неравенства (1.31) и (1.34).

Отметим, что результаты, аналогичные результатам этого параграфа, имеют место, если в системе (1.1) вместо интеграла с пределами от t_0 до T стоит интеграл с пределами от t до ∞.

2. Вторая начальная задача Коши

Рассмотрим для систем интегро-дифференциальных уравнений

$$x'(t) = F\left(t, x, \int_{t_0}^{T(t)} H(t,\eta,x(\eta))d\eta\right), t \geq t_0, \tag{2.1}$$

начальную задачу Коши

$$x(t_1) = x^1, \tag{2.1'}$$

где либо $T(t) \equiv t$ (система (2.1$_1$)), либо $T(t) \equiv T$ - $const, t_0 < T \leq \infty$ (система (2.1$_2$)); $x(t)$ - $n \times 1$ вектор-функция; $F(t,x,v)$ и $H(t,\eta,x)$ - $n \times 1$ и $r \times 1$, соответственно, вектор-функций, непрерывные в области

$$D_2 = \{t_0 \leq t < \infty, t_0 \leq \eta \leq T(t)(t_0 \leq \eta < \infty \, в \, случае \, T = \infty), \|x\| < \infty, \|v\| < \infty\}$$

и удовлетворяющие в этой области условию Липшица

$$\left\|F(t,x^{(1)},v^{(1)}) - F(t,x^{(2)},v^{(2)})\right\| \leq g_1(t)\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\| + g_2(t)\left\|v^{(1)} - v^{(2)}\right\|, \tag{L_1}$$

$$\left\|H(t,\eta,x^{(1)}) - H(t,\eta,x^{(2)})\right\| \leq g_3(t,\eta)\left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\| \tag{L_2}$$

с неотрицательными непрерывными функциями $g_1(t)$ и $g_2(t)$, $g_3(t,\eta)$ при $t \geq t_0, t_0 \leq \eta \leq T(t)$; t_1 - заданная точка на интервале (t_0,∞); x^1 - заданный постоянный $n \times 1$ - вектор.

Известно, что задача Коши (2.1′) для системы дифференциальных уравнений (в (2.1) $F(t,x,v) \equiv F(t,x)$) в каждой точке t_1 полуинтервала J имеет единственное решение в классе C^1. Такое свойство, вообще говоря, нарушается для систем интегро- дифференциальных уравнений (2.1). В работах

[3, с.11-20, 140-144; 16] показано, что в смысле разрешимости задача (2.1_1), ($2.1'$) с $t_1 > t_0$ и задача (2.1_2), ($2.1'$) с $T < \infty, t_1 \geq t_0$ ведут себя вообще говоря отлично от задачи (2.1_1), ($1.1'$), а именно: последняя задача имеет единственное решение в классе C^1, а первые две задачи могут не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе C^1. Следуя [3, с.27] точки t_1, в которых задача (2.1), ($2.1'$) не имеет решения или имеет бесчисленное множество решений, называются особенными точками.

Лемма 2.1. Пусть $u(t), \varphi(t), v(t)$ и $h(t,\eta)$ - неотрицательные непрерывные функции при $t \geq t_0, t_0 \leq \eta \leq T(t)$ ($T(t) \equiv t$ (случай 1)) или $T(t) \equiv T$ - $const, t_0 < T \leq \infty$ (случай 2));

$$R(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} v(s)ds \right|, P(t) \equiv \varphi(t)\exp[-R(t)] + \left| \int_{t_1}^{t} v(s)\varphi(s)\exp[-R(s)]ds \right|,$$

$$H(t,\eta) \equiv h(t,\eta)\exp[R(\eta) - R(t)],$$

$$q(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta)d\eta ds \right|, Q(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta)P(\eta)d\eta ds \right|,$$

причем в случае $T = \infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta)d\eta, \int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta)P(\eta)d\eta, \int_{t_0}^{\infty} h(t,\eta)u(\eta)d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$ и

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t}^{\infty} H(t,\eta)d\eta dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta)P(\eta)d\eta dt < \infty,$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} h(t,\eta)\exp[-R(t)]u(\eta)d\eta dt < \infty.$$

Пусть, кроме того, в случае 1) и в случае 2) с $t_1 \geq T < \infty$

$$q(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta)d\eta ds < 1,$$

а в случае 2) с $t_1 < T \le \infty$

$$q = \max\{q(t_0); q(T)\} < 1.$$

Тогда, если

$$u(t) \le \varphi(t) + \left| \int_{t_1}^{t} \left[v(s)u(s) + \int_{t_0}^{T(s)} h(s,\eta)u(\eta)d\eta \right] ds \right|, t \ge t_0 , \tag{2.2}$$

то в случае 1)

$$u(t) \le \exp[R(t)]\left[P(t) + \begin{cases} Q(t) + \dfrac{Q(t_0)}{1-q(t_0)} \times \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t} \left[Q'(s) + \frac{Q(t_0)}{1-q(t_0)} \left(q^{(1)}(s)\right)' \right] \times \end{cases}\right. \tag{2.3$_1$}$$

$$\left. \times \begin{matrix} \times\, q(t), t_0 \le t \le t_1 \\ \exp[q^{(2)}(t) - q^{(2)}(s)]ds, t \ge t_1 \end{matrix} \right\}\Bigg], t \ge t_0,$$

где

$$q^{(1)}(t) \equiv \int_{t_1}^{t}\int_{t_0}^{t_1} H(s,\eta)d\eta ds,\ q^{(2)}(t) \equiv \int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{s} H(s,\eta)d\eta ds,\ t \ge t_1;$$

в случае 2) с $t_1 \ge T < \infty$

$$u(t) \le \left[P(t) + Q(t) + \frac{Q(t_0)}{1-q(t_0)} q(t) \right] \exp[R(t)], t \ge t_0; \tag{2.3$_2$}$$

в случае 2) с $t_1 < T \le \infty$

$$u(t) \le \left[P(t) + Q(t) + \frac{Q}{1-q} q(t) \right] \exp[R(t)], t \ge t_1; \tag{2.3$_3$}$$

где $Q = \max\{Q(t_0); Q(T)\}$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$X(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t}\int_{t_0}^{T(s)} h(s,\eta)u(\eta)d\eta ds \right|, \Phi(t) \equiv \varphi(t) + X(t).$$

Тогда неравенство (2.2) принимает вид

$$u(t) \le \Phi(t) + \left| \int_{t_1}^{t} v(s)u(s)ds \right|,\ t \ge t_0. \tag{2.4}$$

Решая неравенство (2.4), имеем

$$u(t) \le \Phi(t) + \left| \int_{t_1}^{t} v(s)\Phi(s) \exp\left[\left| \int_{s}^{t} v(\theta) d\theta \right| \right] ds \right|, \ t \ge t_0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) имеем

$$u(t) \le P(t)\exp[R(t)] + X(t) + \left| \int_{t_1}^{t} v(s)X(s) \exp\left[\left| \int_{s}^{t} v(\theta) d\theta \right| \right] ds \right|, \ t \ge t_0. \tag{2.6}$$

Используя непрерывную дифференцируемость функции $X(t)$ на промежутках $[t_0,t_1]$ и $[t_1,\infty)$, интегрированием по частям на этих промежутках по отдельности получаем

$$\begin{gathered} \left| \int_{t_1}^{t} v(s)X(s) \exp\left[\left| \int_{s}^{t} v(\theta) d\theta \right| \right] ds \right| = -X(t) + \exp[R(t)] \times \\ \times \left| \int_{t_1}^{t} \exp[-R(s)] \int_{t_0}^{T(s)} h(s,\eta) u(\eta) d\eta ds \right|, t \ge t_0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Учитывая (2.7) и обозначая

$$u_1(t) \equiv u(t)\exp[-R(t)],$$

из (2.6) имеем

$$u_1(t) \le P(t) + \left| \int_{t_1}^{t} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta) u_1(\eta) d\eta ds \right|, t \ge t_0. \tag{2.8}$$

Обозначая второе слагаемое в правой частим неравенства (2.8) через $U(t)$, имеем

$$u_1(t) \le P(t) + U(t), t \ge t_0. \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$U(t) \le Q(t) + \left| \int_{t_1}^{t} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta) U(\eta) d\eta ds \right|, t \ge t_0. \tag{2.10}$$

Функция $U(t)$ непрерывна при $t \ge t_0$, монотонно невозрастающая при $t \in [t_0,t_1]$ и монотонно неубывающая при $t \ge t_1$, В случае 1) из (2.10) при $t_0 \le t \le t_1$ получаем

$$U(t) \le Q(t) + U(t_0)q(t), \tag{2.11}$$

откуда

$$U(t_0) \le \frac{Q(t_0)}{1-q(t_0)}. \tag{2.12}$$

В силу (2.12) из (2.11) имеем

$$U(t) \le Q(t) + \frac{Q(t_0)}{1-q(t_0)}q(t), t_0 \le t \le t_1. \tag{2.13}$$

При $t \ge t_1$ получаем

$$U(t) \le Q(t) + U(t_0)q^{(1)}(t) + \int_{t_1}^{t} U(s)\int_{t_1}^{s} H(s,\eta)d\eta ds. \tag{2.14}$$

Применяя к неравенству (2.14) лемму Гронуолла-Беллмана [20, с.47-48] (или лемму 1.1 при $\omega(t,\tau) \equiv h(t,\eta) \equiv 0$) с учетом замечания 1.1 и используя (2.12), получаем

$$U(t) \le \int_{t_1}^{t}\left[Q'(s) + \frac{Q(t_0)}{1-q(t_0)}(q^{(1)}(s))'\right]\exp\left[q^{(2)}(t) - q^{(2)}(s)\right]ds,\ t \ge t_1. \tag{2.15}$$

В силу (2.13) и (2.15) из (2.9) имеем неравенство (2.3_1).

В случае 2) с $t_1 \ge T < \infty$ неравенство (2.3_2) получается аналогично неравенству (2.3_1) при $t_0 \le t \le t_1$.

В случае 2) с $t_1 < T \le \infty$ из (2.10) при $t \in J$ получаем

$$U(t) \le Q(t) + Uq(t), \tag{2.16}$$

где $U = \max\{U(t_0); U(T)\}$.

Из (2.16) имеем

$$U \le \frac{Q}{1-q}. \tag{2.17}$$

В силу (2.17) из (2.16) и (2.9) получаем неравенство (2.3_3).

Замечание 2.1. Пусть $h(t,\eta)\equiv 0, \varphi(t)\equiv\varphi_1(t)+\varphi_2(t),$ где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - неотрицательные непрерывные функции при $t\geq t_0,$ причем $\varphi'_1(t)=-\psi(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $\varphi'_2(t)=\psi(t)$ при $t\geq t_1,$ $\psi(t)$ - неотрицательная непрерывная функция при $t\geq t_0.$ Тогда из неравенства

$$u(t)\leq P(t)\exp[R(t)],\ t\geq t_0, \tag{2.18}$$

в которое вырождаются неравенства (2.3_1)-(2.3_3), получаем

$$u(t)\leq\left\{P_0(t)+\varphi_2(t_1)+\left|\int_{t_1}^{t}\psi(s)\exp[-R(s)]ds\right|\right\}\exp[R(t)],\ t\geq t_0,$$

где $P_0(t)$ - функция, полученная из функции $P(t)$ заменой $\varphi(t)$ на $\varphi_1(t).$

Следствие 2.1. Если выполняются условия леммы 2.1 и $\varphi(t)\equiv 0$ на J, то
$u(t)\equiv 0$ на $J.$

Замечание 2.2. В условиях леммы 2.1 относительно сходимости интегралов (в случае $T=\infty$) функции $R(t)$ и $P(t)$ можно заменить, соответственно, на функции $R^0(t)$ и $P^0(t),$ полученные из функций $R(t)$ и $P(t)$ заменой (всюду) t_1 на $t_0.$

Введем обозначения:

$$f_2(t)\equiv F\left(t,0,\int_{t_0}^{T(t)}H(t,\eta,0)d\eta\right), h_1(t,\eta)\equiv g_2(t)g_3(t,\eta);$$

$$M_2(t)\equiv\left\|\int_{t_0}^{1}f_2(s)ds\right\|, N_2(t)\equiv\left\|x^1+\int_{t_1}^{t}f_2(s)ds\right\|;$$

$$R_2(t)\equiv\left|\int_{t_1}^{t}g_1(s)ds\right|, P_2(t)\equiv N_2(t)\exp[-R_2(t)]+\left|\int_{t_1}^{t}g_1(s)N_2(s)\exp[-R_2(s)]ds\right|;$$

$$H_2(t,\eta)\equiv h_1(t,\eta)\exp[R_2(\eta)-R_2(t)];$$

$$q_2(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} \int_{t_0}^{T(s)} H_2(s,\eta) d\eta ds \right|, Q_2(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} \int_{t_0}^{T(s)} H_2(s,\eta) P_2(\eta) d\eta ds \right|;$$

$$R_2^0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} g_1(s) ds,\ P_2^0(t) \equiv M_2(t) \exp[-R_2^0(t)] + \int_{t_0}^{t} g_1(s) M_2(s) \exp[-R_2^0(s)] ds,$$

$$H_2^0(t,\eta) \equiv h_1(t,\eta) \exp[R_2^0(\eta) - R_2^0(t)].$$

Для задач (2.1), (2.1′) построим последовательные приближения

$$x'_m(t) \equiv F(t, x_m, u_{m-1}(t)) \ (m = 1,2,...),\ t \geq t_0, \tag{2.19}$$

$$x_m(t_1) = x^1 \ (m = 1,2,...), \tag{2.19′}$$

$$x_0(t) = 0,\ t \geq t_0,$$

где

$$u_m(t) \equiv \int_{t_0}^{T(t)} H(t, \eta, x_m(\eta)) d\eta \ (m = 0,1,2,...).$$

Для каждого $m = 1,2,...$ система (2.19) есть система дифференциальных уравнений и задача (2.19), (2.19′) имеет единственное решение $x_m(t)$ в классе C^1, если в случае $T = \infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t, \eta, x_m(\eta)) d\eta \ (m = 0,1,2,...) \tag{2.20}$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. Для каждого $m = 1,2,...$ задача (1.19), (1.19′) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x_m(t) = x^1 + \int_{t_1}^{t} F(s, x_m(s), u_{m-1}(s)) ds,\ t \geq t_0. \tag{2.21}$$

Из (2.21) при $t \in J$ получаем

$$\|x_m(t)\| \leq N_2(t) + \psi_m(t) + \left| \int_{t_1}^{t} g_1(s) \|x_m(s)\| ds \right| \ (m = 1,2,...), \tag{2.22}$$

$$\|v_m(t)\| \leq \Psi_m(t) + \left| \int_{t_1}^{t} g_1(s) \|v_m(s)\| ds \right| \ (m = 2,...), \tag{2.23}$$

где

$$\psi_m(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} g_2(s) \left\| u_{m-1}(s) - u_0(s) \right\| ds \right| \ (m = 1, 2, \ldots),$$

$$v_m(t) \equiv x_m(t) - x_{m-1}(t) \ (m = 2, \ldots),$$

$$\Psi_m(t) \equiv \left| \int_{t_1}^{t} g_2(s) \left\| u_{m-1}(s) - u_{m-2}(s) \right\| ds \right| \ (m = 2, \ldots).$$

Применяя к неравенствам (2.22) и (2.23) лемму 2.1 с учетом замечания 2.1, имеем

$$\left\| x_1(t) \right\| \le P_2(t) \exp[R_2(t)], t \ge t_0, \tag{2.24}$$

$$\left\| x_m(t) \right\| \le \exp[R_2(t)] \left\{ P_2(t) + \left| \int_{t_1}^{t} \exp[-R_2(s)] g_2(s) \left\| u_{m-1}(s) - u_0(s) \right\| ds \right| \right\} \tag{2.25}$$

$(m = 2, \ldots),\ t \ge t_0,$

$$\left\| v_m(t) \right\| \le \exp[R_2(t)] \left| \int_{t_1}^{t} \exp[-R_2(s)] g_2(s) \left\| u_{m-1}(s) - u_{m-2}(s) \right\| ds \right| \tag{2.26}$$

$(m = 2, \ldots),\ t \ge t_0.$

Теорема 2.1. Если

$$q_2(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{s} h_1(s, \eta) \exp\left[\int_{\eta}^{s} g_1(\theta) d\theta \right] d\eta ds < 1, \tag{q_2}$$

то задача (2.1_1), ($2.1'$) имеет решение $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству

$$\| x(t) \| \le \exp[R_2(t)] \left[P_2(t) + \begin{cases} Q_2(t) + \dfrac{Q_2(t_0)}{1 - q_2(t_0)} \times \\ \times q_2(t),\ t_0 \le t \le t_1 \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t} \left[Q_2'(s) + \dfrac{Q_2(t_0)}{1 - q_2(t_0)} \times \right. \\ \left. \times (q_2^{(1)}(s))' \right] \exp[q_2^{(2)}(t) - q_2^{(2)}(s)] ds,\ t \ge t_1 \end{cases} \right],\ t \ge t_0, \tag{2.27}$$

где

$$q_2^{(1)}(t) \equiv \int_{t_1}^{t}\int_{t_0}^{t_1} H_2(s,\eta)d\eta ds,\ q_2^{(2)}(t) \equiv \int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{s} H_2(s,\eta)d\eta ds,\ t \ge t_1;$$

решение задачи (2.1_1), $(2.1')$ единственно в классе

Доказательство. Из (2.26) имеем

$$\|\vartheta_m(t)\| \le \exp[R_2(t)]\left|\int_{t_1}^{t}\int_{t_0}^{s} \exp[-R_2(s)]h_1(s,\eta)\|\vartheta_{m-1}(\eta)\|d\eta ds\right|(m=2,\ldots),\ t \ge t_0, \qquad (2.28)$$

где $\vartheta_1(t) \equiv x_1(t)$.

В силу (2.24) из (2.28) получаем

$$\|\vartheta_2(t)\| \le \exp[R_2(t)]Q_2(t),\ \ t \ge t_0. \qquad (2.29)$$

Методом полной математической индукции можно показать, что для любого натурального числа $m \ge 3$ справедливы оценки

$$\|\vartheta_m(t)\| \le \exp[R_2(t)]Q_2(t_0)q_2(t)(q_2(t_0))^{m-3},\ \ t_0 \le t \ge t_1; \qquad (2.30_1)$$

$$\|\vartheta_m(t)\| \le \exp[R_2(t)]\left\{Q_2(t_0)\sum_{k=0}^{m-3}\frac{1}{k!}(q_2(t_0))^{m-3-k}\int_{t_1}^{t}(q_2^{(1)}(s))'\left[q_2^{(2)}(t)-q_2^{(2)}(s)\right]^k ds + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(m-2)!}\int_{t_1}^{t} Q'_2(s)\left[q_2^{(2)}(t)-q_2^{(2)}(s)\right]^{m-2} ds\right\},\ t \ge t_1. \qquad (2.30_2)$$

Можно показать, что

$$\sum_{m=3}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-3}\frac{1}{k!}(q_2(t_0))^{m-3-k}\int_{t_1}^{t}(q_2^{(1)}(s))'\left[q_2^{(2)}(t)-q_2^{(2)}(s)\right]^k ds =$$

$$= \frac{1}{1-q_2(t_0)}\int_{t_1}^{t}(q_2^{(1)}(s))'\exp\left[q_2^{(2)}(t)-q_2^{(2)}(s)\right]^{m-2} ds,\ t \ge t_1. \qquad (2.31)$$

Следовательно, из (2.24), (2.29) и (2.30_1), (2.30_2) вытекает, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\vartheta_m(t) \qquad (2.32)$$

сходится абсолютно на J и равномерно на J_0. Сумма, скажем, $x(t)$ ряда (2.32) непрерывна на J. Переходя в (2.21) к пределу при $m \to \infty$ получаем, что $x(t)$ является решением задачи (2.1$_1$), (2.1′) в классе C^1. В силу (2.24), (2.29), (2.30$_1$), (2.30$_2$), и (2.31) из (2.32) получаем оценку (2.27).

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - любые два решения задачи (2.1$_1$), (2.1′) в классе $u(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Тогда при $t \in J$ получаем

$$u(t) \le \left| \int_{t_1}^{t} \left[g_1(s)u(s) + \int_{t_0}^{s} h_1(s,\eta)u(\eta)d\eta \right] ds \right|,$$

откуда, согласно следствию 2.1, вытекает, что $x_2(t) \equiv x_1(t)$ на J.

Замечание 2.3. При выполнении условия (q_2) начальная задача Коши для системы (2.1$_1$) в каждой точке промежутка $(t_0, t_1]$ имеет единственное решение в классе C^1. При $t_1 = t_0$ условие (q_2) выполняется автоматически, потому что $q_2(t_0) = 0$. Таким образом, при выполнении условия (q_2) система (2.1$_1$) не имеет особенных точек на отрезке $[t_0, t_1]$.

Замечание 2.4. При нарушении условия (q_2) задача (2.1$_1$), (2.1′) может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе C^1. В самом деле, для задачи

$$x'_1(t) = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \int_0^t \left[x_1(\eta) - \frac{1}{2}x_2(\eta) \right] d\eta,$$

$$x'_1(t) = 2x_1 - x_2,\, t \ge 0,\, x_i(1) = x_i^1 \ \ (i = 1,2)$$

нарушается условие (q_2) и ни одно из решений

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) : x_1(t) = c_1 + c_2 e^{-t},\, x_2(t) = 2c_1 + 2c_2 t e^{-t}$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные) данной системы не удовлетворяет заданным начальным условиям при $x_2^1 \ne 2x_1^1$; если же $x_2^1 = 2x_1^1$, то данная задача имеет однопараметрическое семейство решений.

Теорема 2.2. Пусть $t_1 \geq T < \infty$. Если

$$q_2(t_0) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{T} h_1(s,\eta)\exp\left[\int_{\eta}^{s} g_1(\theta)d\theta\right]d\eta ds < 1, \qquad (q_3)$$

то задача (2.1$_1$), (2.1′) имеет решение $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| \leq \exp[R_2(t)]\left[P_2(t) + Q_2(t) + \frac{Q_2(t_0)}{1-q_2(t_0)}q_2(t)\right], \ t \geq t_0; \qquad (2.33)$$

решение задачи (2.1$_2$), (2.1′) единственно в классе C^1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1 для $t \in [t_0, t_1]$.

Замечание 2.5. При выполнении условия (q_3) начальная задача Коши для системы (2.1$_2$) с $T < \infty$ в каждой точке промежутка $[T, t_1]$ имеет единственное решение в классе C^1.

Замечание 2.6. При нарушении условия (q_3) задача (2.1$_2$), (2.1′) с $t_1 \geq T < \infty$ может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе C^1. В самом деле, для задачи

$$x'_i(t) = \int_0^1 2x_{3-i}(\eta)d\eta, t \geq 0, x_i(1) = x_i^1 \ \ (i = 1,2)$$

нарушается условие (q_3) и ни одно из решений $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$:

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t, \ x_2(t) = c_1(2t-1) + c_2 t$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные) данной системы не удовлетворяет заданным начальным условиям при $x_2^1 \neq x_1^1$; если же $x_2^1 = x_1^1$, то данная задача имеет однопараметрическое семейство решений.

Для задачи

$$x'_i(t) = \int_0^1 x_{3-i}(\eta)d\eta, t \geq 0, x_i(3/2) = x_i^1 \ \ (i = 1,2)$$

справедливы аналогичные утверждения, все решения данной системы имеют вид

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t,\ x_2(t) = c_1(t - \frac{1}{2}) + c_2(\frac{1}{2}t + \frac{3}{4})$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные).

Теорема 2.3. Пусть $t_1 < T \le \infty.$ Если

1) в случае $T = \infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta,0)d\eta,\ \int_{t_0}^{\infty} g_3(t,\eta)\exp[R_2^0(\eta)]d\eta,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} g_3(t,\eta)P_2^0(\eta)\exp[R_2^0(\eta)]d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0,$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} H_2^0(t,\eta)d\eta d < \infty,\ \int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} H_2^0(t,\eta)P_2^0(\eta)d\eta dt < \infty;$$

$$2)\ q_2 = \max\{q_2(t_0); q_2(T)\} < 1, \qquad (q_4)$$

то задача (2.1$_2$), (2.1$'$) имеет решений $x(t)$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| \le \exp[R_2(t)]\left[P_2(t) + Q_2(t) + \frac{Q_2}{1 - q_2}q_2(t)\right], t \ge t_0, \qquad (2.34)$$

где $Q_2 = \max\{Q_2(t_0); Q_2(T)\};$ решение задачи (2.1$_2$), (2.1$'$) в случае $T < \infty$ единственно в классе C^1, а в случае $T = \infty$ единственно в классе G^2 тех вектор-функций $x(t) \in C^1$, для которых интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} g_3(t,\eta)\|x(\eta)\|d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0,$ и

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty} h_1(t,\eta)\exp[-R_2^0(t)]\|x(\eta)\|d\eta dt < \infty.$$

Доказательство. Прежде всего нужно доказать, что в случае $T=\infty$ интегралы (2.20) сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. Для этого согласно условию 1) достаточно доказать, что интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} \| H(t,\eta,x_m(\eta)) - H(t,\eta,0) \| d\eta \ (m=1,2,...) \tag{2.35}$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. Это справедливо в силу (2.24) для интеграла (2.35) при $m=1$. В силу (2.24) из (2.25) имеем

$$\| x_2(t) \| \le \exp[R_2(t)][P_2(t)+Q_2(t)], \ t \ge t_0. \tag{2.36}$$

Следовательно, интеграл (2.35) при $m=2$ сходится по $t \in J$ и сходится равномерно по $t \in J_0$.

Методом полной математической индукции можно показать, что для любого натурального числа $m \ge 3$ справедлива оценка

$$\| x_m(t) \| \le \exp[R_2(t)]\left[P_2(t)+Q_2(t)+Q_2 q_2(t)\sum_{k=0}^{m-3} q_2^k \right], t \ge t_0, \tag{2.37}$$

и, значит, в случае $T=\infty$, интегралы (2.35) сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$. В силу (2.24) из (2.26) имеем

$$\| \vartheta_2(t) \| \le \exp[R_2(t)]Q_2(t), \ t \ge t_0. \tag{2.38}$$

Из (2.26) по индукции можно получить, что для любого натурального числа $m \ge 3$ справедлива оценка

$$\| \vartheta_m(t) \| \le \exp[R_2(t)]Q_2 q_2(t) q_2^{m-3}, t \ge t_0. \tag{2.39}$$

Из (2.24), (2.38) и (2.39) в силу условия (q_4) вытекает, что ряд (2.32) (для данного случая) сходится абсолютно на J и равномерно на J_0. Сумма, скажем, $x(t)$ этого ряда непрерывна на J. Из (2.37) получаем оценку (2.34). Следовательно, в случае $T=\infty$ интеграл, полученный из интеграла (2.20) заменой $x_m(\eta)$ на $x(\eta)$, сходится по $t \in J$ и сходится равномерно по $t \in J_0$.

Переходя в (2.21) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $x(t)$ является решением задачи (2.1_2), ($2.1'$) в классе C^1. Единственность решения показывается путем применения следствия 2.1.

Замечание 2.7. В случае $t_1 = t_0$ условие (q_4) принимает вид

$$q_2(T) = \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} h_1(s,\eta)\exp[R_2^0(\eta) - R_2^0(s)]d\eta ds < 1, \qquad (q_4^0)$$

что совпадает с соответствующим условием (q_1).

Замечание 2.8. При нарушении условия (q_4) задача (2.1_2), ($2.1'$) с $t_1 < T < \infty$ может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе C^1. В самом деле, для задачи

$$x'_i(t) = \int_0^3 \frac{1}{4} x_{3-i}(\eta)d\eta,\ t \ge 0,\ x_i\left(\frac{1}{6}\right) = x_i^1 (i = 1,2)$$

нарушается условие (q_4), здесь $q_2(0) = \frac{1}{8}, q_2(3) = \frac{17}{8}$, и ни одно из решений $x(t) = (x_1(t), x_1(t))$:

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad x_2(t) = \left(\frac{3}{4}t - \frac{9}{8}\right)c_1 + \left(\frac{9}{8}t - \frac{17}{48}\right)c_2$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные) данной системы не удовлетворяет заданным начальным условиям при $x_2^1 \ne -x_1^1$; если же $x_2^1 = -x_1^1$, то данная задача имеет однопараметрическое семейство решений. Отметим, что для данной задачи выполняется условие (q_3), но здесь $t_1 = \frac{1}{6} < 3$.

Следствие 2.2. Если:

1) в случае $T = \infty$ интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} H(t,\eta,0)d\eta, \int_{t_0}^{\infty} g_3(t,\eta)d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$;

2) выполняются условия (q_2) [соответственно (q_3) или (q_4)]

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[g_1(t)+\int_{t_0}^{T(t)}h_1(t,\eta)d\eta\right]dt<\infty, \tag{A$_2$}$$

$$\sup_J M_2(t)<\infty, \tag{B$_2$}$$

то решение $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ задачи (2.1$_1$), (2.1′) [соответственно (2.1$_2$), (2.1′) с $t_1\ge T<\infty$ или (2.1$_2$), (2.1′) с $t_1<T\le\infty$] ограничено на полуинтервале J. Если, кроме того,

$$\left|\int_{t_0}^{\infty}f_{2i}(t)dt\right|<\infty \quad (1\le i\le n), \tag{C$_2$}$$

где $f_{2i}(t)$ - компонента вектора $f_2(t)$, то компонента $x_i(t)\,(1\le i\le n)$ стремится к конечному пределу при $t\to\infty$. Если же $f_2(t)\equiv 0$, то нулевое решение системы (2.1$_1$) [соответственно (2.1$_2$) с $T<\infty$ или (2.1$_2$) с $T\le\infty$] устойчиво относительно начальных данных (2.1′) [соответственно (2.1′) с $t_1\ge T$ или $t_1\le T$].

Следствие 2.3. Если

1) выполняется условие 1) теоремы 2.3;

2) $$q_3=\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}h_1(s,\eta)\exp\left[\int_{\eta}^{s}g_1(\theta)d\theta\right]d\eta ds<1 \tag{q'_2}$$

[соответственно

$$q_4=\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}h_1(s,\eta)\exp\left[\int_{\eta}^{s}g_1(\theta)d\theta\right]d\eta ds<1 \tag{q'_3}$$

или

$$q_5=\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}h_1(s,\eta)\exp\left[\left|\int_{\eta}^{s}q_1(\theta)d\theta\right|\right]d\eta ds<1, \tag{q'_4}$$

то задача (2.1$_1$), (2.1′) [соответственно (2.1$_2$), (2.1′) с $T<\infty$ или (2.1$_2$), (2.1′) с $T\le\infty$] в каждой точке полуинтервала J [соответственно $[T,\infty)$ или $[t_0,T)$]

имеет единственное решение $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ в классе C^1 для случаев $T(t)\equiv t$, $T(t)\equiv T<\infty$ и в классе G^2 для случая $T=\infty$. Если, кроме того, выполняются условия (A_2) и (B_2), то $x(t)$ ограничено на J и при дополнительном выполнении условия (C_2) компонента $x_i(t)\ (1\le i\le n)$ стремится к конечному пределу при $t\to\infty$. Если же $f_2(t)\equiv 0$, то нулевое решение системы (2.1_1) [соответственно (2.1_2) с $T<\infty$ или (2.1_2) с $T\le\infty$] равномерно устойчиво на полуинтервале J [соответственно на $[T,\infty)$ или на $[t_0,T)$], т.е. устойчиво относительно начальных данных (2.1′) в каждой точке полуинтервала J [соответственно $[T,\infty)$ или $[t_0,T)$].

В самом деле, в случае $T(t)\equiv t$ и $t_1\in(t_0,\infty)$ имеем $q_2(t_0)\le q_3$, в случае $T(t)\equiv T<\infty$ и $t_1\in[T,\infty)$ - $q_2(t_0)\le q_4$ и в случае $T(t)\equiv T\le\infty$ и $t_1\in[t_0,T)$ - $q_2\le q_5$. Следовательно, из теоремы 2.1 с учетом для $t_1=t_0$ теоремы 1[16] или теоремы 1.1 при $F(t,x,u,v)\equiv F(t,x,u)$ (без требования условия (q'_2)) [соответственно из теоремы 2.2 или из теоремы 2.3 с учетом для $t_1=t_0$ теоремы 1.1 при $F(t,x,u,v)\equiv F(t,x,v)$] вытекает справедливость первой части данного предложения. Далее, в случае $T(t)\equiv t$ из оценки (2.27) и для $t_1=t_0$ из соответствующей оценки (1.13), в случае $T(t)\equiv T<\infty$ из оценки (2.33) и в случае $T(t)\equiv T\le\infty$ из оценки (2.34) получаем

$$\|x(t)\|\le N\exp\left[\int_{t_0}^{\infty}g_1(s)ds\right],\ t\ge t_0, \tag{2.40}$$

где, соответственно

$$N=\frac{1}{1-q_3}\sup_J\left\|x(t_1)+\int_{t_1}^{t}f_2(s)ds\right\|<\infty,\ t_1\in[t_0,\infty),$$

$$N=\frac{1}{1-q_4}\sup_J\left\|x(t_1)+\int_{t_1}^{t}f_2(s)ds\right\|<\infty,\ t_1\in[T,\infty),$$

и

$$N=\left(1+\frac{q_6}{1-q_5}\right)\sup_J\left\|x(t_1)+\int_{t_1}^{t}f_2(s)ds\right\|<\infty,\ t_1\in[t_0,T),$$

$$q_6=\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{T}h_1(s,\eta)\exp\left[\left|\int_{\eta}^{s}g_1(\theta)d\theta\right|\right]d\eta ds<\infty.$$

Из (2.40) вытекают утверждения об ограниченности и равномерной устойчивости.

Замечание 2.9. Из теоремы 2.2 для $t_1=T$ и третьего случая следствия 2.3 вытекает, что при выполнении условия (q'_4) задача (2.1_2), (2.1′) с $T<\infty$ в каждой точке отрезка $[t_0,T]$ имеет единственное решение $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ в классе C^1 и при $f(t)\equiv 0$ и выполнении условия (A_2) с $T(t)\equiv T<\infty$ нулевое решение системы (2.1_2) с $T<\infty$ равномерно устойчиво на отрезке $[t_0,T]$. То же, что и в следствии 2.3, имеет место относительно ограниченности решения $x(t)$ на J и стремления $x_i(t)\,(1\le i\le n)$ к конечному пределу при $t\to\infty$.

Замечание 2.10. При нарушении условия (q'_2) задача (2.1_1), (2.1′) в некоторых точках промежутка (t_0,∞) может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе C^1. В самом деле, для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$x'_i(t)=\int_0^t\frac{64}{(t+1)^2(\eta+1)^2}x_{3-i}(\eta)d\eta,\ (i=1,2),\ t\ge 0,$$

нарушается условие (q'_2) и ни одно из ее решений $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$:

$$x_1(t)=c_1b(t)+(-1)^{i-1}c_2\cos\left(\frac{8t}{t+1}\right)\ (i=1,2),$$

где

$$b(t) \equiv \exp\left(\frac{8t}{t+1}\right) + \exp\left(-\frac{8t}{t+1}\right),$$

c_1, c_2 - произвольные постоянные, не удовлетворяет в точках

$$t = t_1 = \frac{(2n+1)\pi}{16-(2n+1)\pi} \quad (n = 0,1,2)$$

промежутка $(0,\infty)$ начальным условиям $x_i(t_1) = x_i^1$ $(i = 1,2)$ при $x_2^1 \neq x_1^1$; если же $x_2^1 = x_1^1$, то данная задача имеет однопараметрическое семейство решений.

Замечание 2.11. При нарушении условия (q'_4) задача (2.1$_2$), (2.1′) в некоторой точке промежутка (t_0,∞) может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений в классе G^2. В самом деле, для системы

$$x'_i(t) = x_{3-i} + \int_0^\infty \frac{11}{2} e^{-3t} e^{-2\eta} x_1(\eta) d\eta \quad (i = 1,2), \ t \geq 0,$$

нарушается условие (q'_4) и ни одно из ее решений $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$:

$$x_i(t) = \left(e^t - \frac{55}{51} e^{-3t}\right) c_1 + \left(e^t + (-1)^i 3e^{-t}\right) c_2 \quad (i = 1,2)$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные) не удовлетворяет в точке $t = t_1 = \frac{1}{4} \ln \frac{55}{51}$ промежутка $(0,\infty)$ начальным условиям $x_i(t_1) = x_i^1$ $(i = 1,2)$ при $x_2^1 \neq -\frac{257+3\sqrt{2805}}{202} x_1^1$; если же $x_2^1 = -\frac{257+3\sqrt{2805}}{202} x_1^1$, то данная задача имеет однопараметрическое семейство решений

Комбинируя теоремы 2.2, 2.3 и следствия 2.2, 2.3 для $T < \infty$, получаем справедливость следующих двух предложений.

Следствие 2.4. Пусть $T < \infty$. Если выполняется условие (q'_4) то задача (2.1$_2$), (2.1′) с $t_1 \in (t_0,\infty)$ имеет решение $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ в классе C^1, удовлетворяющее неравенству (2.34); решение такой задачи единственно в классе C^1. Если, кроме того, выполняются условия (A_2) и (B_2), то $x(t)$

ограничено на J и при дополнительном выполнении условия (C_2) компонента $x_i(t)\,(1 \le i \le n)$ стремится к конечному пределу при $t \to \infty$. Если же $f_2(t) \equiv 0$, то нулевое решение системы (2.1_2) устойчиво относительно начальных данных $(2.1')$ с $t_1 > t_0$.

Следствие 2.5. Пусть $T < \infty$. Если $q_6 < 1$, то задача (2.1_2), $(2.1')$ в каждой точке полуинтервала J имеет единственное решение $x(t) = (x_1(t),..., x_n(t))$ в классе C^1. Если, кроме того, выполняются условия (A_2) и (B_2), то $x(t)$ ограничено на J и при дополнительном выполнении условия (C_2) компонента $x_i(t)\,(1 \le i \le n)$ стремится к конечному пределу при $t \to \infty$. Если же $f_2(t) \equiv 0$, то нулевое решение системы (2.1_2) равномерно устойчиво на полуинтервале J.

Замечание 2.12. Аналогично, как и в замечании 1.2, можно вывести оценки скорости сходимости последовательных приближений, определяемых соотношениями (2.19), (2.19′).

Замечание 2.13. Аналогично, как и в замечаниях 1.4, 1.5 и 1.6 можно рассмотреть случаи, когда в системе (2.1): 1) вектор-функция $F(t,x,v)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (L_1) не в области D_2, а в области

$$D_2^{(1)} = \left\{t_0 \le t < \infty, \|x\| < \infty, \|v\| \le \rho_1\right\}, \rho_1 \text{- } const > 0;$$

2) вектор-функция $H(t,\eta,x)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (L_2) не в области D_2, а в области

$$D_2^{(2)} = \left\{t \in J, t_0 \le \eta \le T(t), \|x\| \le \rho_2\right\}, \rho_2 \text{- } const > 0;$$

3)вектор-функции $F(t,x,v)$ и $H(t,\eta,x)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица (L_1) и (L_2) не в области D_2, а в областях $D_2^{(1)}$ и $D_2^{(2)}$ соответственно.

Замечание 2.14. Случай, когда в системе (2.1) вместо интервала с пределами от t_0 до $T(t)$ стоит интеграл с пределами от t до ∞ (система (2.1_3)), изучается аналогично случаям $T=\infty$ и $T(t)\equiv t$. В этом случае (t_0 заменяется на t, а $T(t)$ - на ∞) в лемме 2.1 требуется выполнение условий, соответствующих условиям в случае $T=\infty$, причем условие $q<1$ заменяется на ослабленное условие $q(\infty)<1$, и имеет место оценка, получающаяся из оценки (2.3_1), если в ней поменять местами промежутки изменения t и заменить $Q(t_0)$ на $Q(\infty), q(t_0)$ на $q(\infty), q^{(1)}(t)$ и $q^{(2)}(t)$ на

$$\int_t^{t_1}\int_{t_1}^{\infty} H(s,\eta)d\eta ds, \int_t^{t_1}\int_s^{t_1} H(s,\eta)d\eta ds, t_0 \le t \le t_1,$$

соответственно. Аналогичным образом получаются результаты для задачи (2.1_3), ($2.1'$) из соответствующих результатов для задач (2.1_2), ($2.1'$) с $T=\infty$ и (2.1_1), ($2.1'$), причем вместо условий (q_4) и (q'_4) будут фигурировать соответственно условия $q_2(\infty)<1$ и

$$q_7=\int_{t_0}^{\infty}\int_t^{\infty} h_1(t,\eta)\exp\left[\int_t^{\eta} g_1(\theta)d\theta\right]d\eta dt<1.$$

В дополнение к указанному, учитывая, что система (2.1_3) не содержит явно начальной точки t_0, можно установить, что при выполнении условия, соответствующего условию 1) теоремы 2.3, задача (2.1_3), ($2.1'$) при достаточно большом значении $t_1 \ge t_0$ имеет единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых на $J_1=[t_1,\infty)$ вектор-функций $x(t)$, для которых интегралы

$$\int_t^{\infty} g_3(t,\eta)\|x(\eta)\|d\eta$$

сходятся по $t\in J_1$ и сходятся равномерно по $t\in[t_1,t^*], t^*>t_1$ и

$$\int_{t_1}^{\infty}\int_t^{\infty} h_1(t,\eta)\exp\left[-\int_{t_1}^{t} g_1(\theta)d\theta\right]\|x(\eta)\|d\eta dt<\infty.$$

3. Предельная задача Коши

Рассмотрим для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$x'(t) = F(t, x, \int_t^{\infty} K(t, \tau, x(\tau))d\tau, \int_{t_0}^{T(t)} H(t, \eta, x(\eta))d\eta), \ t \geq t_0, \tag{3.1}$$

предельную задачу Коши

$$x(\infty) = x^{\infty}, \tag{3.1'}$$

где $x(t)$ $n \times 1$- вектор-функция $T(t) \equiv t$ или $T(t) \equiv T$ - $const$, $t_0 < T \leq \infty$; $F(t, x, u, v), K(t, \tau, x)$ и $H(t, \eta, x)$ - $n \times 1$, $p \times 1$ и $r \times 1$, соответственно, вектор-функции, непрерывные в области $D_3 = \{t_0 \leq t \leq \tau < \infty, t_0 \leq \eta \leq T(t), (t_0 \leq \eta < \infty$ в случае $T = \infty), \|x\| < \infty, \|u\| < \infty, \|v\| < \infty\}$ и удовлетворяющие в этой области условию Липшица (L_1), (L_2) и (L_3) (см. раздел 1настоящей главы) с неотрицательными непрерывными функциями $g_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $g_4(t, \tau)$ и $g_5(t, \eta)$ при $\tau \geq t \geq t_0, t_0 \leq \eta \leq T(t)$; x^{∞} - заданный постоянный $n \times 1$ - вектор.

Лемма 3.1. Пусть $u(t), \varphi(t), v(t), \omega(t, \tau)$ и $h(t, \eta)$ - неотрицательные непрерывные функции при $t_0 \leq t \leq \tau < \infty, t_0 \leq \eta \leq T(t)$, причем интегралы

$$\int_t^{\infty} \omega(t, \tau)u(\tau)d\tau, \int_t^{\infty} \omega(t, \tau)d\tau, \int_t^{\infty} \omega(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau$$

и, в случае $T = \infty$,

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t, \eta)u(\eta)d\eta, \int_{t_0}^{\infty} h(t, \eta)d\eta, \int_{t_0}^{\infty} h(t, \eta)\varphi(\eta)d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$;

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[v(t)z(t) + \int_t^{\infty} \omega(t, \tau)z(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T(t)} h(t, \eta)z(\eta)d\eta \right] dt < \infty,$$

где $z(t) \equiv u(t), z(t) \equiv 1$ и $z(t) \equiv \varphi(t)$.

Пусть, кроме того,

$$q(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta) d\eta ds < 1,$$

где

$$H(t,\eta) \equiv h(t,\eta) \exp[R(\eta) - R(t)];$$

$$R(t) \equiv \int_t^{\infty} [v(s) + \int_s^{\infty} \omega(t,\tau) d\tau] ds.$$

Тогда, если

$$u(t) \le \varphi(t) + \int_t^{\infty} \left[v(s)u(s) + \int_s^{\infty} \omega(s,\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T(s)} h(s,\eta)u(\eta)d\eta \right] ds, t \ge t_0, \qquad (3.2)$$

то

$$u(t) \le \exp[R(t)] \left[P(t) + Q(t) + \frac{Q(t_0)}{1 - q(t_0)} q(t) \right], t \ge t_0 \qquad (3.3)$$

где

$$P(t) \equiv \varphi(t) \exp[-R(t)] + \int_t^{\infty} \left[v(s)\varphi(s) + \int_s^{\infty} \omega(s,\tau)\varphi(\tau)d\tau \right] \exp[-R(s)] ds,$$

$$q(t) \equiv \int_t^{\infty} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta) d\eta ds, Q(t) \equiv \int_t^{\infty} \int_{t_0}^{T(s)} H(s,\eta) P(\eta) d\eta ds.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1.1

Замечание 3.1. Пусть $h(t,\eta) \equiv 0, \varphi(t) \equiv \varphi_1(t) + \varphi_2(t),$ где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - неотрицательные непрерывные функции на полуинтервале J, причем $\varphi_2(t)$ имеет неположительную непрерывную производную при $t \in J$ и конечный предел $\varphi_2(\infty)$ при $t \to \infty;$ выполняются условия леммы 3.1, где вместо $\varphi(t)$ стоит $\varphi_1(t).$ Тогда из неравенства (3.3) получаем

$$u(t) \le \exp[R(t)] \left\{ P_0(t) + \varphi_2(\infty) - \int_t^{\infty} \varphi'_2(s) \exp[-R(s)] ds \right\}, \ t \ge t_0,$$

где $P_0(t)$ - функция, полученная из функции $P(t)$ заменой $\varphi(t)$ на $\varphi_1(t)$.

Следствие 3.1. Если выполняются условия леммы 3.1 и $\varphi(t) \equiv 0$ на J, то $u(t) \equiv 0$ на J.

Введем обозначения:

$$h_1(t,\tau) \equiv g_2(t) g_4(t,\tau); \quad h_2(t,\eta) \equiv g_3(t) g_5(t,\eta);$$

$$f_3(t) \equiv F\left(t, 0, \int_t^\infty K(t,\tau,0)d\tau, \int_{t_0}^{T(t)} H(t,\eta,0)d\eta\right); R_3(t) \equiv \int_t^\infty \left[g_1(s) + \int_s^\infty h_1(s,\tau)d\tau\right]ds;$$

$$H_3(t,\eta) \equiv h_2(t,\eta)\exp[R_3(\eta) - R_3(t)]; \; q_3(t) \equiv \int_t^\infty \int_{t_0}^{T(s)} H_3(s,\eta)d\eta ds.$$

Теорема 3.1. Пусть

1) интегралы

$$\int_t^\infty K(t,\tau,0)d\tau, \int_t^\infty g_4(t,\tau)d\tau$$

и, в случае $T = \infty$,

$$\int_{t_0}^\infty H(t,\eta,0)d\eta, \int_{t_0}^\infty g_5(t,\eta)d\eta$$

сходятся по $t \in J$ и сходятся равномерно по $t \in J_0$;

2) $\left\|\int_{t_0}^\infty f_3(t)dt\right\| < \infty, \int_{t_0}^\infty \left[g_1(t) + \int_t^\infty h_1(t,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T(t)} h_2(t,\eta)d\eta\right]dt < \infty,$

$$q_3(t_0) = \int_{t_0}^\infty \int_{t_0}^{T(s)} H_3(s,\eta)d\eta ds < 1. \qquad (q_5)$$

Тогда задача (3.1), (3.1′) имеет решение $x(t)$ в классе Γ, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| \le N_3 \exp[R_3(t)]\left[1 + \frac{q_3(t)}{1 - q_3(t_0)} q(t)\right], t \ge t_0, \qquad (3.4)$$

где

$$N_3 = \sup_J \left\| x^\infty - \int_t^\infty f_3(s)ds \right\| < \infty;$$

решение задачи (3.1), (3.1′) единственно в классе Γ.

Доказательство. Для задачи (3.1), (3.1′) построим последовательные приближения:

$$x'_m(t) = F(t, x_m, \int_t^{\infty} K(t,\tau,x_m(\tau))d\tau, u_{m-1}(t)), t \ge t_0, \ (m = 1,2,...,); \tag{3.5}$$

$$x_m(\infty) = x^{\infty} \quad (m = 1,2,...,); \tag{3.5′}$$

$$x_0(t) = 0, \quad t \ge t_0,$$

где

$$u_m(t) \equiv \int_{t_0}^{T(t)} H(t,\eta,x_m(\eta))d\eta \ \ (m = 0,1,2,...).$$

Используя уточненный аналог теоремы 2.3 [21] об однозначной разрешимости в классе Г предельной задачи Коши (3.1′) для системы интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = F(t, x, \int_t^{\infty} K(t,\tau,x(\tau))d\tau), \ t \ge t_0,$$

методом полной математической индукции можно доказать, что для каждого натурального числа *m* задача (3.5), (3.5′) имеет единственное решение $x_m(t)$ в классе Г. Для каждого $m = 1,2,...$ задача (3.5), (3.5′) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x_m(t) = x^{\infty} - \int_t^{\infty} F(s, x_m(s), \int_s^{\infty} K(s,\tau,x_m(\tau))d\tau, u_{m-1}(s))ds. \tag{3.6}$$

Обозначим

$$\vartheta_m(t) \equiv x_m(t) - x_{m-1}(t) \quad (m = 1,2,...).$$

Из (3.6) при $t \in J$ получаем

$$\|\vartheta_m(t)\| \le \psi_m(t) + \int_t^{\infty}\left[g_1(s)\|\vartheta_m(s)\| + \int_s^{\infty} h_1(s,\tau)\|\vartheta_m(\tau)\|d\tau \right]ds \ (m = 1,2,...), \tag{3.7}$$

где

$$\psi_1(t) \equiv N_3, \psi_m(t) \equiv \int_t^{\infty}\int_{t_0}^{T(s)} h_2(s,\eta)\|\vartheta_{m-1}(\eta)\|d\eta ds \quad (m = 2,...).$$

Применяя к (3.7) лемму 3.1 с учетом замечания 3.1, получаем

$$\|\vartheta_1(t)\| \le N_3 \exp[R_3(t)], \quad t \ge t_0, \tag{3.8}$$

$$\|\vartheta_m(t)\| \le \exp[R_3(t)] \int_t^{\infty} \int_{t_0}^{T(s)} \exp[-R_3(s)] h_2(s,\eta) \|\vartheta_{m-1}(\eta)\| d\eta ds \quad (m = 2, \dots), t \ge t_0. \tag{3.9}$$

По индукции можно показать, что для любого натурального числа $m \ge 2$ справедлива оценка

$$\|\vartheta_m(t)\| \le N_3 \exp[R_3(t)] q_3(t) (q_3(t_0))^{m-2}, \quad t \ge t_0. \tag{3.10}$$

Так как $R_3(t) \le R_3(t_0) < \infty$ и $q_3(t) \le q_3(t_0), t \in J$, то из (3.8) и (3.10) следует, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \vartheta_m(t) \tag{3.11}$$

сходится абсолютно и равномерно на полуинтервале J. Сумма, скажем, $x(t)$ ряда (3.11) непрерывна и ограничена на J и для нее справедлива оценка (3.4).

Переходя в (3.6) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $x(t)$ является решением задачи (3.1), (3.1′); $x(t) \in \Gamma$.

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - любые два решения задачи (3.1), (3.1′) в классе Γ, $u(t) \equiv \|x_1(t) - x_2(t)\|$. Тогда получаем

$$u(t) \le \int_t^{\infty} \left[g_1(s) u(s) + \int_s^{\infty} h_1(s,\tau) u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{T(s)} h_2(s,\eta) u(\eta) d\eta \right] ds, t \ge t_0.$$

Отсюда на основании следствия 3.1 вытекает, что $x_2(t) \equiv x_1(t)$ на J.

Замечание 3.2. Справедливы следующие оценки:

$$\|x(t) - x_m(t)\| \le N_3 \exp[R_3(t)] \frac{q_3(t)(q_3(t_0))^{m-1}}{1 - q_3(t_0)} (m = 1, 2, \dots), t \ge t_0, \tag{3.12}$$

где $x(t)$ - решение задачи (3.1), (3.1′); $x_m(t)\,(m = 1, 2, \dots)$ - приближения, определяемые соотношениями (3.5), (3.5′).

Следствие 3.2. При выполнении условий теоремы 3.1 и $f_3(t) \equiv 0$ нулевое решение системы (3.1) устойчиво относительно предельных данных (3.1′).

Это вытекает из неравенства (3.4).

Замечание 3.3. При нарушении условия (q_5) задача (3.1), (3.1′) может не иметь решения или иметь бесчисленное множество решений. В самом деле, для системы

$$x_1'(t) = \int_t^\infty \frac{x_2(\tau)}{(t+1)^2(\tau+1)^2}d\tau + \int_0^t \frac{x_2(\eta)}{(t+1)^2(\eta+1)^2}d\eta,$$

$$x_2'(t) = \frac{6x_1}{(t+1)^2}, \ t \geq 0,$$

нарушается условие (q_5) и ни одно из ее решений $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$:

$$x_1(t) = \frac{1}{t+1}c_1 + c_2, \ x_2(t) = -\frac{3}{(t+1)^2}c_1 + \frac{3t-3}{t+1}c_2$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные) не удовлетворяет предельным условиям $x_i(\infty) = x_i^\infty (i = 1,2)$ при $x_2^\infty \neq 3x_1^\infty$; если же $x_2^\infty = 3x_1^\infty$, то соответствующая задача имеет однопараметрическое семейство решений.

Замечание 3.4. Имеют место замечания, аналогичные замечаниям 1.4, 1.5 и 1.6.

§ 2. Достаточные признаки отсутствия особенных точек у интегро-дифференциальных уравнений

Рассматриваются системы интегро-дифференциальных уравнений (с. и.-д. у.) вида

$$y'(x) = F(x, y, \int_a^x K(x, \tau, y(\tau)) d\tau), \qquad (2.1)$$

$$y'(x) = \Phi(x, y, \int_a^b H(x, \tau, y(\tau)) d\tau), \qquad (2.2)$$

где $y = y(x)$ - искомая n - мерная векторная функция; $F(x, y, u), K(x, \tau, y)$ и $\Phi(x, y, u), H(x, \tau, y)$ - известные n - мерные векторные функции, определенные соответственно в области $\Omega_1 = D_1 \times E_{2n}$ и $\Omega_2 = D_2 \times E_{2n}$ $(D_1 = \{c < x, \tau < d\}, D_2 = \{c < x < d, a \le \tau \le b\}, -\infty \le c < a < b < d \le \infty$; E_{2n} - $2n$ - мерное евклидово пространство компонент векторов y, u.

В соответствии с [3, с. 27] будем говорить, что с. и.-д. у. (2.1) или (2.2) не имеет особенных точек (в некотором классе S n - мерных векторных функций), если задача Коши $y(x_0) = y^0$ для с. и.-д. у. (2.1) или (2.2) в каждой фиксированной точке $x_0 \in J = (c, d)$ и с любым фиксированным начальным вектором y^0 имеет единственное решение (в классе S).

Устанавливаются достаточные условия, при которых точка $x = a$ не является особенной точкой для и.-д. у. (2.1) и все точки отрезка $[a, b]$ не являются особенными точками для с. и.-д. у. вида (2.2):

$$y'(x) = \Phi(x, \int_a^b H(x, \tau, y(\tau)) d\tau) \qquad (2.2')$$

в классе C n-мерных векторных функций, определенных и непрерывно дифференцируемых на J, и устанавливается отсутствие особенных точек у с. и.-д. у. вида (2.1) и (2.2) в классе Γ n-мерных векторных функций, непрерывно дифференцируемых и ограниченных на J.

Лемма 2.1. Если $u(x), v(x)$ и $\omega(x,\tau)$ - скалярные неотрицательные функции, определенные и непрерывные в области D_1, таковы, что при $x \in J$

$$u(x) \le A + \left| \int_a^x \left[v(t)u(t) + \left| \int_a^t \omega(t,\tau)u(\tau)d\tau \right| \right] dt \right|,$$

где A - неотрицательная постоянная, то на J

$$u(x) \le A \exp\left\{ \left| \int_a^x \left[v(t) + \left| \int_a^t \omega(t,\tau)d\tau \right| \right] dt \right| \right\}.$$

Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичной леммы в случае $x \ge a$ [3, с. 121].

Следствие 2.1. Если функции $u(x), v(x)$ и $\omega(x,\tau)$ удовлетворяют условиям леммы и $A = 0$, то $u(x) \equiv 0$ на J.

Норму вектора определим как сумму абсолютных величин его компонент.

Условимся говорить, что с. и.-д. у. (2.1) или (2.2) удовлетворяет условию (L), если векторныу функции $F(x,y,u)$ и $K(x,\tau,y)$ или $\Phi(x,y,u)$ и $H(x,\tau,y)$ непрерывны в области Ω_1 или Ω_2 и удовлетворяют условию Липшица

$$\|F(x,y,u) - F(x,z,v)\| \le g(x)\|y-z\| + g_1(x)\|u-v\|,$$

$$\|K(x,\tau,u) - K(x,\tau,z)\| \le h_1(x,\tau)\|y-z\|$$

в области Ω_1 или

$$\|\Phi(x,y,u) - \Phi(x,z,v)\| \le \alpha(x)\|y-z\| + \alpha_1(x)\|u-v\|,$$

$$\|H(x,\tau,y) - H(x,\tau,z)\| \le \beta_1(x,\tau)\|y-z\|$$

в области Ω_2, соответственно, где $g(x), g_1(x)$ и $h_1(x,\tau)$ или $\alpha(x), \alpha_1(x)$ и $\beta_1(x,\tau)$ - неотрицательные непрерывные функции в области D_1 или D_2, соответственно.

Если с. и.-д. у. (2.1) или (2.2) удовлетворяет условию (L), то в любой паре точек $(x,y), (x,z)$ из Ω_1 или из Ω_2 справедливы соотношения

$$\left\| F(x,y,\int_a^x K(x,\tau,y(\tau))d\tau) - F(x,z,\int_a^x K(x,\tau,z(\tau))d\tau) \right\| \le$$

$$\le g(x)\|y-z\| + \left| \int_a^x h(x,\tau)\|y(\tau)-z(\tau)\| d\tau \right| \qquad (L_1)$$

или

$$\left\| \Phi(x,y,\int_a^b H(x,\tau,y(\tau))d\tau) - \Phi(x,z,\int_a^b H(x,\tau,z(\tau))d\tau) \right\| \le$$

$$\le \alpha(x)\|y-z\| + \int_a^b \beta(x,\tau)\|y(\tau)-z(\tau)\| d\tau, \qquad (L_2)$$

соответственно,

где

$$h(x,\tau) \equiv g_1(x)h_1(x,\tau),\ \beta(x,\tau) \equiv \alpha_1(x)\beta_1(x,\tau).$$

Теорема 2.1. Если с. и.-д. у. (2.1) удовлетворяет условию (L), то точка $x=a$ не является особенной точкой для с. и.-д. у. (2.1) в классе C.

Доказательство. В классе C задача Коши $y(a)=y^0$ для с. и.-д. у. (2.1) эквивалентна системе интегральных уравнений (с. и. у.)

$$y(x) = y^0 + \int_a^x F(t,y(t),\int_a^t K(t,\tau,y(\tau))d\tau)dt. \qquad (2.3)$$

Поэтому достаточно доказать, что при произвольно фиксированном векторе y^0 с. и. у. (2.3) имеет единственное решение в классе C. Произвольно фиксируем y^0 и для с. и. у. (2.3) построим последовательные приближения:

$$y_0(x) \equiv 0,\ y_{m+1}(x) \equiv y^0 + \int_a^x F(t,y_m(t),\int_a^t K(t,\tau,y_m(\tau))d\tau)dt. \qquad (2.4)$$

В силу условия (L) $y_m(x) \in C$ $(m=0,1,2,...)$.

Введем в рассмотрение скалярные функции

$$P(x) \equiv \|y^0\| + \left| \int_a^x \left\| F(t,0,\int_a^t K(t,\tau,0)d\tau) \right\| dt \right|,$$

$$Q(x) \equiv \left| \int_a^x \left[g(t) + \left| \int_a^t h(t,\tau) d\tau \right| \right] dt \right|.$$

Функции $P(x)$ и $Q(x)$ на J неотрицательны, непрерывны и на $(c,a]$ - монотонно невозрастающие, а на $[a,d)$ - монотонно неубывающие.

Методом полной математической индукции доказывается, что для любого натурального числа m справедлива оценка

$$\| y_m(x) - y_{m-1}(x) \| \le P(x) \frac{Q^{m-1}(x)}{(m-1)!}, \ x \in J.$$

Отсюда вытекает, что последовательность последовательных приближений (2.4) сходится на промежутке J и сходится равномерно на любом конечном отрезке $\Delta = [x_1, x_2]$, $c < x_1 < a < x_2 < d$, к некоторой векторной функции $y(x)$, которая определена и непрерывна на J. Переходя в (2.4) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что функция $y(x)$ удовлетворяет с. и. у. (2.3). Далее убеждаемся, что $y(x) \in C$.

Методом от противного с использованием следствия 2.1 леммы 2.1 показывается единственность решения с. и. у. (2.3) в классе C.

Следствие 2.2. Пусть с. и.-д. у. вида (2.1):

$$y'(x) = F(x, y, \int_a^x K(x, \tau, y(\tau)) d\tau) + f(x) \tag{2.1$'$}$$

удовлетворяет условию (L) и

$$\int_c^d \left\| F(x, 0, \int_a^x K(x, \tau, 0) d\tau) \right\| dx < \infty, \tag{A}$$

$$\int_c^d \left[g(x) + \left| \int_a^x h(x,\tau) d\tau \right| \right] dx < \infty, \tag{B}$$

интеграл

$$\int_a^x f(t) dt \tag{C}$$

является ограниченной векторной функцией для $x \in J$. Тогда все решения с. и.-д. у. (2.1′), проходящие через точки области $J \times E_n$ (переменной x и вектора y) с абсциссой $x = a$, ограничены на промежутке J.

Действительно, так как с. и.-д. у. (2.1′) удовлетворяет условию (L), то, согласно теореме 2.1, через любую точку области $J \times E_n$ с абсциссой $x=a$ проходит решение системы (2.1′), и каждое такое решение $y(x)$ с. и.-д. у. (2.1′) определено и непрерывно дифференцируемо на J. В данном случае в выражение для функции $P(x)$ входит дополнительно слагаемое

$$\sup_J \left\| \int_a^x f(t)dt \right\|,$$

которое является конечным, в силу ограниченности интеграла (C) при $x \in J$. Из условий (A) и (B) следует, что функции $P(x)$ и $Q(x)$ ограничены на J. Поэтому при $x \in J$ получаем

$$\|y(x)\| \leq P \exp Q,$$

где

$$P = \sup P(x), \;\; Q = \sup Q(x).$$

Следовательно, векторная функция $y(x)$ ограничена на J.

Следствие 2.3. Пусть 1) с. и.-д. у. (2.1′) удовлетворяет условию (L), где $D_1 = \{a \leq \tau \leq x < d\}$ (соответственно: $D_1 = \{c < x \leq \tau \leq a\}$);

2) $\int_a^d \left\| F(x, 0, \int_a^x K(x, s, 0)ds) \right\| dx < \infty, \; \int_a^d \left[g(x) + \int_a^x h(x, s)ds \right] dx < \infty$

(соответственно:

$\int_c^a \left\| F(x, 0, \int_a^x K(x, s, 0)ds) \right\| dx < \infty, \; \int_c^a \left[g(x) + \int_x^a h(x, s)ds \right] dx < \infty$), и интеграл (C) является ограниченной векторной функцией для $x \in J_1 = [a,d)$ (соответственно: для $x \in J_2 = (c,a]$). Тогда все решения системы (2.1′) ограничены на полуинтервале J_1 (соответственно: на полуинтервале J_2).

Пусть, кроме того,

$$\left\|\int_a^d f(x)dx\right\| < \infty \text{ (соответственно: } \left\|\int_c^a f(x)dx\right\| < \infty.$$

Тогда каждая компонента $y_i(x)$ $(i = 1,...,n)$ всякого решения $y(x) = (y_1(x),..., y_n(x))$ с. и.-д. у. (2.1′) стремится к конечному пределу при $x \to d$ (соответственно: при $x \to c$). При этом предел отличен от нуля для каждой из компонент тех решений системы (2.1′) , начальные векторы $y(a) = (y_1(a),..., y_n(a))$ которых подчинены соотношениям

$$|R_i| - S_i - (R + S)T\exp T > 0\ (i = 1,...n), \qquad (R)$$

где

$$R_i = y_i(a) + \int_a^d f_1(t)dt;\ S_i = \int_a^d \left|F_i(t,0,\int_a^t K(t,s,0)ds)\right| dt,$$

$$R = \sup_{J_1}\left\|y(a) + \int_a^x f(t)dt\right\|, S = \int_a^d \left\|F(t,0,\int_a^t K(t,s,0)ds\right\| dt,$$

$$T = \int_a^d \left[g(t) + \int_a^t h(t,s)ds \right] dt$$

(соответственно:

$$R_i = y_i(a) - \int_c^a f_i(t)dt,\ S_i = \int_c^a \left|F_i(t,0,\int_a^t K(t,s,0)ds)\right| dt,$$

$$R = \sup_{J_2}\left\|y(a) - \int_x^a f(t)dt\right\|, S = \int_c^a \left\|F(t,0,\int_a^t K(t,s,0)ds\right\| dt,$$

$T = \int_c^a \left[g(t) + \int_t^a h(t,s)ds \right] dt$). (В этих соотношениях u_i есть i - я компонента вектора $u = (u_1,...,u_n)$).

В самом деле, из следствия 2.2 следует, что всякое решение $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ с. и.-д. у. (2.1′) ограничено при $x \in J_1$, причем

$$|y_i(x)| \le (R+S)\exp T \ (i = 1, \ldots n) \text{ при } x \in J_1. \tag{2.5}$$

Поэтому получаем

$$\int_a^d \left| F_i(t, y(t), \int_a^t K(t, s, y(s))ds) \right| dt < \infty \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, из тождеств

$$y_i(x) \equiv y_i(a) + \int_a^x \left[F_i(t, y(t), \int_a^t K(t, s, y(s))ds) + f_i(t) \right] dt \ \ (i = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

вытекает, что функции $y_i(x)\,(i = 1, \ldots, n)$ стремятся к конечным пределам при $x \to d$. Далее, из тождеств (2.6), принимая во внимание (2.5), получаем

$$\left| \lim_{x \to d} y_i(x) \right| \ge |R_i| - S_i - (R+S)T \exp T \ (i = 1, \ldots, n),$$

откуда, согласно (R), следует требуемое.

Аналогично доказывается второй случай.

Замечание 2.1. В случае, когда система (2.1′) является линейной:

$$y'_i(x) = \sum_{k=1}^n \left[p_{ik}(x) y_k + \int_a^x K_{ik}(x, s) y_k(s) ds \right] + f_i(x) \ \ (i = 1, \ldots, n), \tag{2.1^0}$$

неравенства (R), где для данного случая $S_i = S = 0$, несколько ослабляются: вместо множителя T в (R) фигурируют в данном случае выражения

$$\int_a^d \sum_{k=1}^n \left[|p_{ik}(t)| + \int_a^t |K_{ik}(t, s)| ds \right] dt \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

(соответственно:

$$\int_c^a \sum_{k=1}^n \left[|p_{ik}(t)| + \int_t^a |K_{ik}(t, s)| ds \right] dt \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

Следствие 2.4. При выполнении условий следствия 2.3 каждое решение с. и.-д. у. (2.1′), для начального вектора $y(a)$ которого выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}|R_i| - S - (R+S)T\exp T > 0,$$

стремится к конечному, отличному от нулевого, постоянному вектору при $x \to d$ (соответственно: при $x \to c$).

Следствие 2.5. Пусть
$f(x) \equiv F(x,o,o) \equiv K(x,s,o) \equiv 0.$

Если выполняются условия следствия 2.3 и условие

$$T\exp T < 1,$$

то любое нетривиальное решение с. и.-д. у. (2.1′) стремится к конечному, отличному от нулевого, постоянному вектору при $x \to d$ (соответственно: при $x \to c$).

Теорема 2.2. Если с. и.-д. у. (2.1) удовлетворяет условию (L), и выполняются условия (A), (B) и

$$q = \int_c^d \left[g(x) + \left| \int_a^x h(x,\tau)d\tau \right| \right] dx < 1, \qquad (q)$$

то с. и.-д. у. (2.1) не имеет особенных точек в классе Г.

Доказательство. В классе C задача Коши $y(x_0) = y^0$ для с. и.-д. у. (2.1) эквивалентна с. и. у.

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t), \int_a^t K(t,\tau,y(\tau))d\tau)dt. \qquad (2.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что множество V всех n - мерных векторных функций, непрерывных и ограниченных на промежутке J, с метрикой

$$\rho(y,z) = \sup\|y(x) - z(x)\|,\ y, z \in V,$$

образует полное метрическое пространство.

В пространстве V введем оператор T:

$$T[y] \equiv y^0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t), \int_{a}^{t} K(t,\tau, y(\tau))d\tau)dt. \tag{2.8}$$

Для любого элемента *y(x)* пространства V, вследствие (L_1), при $x \in J$ получаем

$$\left\| \int_{x_0}^{x} F(t, y(t), \int_{a}^{t} K(t,\tau, y(\tau))d\tau)dt \right\| \le \int_{c}^{d} \left\| F(t,0, \int_{a}^{t} K(t,\tau,0)d\tau) \right\| dt + \\ +P\int_{c}^{d} \left[g(t) + \left| \int_{a}^{t} h(t,\tau)d\tau \right| \right] dt, \tag{2.9}$$

где

$$P = \sup \|y(x)\| < \infty.$$

В силу условий (A), (B) и соотношения (2.9) из (2.8) следует, что функция $T[y(x)]$ ограничена на J. Следовательно, оператор V отображает элементы пространства V в элементы того же пространства. Далее, для любых элементов $y(x)$ и $z(x)$ пространства V имеем на J

$$\|T[y(x)] - T[z(x)]\| < q\rho(y,z),$$
$$\rho(T[y], T[z] \le q\rho(y,z).$$

Отсюда, согласно условию (q), вытекает, что T - оператор сжатия. Следовательно, на основании принципа сжатых отображений, с. и. у. (2.7) при произвольно фиксированном векторе y^0 имеет единственное решение $y(x)$ в пространстве V; причем $y(x)$ непрерывно дифференцируема на J и значит, $y(x) \in \Gamma$.

Для линейной с. и.-д. у. (2.1^0) имеет место

Теорема 2.2^0 . Если с. и.-д. у. (2.1^0) удовлетворяет условию (L), и выполняются условия

$$\int_{c}^{d} \left[|p_{ik}(x)| + \int_{a}^{x} |K_{ik}(x,\tau)| d\tau \right] dx < \infty \ (i, k = 1,...,n), \tag{B}$$

$$\left| \int_{c}^{d} f_i(x)dx \right| < \infty \ (i = 1,...,n), \tag{A$_0$}$$

$$q_0 = \max_{1\le i\le n} \int_c^d \sum_{k=1}^n \left[\left| p_{ik}(x) \right| + \left| \int_a^x \left| K_{ik}(x,\tau) \right| d\tau \right| \right] dx < 1, \qquad (q_0)$$

то с. и.-д. у. (2.1^0) не имеет особенных точек в классе Г.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.2, только здесь метрика в пространстве V вводится следующим образом:

$$\rho(y,z) = \max_{1\le i\le n} \sup_J \left| y_i(x) - z_i(x) \right|,$$

$$y = (y_1,\dots,y_n),\ z = (z_1,\dots,z_n) \in V.$$

Примеры.

2.1. С. и.-д. у.

$$y'_1(x) = \frac{1}{6} y_2,$$

$$y'_2(x) = \frac{1}{18}\left[(x+2)^{-\frac{1}{2}} + (3-x)^{-\frac{1}{2}} \right] y_1 +$$

$$+ \int_{-1}^{x} \frac{1}{18} \left\{ \left[(\tau+2)^{-\frac{3}{2}} - (3-\tau)^{-\frac{3}{2}} \right] y_1(\tau) - \frac{1}{3} \left[(\tau+2)^{-\frac{1}{2}} + (3-\tau)^{-\frac{1}{2}} \right] y_2(\tau) \right\} d\tau \qquad (2.10)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.2^0 $(c=-2, \quad d=3)$. Матрица

$$\begin{pmatrix} x^2+143 & x+1 \\ 12x & 6 \end{pmatrix}$$

является фундаментальной матрицей с. и.-д. у. (2.10). Эта матрица на интервале (-2,3) обратима. Следовательно, с. и.-д. у. (2.10) не имеет особенных точек.

2.2. Для с. и.-д. у.

$$y'(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y_2 + \int_0^x \frac{1}{9}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+\tau^2)^{-\frac{3}{2}} y_1(\tau) d\tau,$$

$$y'_2(x) = -\frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y_1 \qquad (2.11)$$

выполняются условия теоремы 2.2^0 (здесь $(c=-\infty, \quad d=8)$.

Матрица

$$\begin{pmatrix} 6x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} & -3 \\ (18+17x^2)(1+x^2)^{-1} & x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

есть фундаментальная матрица с. и.-д. у. (2.11). Эта матрица обратима на всей вещественной оси. Поэтому с. и.-д. у. (2.11) не имеет особенных точек.

2.3. Приведем пример, показывающий существенность условия (q_0). Для с. и.-д. у.

$$y'_1(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y_2 - \int_0^x 4(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+\tau^2)^{-\frac{3}{2}} y_1(\tau)d\tau,$$

$$y'_2(x) = 4(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} y_1 \quad (c=-\infty,\, d=\infty) \tag{2.12}$$

выполняются условия теоремы 2.2^0, за исключением условия (q_0), ибо в данном случае $q_0 = 8$. С. и.-д. у. (2.12) имеет особенные точки $x_0 = \pm 1$, потому что ее фундаментальная матрица

$$\begin{pmatrix} x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} & 1 \\ (1+3x^2)(1+x^2)^{-1} & 4x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

необратима в указанных точках.

Аналогично теоремам 2.2 и 2.2^0 доказываются следующие предложения:

Теорема 2.3. Если с. и.-д. у. (2.2) удовлетворяет условию (L) и

$$\int_c^d \left[\alpha(x) + \int_a^b \beta(x,\tau)d\tau \right] dx < \infty,$$

$$\int_c^d \left\| \Phi(x, 0, \int_a^b H(x,\tau,0)d\tau \right\| dx < \infty,$$

$$\int_c^d \left[\alpha(x) + \int_a^b \beta(x,\tau)d\tau \right] dx < 1, \tag{Q}$$

то с. и.-д. у. (2.2) не имеет особенных точек в классе Γ.

Теорема 2.3^0. Если с. и.-д. у.

$$y'_i(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[r_{ik}(x)y_k+\int_t^a H_{ik}(x,\tau)y_k(\tau)d\tau\right]+\varphi_i(x)\ (i=1,...,n) \qquad (2.2^0)$$

удовлетворяет условию (L) и

$$\int_c^d\left[|r_{ik}(x)|+\int_a^b|H_{ik}(x,\tau)|d\tau\right]dx<\infty\ (i,k=1,...,n),$$

$$\left|\int_c^d\varphi_i(x)dx\right|<\infty \qquad (i=1,...,n),$$

$$Q_0=\max_{1\le i\le n}\int_c^d\sum_{k=1}^{n}\left[|r_{ik}(x)|+\int_a^b|H_{ik}(x,\tau)|d\tau\right]dx<1, \qquad (Q_0)$$

то с. и.-д. у. (2.2^0) не имеет особенных точек в классе Γ.

Примеры.

2.4. С. и.-д. у.

$$y'_1(x)=\int_2^3\frac{2}{9}y_1(\tau)d\tau,$$

$$y'_2(x)=-\frac{1}{10}\left[(x-1)^{-\frac{1}{2}}+(5-x)^{-\frac{1}{2}}\right]y_1 \qquad (2.13)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.3^0 (здесь $(c=1,\quad d=5)$. Ее фундаментальная матрица

$$\begin{pmatrix} -15(x+2) & 0 \\ (x+8)(x-1)^{-\frac{1}{2}}-(x+16)(5-x)^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

на (1, 5) обратима. Следовательно, с. и.-д. у. (2.13) не имеет особенных точек.

2.5. Для с. и.-д. у.

$$y'_1(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}x\tau(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}y_2(\tau)d\tau,$$

$$y'_2(x)=x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}y_1 \quad (c=-\infty,\ d=8) \qquad (2.14)$$

выполняются условия теоремы 2.3^0.

Фундаментальная матрица

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

с. и.-д. у. (2.14) обратима на всей вещественной оси, и значит, с. и.-д. у. (2.14) не имеет особенных точек .

2.6. Условие (Q_0) является существенным, что подтверждается с. и.-д. у.

$$y'_1(x) = \int_1^2 \frac{2}{3} y_1(\tau)d\tau,$$

$$y'_2(x) = \frac{1}{9}\left[(x+1)^{-\frac{1}{2}} + (3-x)^{-\frac{1}{2}}\right] y_1 \quad (c=-1, d=3). \qquad (2.15)$$

Для с. и.-д. у. (2.15) не выполняется условие (Q_0), так как здесь $Q_0 = \frac{8}{3},$ и эта система имеет особенную точку $x_0 = 0,$ потому что ее фундаментальная матрица $\begin{pmatrix} \frac{27}{2}x & 0 \\ (x-2)(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+6)(3-x)^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}$ необратима при $x = 0.$

Можно также доказать, что справедлива

Теорема 2.4. Если с. и.-д. у. (2.2′) (соответственно: с. и.-д. у. (2.2^0) при $r_{ik}(x) \equiv 0 \; (i,k=1,\ldots,n)$) удовлетворяет условию (L) и

$$\int_a^b \int_a^b \beta(x,\tau)d\tau dx < 1$$

(соответственно:

$$H = \max_{1\le i\le n} \int_a^b \int_a^b \sum_{k=1}^n \left|H_{ik}(x,\tau)\right| d\tau dx < 1, \qquad (H)$$

то все точки отрезка $[a,b]$ не являются особенными точками для с. и.-д. у. (2.2′) (соответственно: с. и.-д. у. (2.2^0) при $r_{ik}(x) \equiv 0 \; (i,k=1,\ldots,n)$) в классе C.

Примеры.

2.7. С. и.-д. у.

$$y'_1(x)=\int_{-3}^{1}\frac{1}{32}y_2(\tau)d\tau,\quad y'_2(x)=\int_{-3}^{1}\frac{1}{32}y_1(\tau)d\tau \qquad (2.16)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.4 (здесь $c=-\infty,\ d=\infty$). Ее фундаментальная матрица $\begin{pmatrix} x+1 & 8 \\ 8 & x+1 \end{pmatrix}$ на отрезке [-3,1] обратима. Следовательно, все точки отрезка [-3,1] не являются особенными точками для с. и.-д. у. (2.16). Указанная матрица необратима при $x=-9;7$. Таким образом, условия теоремы 2.4 не гарантируют отсутствие особенных точек (на промежутке (c,d)) у системы (2.2^0) при $r_{ik}(x)\equiv 0\ (i,k=1,...,n)$.

2.8. Условие (H) является существенным, что подтверждается с. и.-д.у.

$$y'_1(x)=\int_{0}^{1}4y_2(\tau)d\tau,\qquad y'_2(x)=\int_{0}^{1}4y_1(\tau)d\tau, \qquad (2.17)$$

для которой $H=4$, и точки $x_0=\frac{1}{4};\frac{3}{4}$ отрезка [0,1] являются особенными точками для с. и.-д. у. (2.17), потому что ее фундаментальная матрица $\begin{pmatrix} 4x-2 & 1 \\ 1 & 4x-2 \end{pmatrix}$ необратима в указанных точках.

Замечания.

2.2. Для того чтобы заданная точка $x_0\in J$ не была особенной точкой для с. и.-д. у. (2.1) (соответственно: (2.1^0)), удовлетворяющей условию (L), достаточно выполнения условий (A), (B) и

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left[g(t)+\left|\int_{a}^{t}h(t,\tau)d\tau\right|\right]dt\right|<1 \qquad \text{при} \quad x\in J$$

(соответственно: условий (B_0),

$$\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{n}\left[|p_{ik}(t)|+\left|\int_a^t |K_{ik}(t,\tau)|d\tau\right|\right]dt\right|<1 \ \ (i=1,...,n) \quad \text{при} \quad x\in J$$

и ограниченности на J интегралов

$$\int_a^t f_i(t)dt \ \ (i=1,...,n)).$$

Аналогичное предложение имеет место и для с. и.-д. у. (2.2) и (2.2^0).

2.3. Если с. и.-д. у. (2.1) (соответственно: (2.1^0)), удовлетворяет условию (L), и выполняются условия (A), (B) и

$$\int_c^a\left[g(x)+\int_x^a h(x,\tau)d\tau\right]dx<1$$

или

$$\int_a^d\left[g(x)+\int_a^x h(x,\tau)d\tau\right]dx<1$$

(соответственно: условия (A_0), (B_0) и

$$\max_{1\le i\le n}\int_c^a\sum_{k=1}^{n}\left[|p_{ik}(x)|+\int_x^a|K_{ik}(x,\tau)|d\tau\right]dx<1$$

или

$$\max_{1\le i\le n}\int_a^d\sum_{k=1}^{n}\left[|p_{ik}(x)|+\int_a^x|K_{ik}(x,\tau)|d\tau\right]dx<1,$$

то с. и.-д. у. (2.1) (соответственно: (2.1^0)), в классе Γ не имеет особенных точек на $(c,a]$ или $[a,d)$.

Аналогичное предложение имеет место и для с. и.-д. у. (2.2) и (2.2^0), здесь $D_2=\{a\le x<d,\, a\le\tau\le b\}$.

2.4. Для с. и.-д. у. (2.1) и (2.1^0) или (2.2) и (2.2^0), удовлетворяющих условию (L), в случае, когда $D_1=\{c\le x,\tau\le d\}$ или $D_2=\{c\le x\le d,\, a\le\tau\le b\}$, $-\infty<c\le a<b\le d<\infty,$ интегралы, фигурирующие в условиях теорем 2.2 и 2.2^0 или 2.3 и 2.3^0, заведомо существуют и для отсутствия особенных точек у с. и.-д. у. (2.1) и (2.1^0) или (2.2) и (2.2^0) достаточно выполнения условий (q) и

(q_0) или (Q) и (Q_0), соответственно. Если $D_1 = \{-\infty < x, \tau < \infty\}$ или $D_2 = \{-\infty < x < \infty, a \le \tau \le b\}$ и требуется выяснить отсутствие особенных точек у с. и.-д. у. (2.1) и (2.1^0) или (2.2) и (2.2^0) на некотором конечном промежутке $[\alpha, \beta]$, то положительный ответ дает выполнение условий (q) и (q_0) или (Q) и (Q_0), соответственно, где $c=\alpha$ и $d = \beta$.

2.5. Все предложения настоящего параграфа остаются в силе, если вместо непрерывности функций $\omega(x,\tau), K(x,\tau,y), h_1(x,\tau)$ и $K_{ik}(x,\tau)$ или $H(x,\tau,y)$, $\beta_1(x,\tau)$ и $H_{ik}(x,\tau)\,(i,k=1,...,n)$ относительно τ имеет место только их интегрируемость по τ на всяком конечном отрезке Δ (в замечании 2.4 - на $[c,d]$ и на Δ) или на отрезке $[a,b]$, соответственно.

§ 3. О корректности на полуоси начальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений вольтерро-фредгольмова типа

Для системы интегро-дифференциальных уравнений (с.и.-д.у)

$$x'(t) = F(t, x(t), \int_{t_0}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau, \int_{t_0}^{T} H(t,\eta,x(\eta))d\eta), t \ge t_0 \tag{3.1}$$

изучается начальная задачи Коши

$$x(t_0) = x^0, \tag{3.1$'$}$$

где $x(t)$ - искомая $n\times 1$ векторная функция; $t_0 < T < \infty; F(t,x,v_1,v_2), K(t,\tau,x)$ и $H(t,\eta,x)$ - $n\times 1, n_1\times 1$ и $n_1 \times 1$ - соответственно векторные функции, непрерывные в области $D = \{t_0 \le t < \infty, t_0 \le \tau \le t, t_0 \le \eta \le T, \|x\| < \infty,$ $\|v_1\| < \infty, \|v_2\| < \infty\}$ и удовлетворяющие в этой области условию Липшица

$$\|F(t,x^{(1)},v_1^{(1)},v_2^{(1)}) - F(t,x^{(2)},v_1^{(2)},v_2^{(2)}z,v)\| \le$$
$$\le g_1(t)\|x^{(1)} - x^{(2)}\| + g_2(t)\|v_1^{(1)} - v_1^{(2)}\| + g_3(t)\|v_2^{(1)} - v_2^{(2)}\|,$$

$$\left\|K(t,\tau,x^{(1)})-K(t,\tau,x^{(2)})\right\| \le g_4(t,\tau)\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,$$
$$\left\|H(t,\eta,x^{(1)})-H(t,\eta,x^{(2)})\right\| \le g_5(t,\eta)\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|$$

с неотрицательными непрерывными функциями $g_i(t)\ (i=1,2,3),\ g_4(t,\tau)$ и $g_5(t,\eta)$ при $t\in J=[t_0,\infty),\ \tau\in[t_0,t]$ и $\eta\in J_0=[t_0,T];x^0$ - заданный постоянный $n\times 1$ вектор.

Под $\|x\|$ понимается сумма или максимум абсолютных величин компонент вектора x.

Устанавливаются достаточные коэффициентные условия существования в классе $C^1[t_0,\infty)$ $n\times 1$ векторных функций, определенных и непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J, единственного решения задачи (3.1), $(3.1')$, его ограниченности на J и стремления к конечному предельному вектору при $t\to\infty$, устойчивости решений системы (3.1) относительно начальных данных $(3.1')$.

Эти вопросы изучались в [15] (не только для системы (3.1) с $T<\infty$ и слабыми липшицевыми нелинейностями, но и для системы (3.1) с $T=\infty$ и сильными липшицевыми нелинейностями) методом построения специальных последовательных приближений - последовательные приближения определяются из рекуррентных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Вопрос об однозначной разрешимости задачи (3.1), $(3.1')$ при $x^0=0$ на конечном промежутке J_0 изучался в [22] (для системы (3.1) с сильными липшицевыми нелинейностями, с постоянными коэффициентами Липшица) методом подстановки

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} y(s)ds,\ t\in J_0$$

и применением к вспомогательной системе интегральных уравнений принципа сжимающих отображений.

В настоящей работе изучение задачи (3.1), (3.1′) проводится методом подстановки

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} y(s)ds, \ (t \in J) \qquad (3.2)$$

и построением для вспомогательной системы интегральных уравнений специальных последовательных приближений, которые определяются из рекуррентных систем интегральных уравнений типа Вольтерра. Обобщаются соответствующий результат из [22] и в случае $g_3(t)g_5(t,\eta)$ не зависит от t соответствующий результат из [15]. Показывается существенность условия однозначной разрешимости задачи (3.1) , (3.1′) , точность этого условия для случая интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма (в (3.1) $F(t,x,v_1,v_2) \equiv F(t,x,v_2)$) и необходимость учета в этом условии членов вне фредгольмова интеграла.

Лемма 3.1. Пусть для неотрицательных непрерывных функций $u(t), c(t), \vartheta(t)$ и $\omega(t,\tau)$ при $t \ge t_0, t_0 \le \tau \le t$

$$u(t) \le c(t) + \vartheta(t)\int_{t_0}^{t} u(s)ds + \int_{t_0}^{t} \omega(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau} u(s)dsd\tau, \, t \ge t_0. \qquad (3.3)$$

Тогда

$$u(t) \le c(t) + \vartheta(t)u_0(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(t,\tau)u_0(\tau)d\tau, \ t \ge t_0, \qquad (3.4)$$

где

$$u_0(t) \equiv \exp\left(\int_{t_0}^{t} \vartheta(s)ds\right)\left[P_0(t) + \int_{t_0}^{t} W_0(s)\exp\left(\int_{s}^{t} V_0(\eta)d\eta\right)ds\right],$$

$$P_0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} c(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s} \vartheta(\eta)d\eta\right)ds, \ W_0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \omega_0(t,\tau)P_0(\tau)d\tau, V_0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \omega_0(t,\tau)d\tau,$$

$$\omega_0(t,\tau) \equiv \omega(t,\tau)\exp\left(-\int_{\tau}^{t} \vartheta(\eta)d\eta\right).$$

Доказательство. Обозначая

$$U(t) \equiv \int_{t_0}^{t} u(s)ds, \ t \ge t_0,$$

в силу (3.3) имеем

$$u(t) \le c(t) + \vartheta(t)U(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(t,\tau)U(\tau)d\tau, \ t \ge t_0. \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5), получаем

$$U(t) \le c_0(t) + \int_{t_0}^{t} \left[\vartheta(s)U(s) + \int_{t_0}^{s} \omega(s,\tau)U(\tau)d\tau \right] ds, \ t \ge t_0, \tag{3.6}$$

где

$$c_0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} c(s)ds.$$

Применяя к неравенству (3.6) лемму 2.1 [15], затем производя интегрирование по частям интеграла с подынтегральным выражением, содержащим $c_0(t)$, и учитывая (3.5), получаем (3.4).

Следствие 3.1. Если в условиях леммы 3.1 $c(t) \equiv 0$ при $t \ge t_0$, то $u(t) \equiv 0$ при $t \ge t_0$.

Следствие 3.2. Если выполняются условия леммы 3.1, то

$$u(t) \le \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} c(s) \exp\left(\int_{s}^{t} V(\eta)d\eta \right) ds, \ t \ge t_0, \tag{3.7}$$

где

$$V(t) \equiv \vartheta(t) + V_0(t).$$

В самом деле, так как функция $P_0(t)$ монотонно неубывающая при $t \ge t_0$, то

$$W_0(t) \le P_0(t)V_0(t), \ t \ge t_0, \tag{3.8}$$

и интегрированием по частям получаем

$$u_0(t) \le \int_{t_0}^{t} c(s) \exp\left(\int_{s}^{t} V(\eta)d\eta \right) ds, \ t \ge t_0. \tag{3.9}$$

Учитывая (3.9), имеем

$$\int_{t_0}^{t}\omega(t,\tau)u_0(\tau)d\tau \le \int_{t_0}^{t}\omega_0(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}c(s)\exp\left(\int_{s}^{\tau}V_0(\eta)d\eta+\int_{s}^{t}\vartheta(\eta)d\eta\right)dsd\tau \le$$
$$\le V_0(t)\int_{t_0}^{t}c(s)\exp\left(\int_{s}^{t}V(\eta)d\eta\right)ds,\quad t\ge t_0. \tag{3.10}$$

В силу (3.9) и (3.10) из (3.4) получаем (3.7).

Лемма 3.2. Пусть для неотрицательных непрерывных функций $u(t), c(t), \vartheta(t), \omega(t,\tau)$ и $\omega_1(t,\eta)$ при $t\ge t_0$, $t_0\le\tau\le t$, $t_0\le\eta\le T$

$$u(t)\le c(t)+\vartheta(t)\int_{t_0}^{t}u(s)ds+\int_{t_0}^{t}\omega(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}u(s)dsd\tau+\int_{t_0}^{T}\omega_1(t,\eta)\int_{t_0}^{\eta}u(s)dsd\eta,\ t\ge t_0, \tag{3.11}$$

причем

$$q=\max_{t_0\le t\le T}\int_{t_0}^{T}\omega_1(t,\eta)\int_{t_0}^{\eta}\exp\left(\int_{s}^{\eta}V(\theta)d\theta\right)dsd\eta<1. \tag{q}$$

Тогда

$$u(t)\le N'(t)+Q'(t)+\frac{Q^0}{1-q}S'(t),\ t\ge t_0, \tag{3.12}$$

где

$$N(t)\equiv\int_{t_0}^{t}c(s)E(t,s)ds,\quad E(t,s)\equiv\exp\left(\int_{s}^{t}V(\theta)d\theta\right),$$

$$Q(t)\equiv\int_{t_0}^{t}Q^0(s)E(t,s)ds,\quad Q^0(t)\equiv\int_{t_0}^{T}\omega_1(t,\eta)N(\eta)d\eta,$$

$$Q^0=\max_{t_0\le t\le T}Q^0(t),\quad S(t)\equiv\int_{t_0}^{t}q(s)E(t,s)ds,$$

$$q(t)\equiv\int_{t_0}^{T}\omega_1(t,\eta)\int_{t_0}^{\eta}E(\eta,s)dsd\eta.$$

Доказательство. Запишем соотношение (3.11) в виде

$$u(t)\le c_*(t)+\vartheta(t)\int_{t_0}^{t}u(s)ds+\int_{t_0}^{t}\omega(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}u(s)dsd\tau,\ t\ge t_0, \tag{3.13}$$

где

$$c_*(t) \equiv c(t) + c^{(1)}(t),\ c^{(1)}(t) \equiv \int_{t_0}^{T} \omega_1(t,\eta) \int_{t_0}^{\eta} u(s)dsd\eta.$$

Применяя к неравенству (3.13) следствие 3.2, имеем

$$u(t) \le N'(t) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} c^{(1)}(s)E(t,s)ds,\ t \ge t_0. \tag{3.14}$$

Используя (3.14), получаем

$$c^{(1)}(t) \le Q^0(t) + c^{(1)}q(t),\ t \ge t_0, \tag{3.15}$$

где

$$c^{(1)} = \max_{t_0 \le t \le T} c^{(1)}(t).$$

Из (3.15) имеем

$$c^{(1)}(t) \le Q^0 + c^{(1)}q,\quad t_0 \le t \le T. \tag{3.16}$$

Из (3.16) вытекает

$$c^{(1)} \le Q^0 + c^{(1)}q,$$

Откуда

$$c^{(1)} \le \frac{Q^0}{1-q}. \tag{3.17}$$

В силу (3.17) из (3.15) имеем

$$c^{(1)}(t) \le Q^0(t) + \frac{Q^0}{1-q}q(t),\ t \ge t_0. \tag{3.18}$$

В силу (3.18) из (3.14) получаем (3.12).

Следствие 3.3. Если в условиях леммы 3.2 $c(t) \equiv 0,\ t \ge t_0$, то $u(t) \equiv 0,\ t \ge t_0$.

Введем обозначения:

$h_1(t,\tau) \equiv g_2(t)g_4(t,\tau), \quad h_2(t,\eta) \equiv g_3(t)g_5(t,\eta),$

$V_1(t) \equiv g_1(t) + \int_{t_0}^{t} h_1(t,\tau)\exp\left(-\int_{\tau}^{t} g_1(s)ds\right)d\tau,$

$f(t) \equiv F(t,0,\int_{t_0}^{t} K(t,\tau,0)d\tau, \int_{t_0}^{T} H(t,\eta,0)d\eta).$

Теорема 3.1. Если

$$q_1 = \max_{t \in J_0} \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta) \int_{t_0}^{\eta} \exp\left(\int_{s}^{\eta} V_1(\theta) d\theta \right) ds d\eta < 1, \qquad (q_1)$$

то задача (3.1) , (3.1′) имеет единственное решение $x(t)$ в классе $C^1[t_0,\infty)$, удовлетворяющее неравенству

$$\left\| x(t) - x^0 \right\| \le N_1(t) + Q_1(t) + \frac{Q_1^0}{1-q_1} S_1(t), \ t \in J, \qquad (3.19)$$

где

$$N_1(t) \equiv \exp\left(\int_{t_0}^{t} g_1(s) ds \right) \left[P_1(t) + \int_{t_0}^{t} W_1(s) \exp\left(\int_{s}^{t} V_1^0(\theta) d\theta \right) ds \right],$$

$$P_1(t) \equiv G(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g_1(s) ds \right) + \int_{t_0}^{t} g_1(s) G(s) \exp\left(-\int_{t_0}^{s} g_1(\theta) d\theta \right) ds,$$

$$G(t) \equiv \left\| \int_{t_0}^{t} F_0(s) ds \right\|,$$

$$F_0(t) \equiv F(t, x^0, \int_{t_0}^{t} K(t,\tau,x^0) d\tau, \int_{t_0}^{t} H(t,\eta,x^0) d\eta),$$

$$W_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t} h_1(t,\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^{t} g_1(\theta) d\theta \right) P_1(\tau) d\tau,$$

$$V_1^0(t) \equiv V_1(t) - g_1(t), \quad Q_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t} Q_1^0(s) E_1(t,s) ds,$$

$$Q_1^0(t) \equiv \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta) N_1(\eta) d\eta, \quad E_1(t,s) \equiv \exp\left(\int_{s}^{t} V_1(\theta) d\theta \right),$$

$$Q_1^0 = \max_{t \in J_0} Q_1^0(t), \qquad S_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t} q_1(s) E_1(t,s) ds,$$

$$q_1(t) \equiv \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta) \int_{t_0}^{\eta} E_1(\eta,s) ds d\eta.$$

Доказательство. Применяя к задаче (3.1) , (3.1′) подстановку (3.2), получаем, что для установления в классе $C^1[t_0,\infty)$ существования единственного решения задачи (3.1) , (3.1′) достаточно установить в классе $C[t_0,\infty)$ $n\times 1$ векторных функций, определенных и непрерывных на полуинтервале J, существование единственного решения системы интегральных уравнений

$$y(t)=L(t;y,y),\ t\ge t_0, \tag{3.20}$$

где

$$L(t;y,z)\equiv F(t,x^0+\int_{t_0}^{t}y(s)ds,\int_{t_0}^{t}K(t,\tau,x^0+\int_{t_0}^{\tau}y(s)ds)d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{T}H\left(t,\eta,x^0+\int_{t_0}^{\eta}z(s)ds)d\eta\right).$$

Для системы интегральных уравнений (3.20) построим последовательные приближения, аналогично, как в § 1 настоящей главы:

$$y_0(t)=0,\ y_m(t)=L(t;y_m,y_{m-1})\quad (m=1,2,...),\ t\in J. \tag{3.21}$$

Для каждого натурального числа m система (3.21) есть система интегральных уравнений типа Вольтерра и она имеет единственное решение $y_m(t)$ в классе $C[t_0,\infty)$.

Покажем, что последовательность $\{y_m(t)\}$ сходится на полуинтервале J и сходится равномерно на любом конечном отрезке $J_*=[t_0,t_*],\ t_*>t_0$. Для этого составим ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}z_m(t), \tag{3.22}$$

где

$$z_m(t)\equiv y_m(t)-y_{m-1}(t)\quad (m=1,2,...),$$

и оценим его члены, начиная со второго. Из (3.21) имеем

$$u_1(t)\le G(t)+\int_{t_0}^{t}\left[g_1(s)u_1(s)+\int_{t_0}^{s}h_1(s,\tau)u_1(\tau)d\tau\right]ds,\ t\in J, \tag{3.23}$$

$$u_m(t)\le c_m(t)+g_1(t)\int_{t_0}^{t}u_m(s)ds+\int_{t_0}^{t}h_1(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}u_m(s)dsd\tau\ \ (m=2,...),\ t\in J, \tag{3.24}$$

где

$$u_1(t) \equiv \left\| \int_{t_0}^{t} y_1(s)ds \right\|, \; u_m(t) \equiv \|z_m(t)\| \; (m = 2,...),$$

$$c_2(t) \equiv \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta)\, u_1(\eta)d\eta,$$

$$c_m(t) \equiv \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta) \int_{t_0}^{\eta} u_{m-1}(s)dsd\eta \quad (m = 3,...).$$

Применяя к неравенствам (3.23) и (3.24) соответственного лемму 2.1 [15] и следствие 3.2, получаем

$$u_1(t) \le N_1(t), \quad t \in J, \tag{3.25}$$

$$u_m(t) \le \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} c_m(s)E_1(t,s)ds \;\; (m = 2,...), \; t \in J. \tag{3.26}$$

В силу (3.25) из (3.26) находим

$$u_2(t) \le Q'_1(t), \quad t \in J. \tag{3.27}$$

Методом полной математической индукции получаем

$$u_m(t) \le Q_1^0 \; S'_1(t)q_1^{m-3} \quad (m = 3,...), \; t \in J. \tag{3.28}$$

Следовательно, в силу условия (q_1) ряд (3.22) сходится абсолютно на полуинтервале J и равномерно на отрезке J_*, и, значит, последовательность $\{y_m(t)\}$ сходится на J и сходится равномерно на J_*.

Сумма, скажем, $y(t)$ ряда (3.22) непрерывна на J. Переходя в (3.21) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $y(t)$ является решением системы интегральных уравнений (3.20).

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ - любые два решения системы интегральных уравнений (3.20) в классе $C[t_0,\infty)$. Тогда получаем

$$u(t) \le g_1(t)\int_{t_0}^{t} u(s)ds + \int_{t_0}^{t} h_1(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau} u(s)dsd\tau + \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta)\int_{t_0}^{\eta} u(s)dsd\eta, \quad t \in J, \tag{3.29}$$

где $u(t) \equiv \|y_1(t) - y_2(t)\|$.

Из (3.29) на основании следствия 3.3 вытекает, что $y_1(t) \equiv y_2(t)$ на J.

Обозначая сумму ряда (3.22) без его первого члена $y_1(t)$ через $y^0(t)$, имеем

$$y(t) = y_1(t) + y^0(t), \ t \in J. \tag{3.30}$$

В силу (3.27), (3.28) и условия (q_1) получаем

$$\left\| y^0(t) \right\| \le Q'_1(t) + \frac{Q_1^0}{1-q_1} S'_1(t), \ t \in J. \tag{3.31}$$

Из (3.2) для решения $x(t)$ задачи (3.1) , (3.1′) , используя (3.30), (3.25) и (3.31), получаем оценку (3.19).

В случае, когда функция $h_2(t,\eta)$ не зависит от t, из теоремы 3.1 вытекает соответствующий результат из [15] об однозначной разрешимости задачи (3.1), (3.1′) в классе $C^1[t_0,\infty)$.

Замечание 3.1. При нарушении условия (q_1) задача (3.1) , (3.1′) может не иметь решений или иметь бесконечное множество решений.

В самом деле, для системы

$$x'_i(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[x_k(t) - \int_0^t e^{\tau - t} x_k(\tau)d\tau + \int_0^1 \frac{3}{2} x_k(\eta)d\eta \right] \ (i = 1,...,n), \ t \ge 0 \tag{3.32}$$

нарушается условие (q_1) здесь $q_1 > 1$, и все ее решения $x(t) = (x_1(t)),...,x_n(t))$:

$x_i(t) = (t^2 + 2t)c_1 + (-1)^i c_{i+1} \quad (i = 1,...,n),$

где $c_1,...,c_n$ - произвольные постоянные, $c_2 + ... + c_n + c_{n+1} = 0$, не удовлетворяют начальному условию $x_i(0) = x_i^0 \quad (i = 1,...,n)$ при $x_1^0 + ... + x_n^0 \ne 0$; если $x_1^0 + ... + x_n^0 = 0$, то соответствующая задача имеет однопараметрическое семейство решений

$x_i(t) = x_i^0 + c_1(t^2 + 2t) \quad (i = 1,...,n).$

Замечание 3.2. Условие (q_1) является точным для интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма (в (3.1) $F(t,x,v_1,v_2) \equiv F(t,x,v_2)$).

В самом деле, для системы

$$x'_i(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[ax_k(t)+\int_0^1 a^2(e^a-1-a)^{-1}x_k(\eta)d\eta\right]\ (i=1,...,n),\ t\geq 0 \qquad (3.33)$$

$(a$ - $const>0)$, $q_1=1$ и все ее решения

$$x_i(t)=c_1(e^{at}-1)+(-1)^i c_{i+1} \quad (i=1,\ldots,n),$$

где $c_1,...,c_n$ - произвольные постоянные, $c_2+\ldots+c_n+c_{n+1}=0$, не удовлетворяют начальному условию $x_i(0)=x_i^0 \quad (i=1,...,n)$ при $x_1^0+\ldots+x_n^0\neq 0$; если $x_1^0+\ldots+x_n^0=0$, то соответствующая задача имеет однопараметрическое семейство решений

$$x_i(t)=x_i^0+c_1(e^{at}-1) \quad (i=1,...,n).$$

Замечание 3.3. В условии (q_1) необходимо учитывать члены вне фредгольмова интеграла, т.е. условие

$$\overline{q}_1=\max_{t\in J_0}\int_{t_0}^{T}h_2(t,\eta)\int_{t_0}^{\eta}dsd\eta<1 \qquad (\overline{q}_1)$$

не является достаточным условием однозначной разрешимости задачи (3.1), (3.1′) в классе $C^1[t_0,\infty)$.

Это подтверждается, например, системами (32) и (33), для которых соответственно $\overline{q}_1=\frac{3}{4}<1$ и $\overline{q}_1=\frac{a^2}{2}(e^a-1-a)^{-1}<1$, и, значит, для их выполняется условие $(\overline{q}_1)$, однако для них нарушается утверждение теоремы 1.

Следствие 3.4. Если

$$q_2=\int_{t_0}^{T}V_1(t)dt+\max_{t\in J_0}\int_{t_0}^{T}(\eta-t_0)h_2(t,\eta)d\eta<1, \qquad (q_2)$$

то задача (3.1) , (3.1′) имеет единственное решение в классе $C^1[t_0,\infty)$.

В самом деле, в силу условия (q_2) имеем, $q_1\leq q_2$. Следовательно, выполняется условие (q_1). Поэтому на основании теоремы 3.1 справедливо данное предложение.

Из следствия 3.4 при постоянных коэффициентах Липшица вытекает соответствующий результат из [22].

Теорема 5 [22] не имеет места для уравнений (3.1) с областью D неограниченного изменения $x, v_1, v_2,$ что подтверждается, например, уравнениями (3.32), (3.33) при $n=1,\ 0 \le t \le 1,$ для которых соответственно

$$\frac{\lambda_2 h^2}{2} = \frac{3}{4} < 1, \quad \frac{\lambda_2 h^2}{2} = \frac{a^2}{2}(e^a - 1 - a)^{-1} < 1,$$

однако не единственное решение $x(t) \equiv 0,$ а все их решения соответственно

$$x(t) = c(t^2 + 2t), \quad x(t) = c(e^{at} - 1),$$

где c - произвольная постоянная, удовлетворяют начальному условию $x(0) = 0.$

Следствие 3.5. Если выполняются условия $(q_1),$

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[g_1(t) + \int_{t_0}^{t} h_1(t,\tau)d\tau + \int_{t_0}^{T} h_2(t,\eta)d\eta \right] dt < \infty, \tag{A}$$

$$\sup_{t\in J}\left\| \int_{t_0}^{t} f(s)ds \right\| < \infty, \tag{B}$$

то решение $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ задачи (3.1), (3.1′) ограничено на полуинтервале J. Если, кроме того,

$$\left| \int_{t_0}^{t} f_i(t)dt \right| < \infty \quad (1 \le i \le n), \tag{C}$$

где $f_i(t)$ - компонента вектора $f(t),$ то компонента $x_i(t)\ (1 \le i \le n)$ стремится к конечному пределу при $t \to \infty.$

В самом деле, в силу условий (A) и (B) из оценки (3.19) вытекает, что $x(t)$ ограничено на J. Обозначая правую часть системы (1) через $F(t;x)$ из тождества

$$x(t) \equiv x^0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds + \int_{t_0}^{t} [F(s; x - f(s)]ds, \quad t \in J, \tag{3.34}$$

учитывая ограниченность $x(t)$ на J и условия $(A),(C)$, получаем, что компонента $x_i(t)\,(1\le i\le n)$ решения $x(t)$ задачи (3.1), (3.1′) стремится к конечному пределу при $t\to\infty$.

Теорема 3.2. Если выполняется условие (q_1), то для любых двух различных решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (3.1) с начальными данными $x_1(t_0)=x_1^0$ и $x_2(t_0)=x_2^0$ справедлива оценка

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\le\|x_1^0-x_2^0\|\left[1+N_*(t)+Q_*(t)+\frac{Q_*^0}{1-q_1}S_1(t)\right],\ t\in J, \tag{3.35}$$

где

$$N_*(t)\equiv\int_{t_0}^{t}G_*(s)E_1(t,s)ds,$$

$$G_*(t)\equiv g_1(t)+\int_{t_0}^{t}h_1(t,\tau)d\tau+\int_{t_0}^{T}h_2(t,\eta)d\eta,$$

$$Q_*(t)\equiv\int_{t_0}^{t}Q_*^0(s)E_1(t,s)ds,\quad Q_*(t)\equiv\int_{t_0}^{T}\eta_2(t,\eta)N_*(\eta)d\eta,$$

$$Q_*^0=\max_{t\in J_0}Q_*^0(t).$$

Доказательство. Обозначая

$$y(t)\equiv x'_1(t)-x'_2(t),\ t\in J, \tag{3.36}$$

имеем

$$x_1(t)-x_2(t)\equiv x_1^0-x_2^0+\int_{t_0}^{t}y(s)ds,\quad t\in J, \tag{3.37}$$

$$y(t)\equiv F(t;x_1)-F(t,x_2),\ t\in J. \tag{3.38}$$

Из (3.38), учитывая (3.37), получаем

$$\begin{aligned}\|y(t)\|\le d(t)+g_1(t)\int_{t_0}^{t}\|y(s)\|ds+\int_{t_0}^{t}h_1(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}\|y(s)\|dsd\tau+\\+\int_{t_0}^{T}h_2(t,\eta)\int_{t_0}^{\eta}\|y(s)\|dsd\eta,\quad t\in J,\end{aligned} \tag{3.39}$$

где

$$d(t)\equiv\|x_1^0-x_2^0\|G_*(t).$$

Применяя к интегральному неравенству (3.39) лемму 3.2, находим

$$\|y(t)\| \le \|x_1^0 - x_2^0\| \left[N'_*(t) + Q'_*(t) + \frac{Q_*^0}{1-q_1} S'_1(t) \right], \ t \in J. \qquad (3.40)$$

В силу (3.40) из (3.37) получаем оценку (3.35).

Следствие 3.6. Если выполняются условия (q_1) и (A), то любое решение системы (3.1) устойчиво относительно начальных данных $(3.1')$.

Это следует из оценки (3.35).

§ 4. Начальная задача для интегро - дифференциальных систем вольтеррова типа с запаздывающим аргументом и асимптотические свойства ее решений

Устанавливаются достаточные коэффициентные условия корректности на полуоси основной начальной задачи для системы слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вольтеррова типа с запаздывающим аргументом, ограниченности и стремления к конечным пределам ее решений, а также условия на начальные данные, для соответствующих которым решений изучаемой системы конечные пределы отличны от нуля. Выводятся достаточные коэффициентные условия стремления к ненулевым конечным пределам решений изучаемой системы с определенными начальными данными. Выясняется, когда решения изучаемой задачи обладают асимптотами из заданного однопараметрического семейства векторных кривых.

Изучается система интегро-дифференциальных уравнений

$$x'(t) = F(t, \overline{x}(\alpha(t)), \int_{a(t)}^{b(t)} K(t,\tau,\overline{x}(\beta(\tau)))d\tau), \quad t \in J = [t_0, \infty), \qquad (4.1)$$

при начальном условии

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in E_{t_0}, \qquad (4.1^0)$$

где $x(t)$ - искомая $n\times 1$ векторная функция; $\overline{x}(\alpha(t))$ - $(m+1)\times 1$ вектор с $n\times 1$ векторными компонентами $x(\alpha_i(t))$ $(i=0,1,...,m)$;

$$\int_{a(t)}^{b(t)} K(t,\tau,\overline{x}(\beta(\tau)))d\tau$$

- $l\times 1$ вектор с $n_k\times 1$ $(k=1,...,l)$ векторными компонентами

$$\int_{a_k(t)}^{b_k(t)} K_k(t,\tau_k,\overline{x}(\beta_k(\tau_k)))d\tau_k \quad (k=1,...,l),$$

$\overline{x}(\beta_k(\tau_k))$ $(k=1,...,l)$ - $(m_k+1)\times 1$ векторы с $n\times 1$ векторными компонентами $x(\beta_{kj}(\tau_k))$ $(k=1,...,l;\ j=0,1,...,m_k)$; $\alpha_0(t)\equiv t$, $\beta_{k0}(\tau_k)\equiv\tau_k$ $(k=1,...,l)$; $\alpha_i(t)$, $a_k(t)$, $b_k(t)$ и $\beta_{kj}(\tau_k)$ $(i=1,...,m;\ k=1,...,l;\ j=1,...,m_k)$ - скалярные функции, непрерывные при $t\ge t_0$, $a_k(t)\le\tau_k\le b_k(t)$ $(k=1,...,l)$, причем при этих значениях аргументов $\alpha_i(t)\le t,\ t_0\le a_k(t)\le b_k(t)\le t,\ \beta_{kj}(\tau_k)\le\tau_k$; $F(t,\overline{x},\overline{v})$ и $K_k(t,\tau_k,\overline{y})$ $(k=1,...,l)$ - $n\times 1$ и $n_k\times 1$ $(k=1,...,l)$, соответственно, векторные функции, непрерывные при $t\ge t_0$, $a_k(t)\le\tau_k\le b_k(t)$ и любых $(m+1)\times 1$ векторе $\overline{x}$, $l\times 1$ векторе $\overline{\upsilon}$, $(m_k+1)\times 1$ векторе $\overline{y}$ с компонентами соответственно $n\times 1$ векторами x_i, $n_k\times 1$ векторами υ_k, $n\times 1$ векторами y_{kj} $(k=1,...,l;\ i=0,1,...,m;\ j=0,1,...,m_k)$ и удовлетворяющие при этих значениях переменных условию Липшица

$$\left\|F(t,\overline{x}^{(1)},\overline{v}^{(1)})-F(t,\overline{x}^{(2)},\overline{v}^{(2)})\right\|\le\sum_{i=0}^{m}g_i(t)\left\|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right\|+\sum_{k=1}^{l}g_{k0}(t)\left\|v_k^{(1)}-v_k^{(2)}\right\|,$$

$$\left\|K_k(t,\tau_k,\overline{y}^{(1)})-K_k(t,\tau_k,\overline{y}^{(2)})\right\|\le\sum_{j=0}^{m_k}h_{kj}(t,\tau_k)\left\|y_{kj}^{(1)}-y_{kj}^{(2)}\right\| \quad (k=1,...,l)$$

с неотрицательными непрерывными функциями $g_i(t)$, $g_{k0}(t)$ и $h_{kj}(t,\tau_k)$ $(i=0,1,...,m;\ k=1,...,l;\ j=0,1,...,m_k)$ при $t\ge t_0$, $a_k(t)\le\tau_k\le b_k(t)$ $(k=1,...,l)$; $\varphi(t)$ - заданная $n\times 1$ векторная функция, непрерывная на начальном множестве E_{t_0}, состоящем из точки t_0 и значений $\alpha_i(t)\le t$, $\beta_{kj}(\tau_k)\le\tau_k$ $(i=1,...,m;\ k=1,...,l;$ $j=1,...,m_k)$ при $t\ge t_0$, $a_k(t)\le\tau_k\le b_k(t)$ $(k=1,...,l)$.

Под $\|x\|$ для вектора x понимается максимум или сумма абсолютных величин его компонент, или его евклидова длина.

Лемма 4.1. Пусть для функции $u(t)$, неотрицательной и непрерывной при $t\in J\cup E_{t_0}$, выполняются соотношения

$$u(t)\le c_1(t)+\int_{t_0}^{t}[\sum_{i=0}^{m}v_i(s)u(\alpha_i(s))+\sum_{k=1}^{l}\int_{a_k(s)}^{b_k(s)}\sum_{j=0}^{m_k}w_{kj}(s,\tau_k)u(\beta_{kj}(\tau_k))d\tau_k]ds,\ t\in J, \qquad (4.2)$$

$$u(t)=c_2(t),\ t\in E_{t_0}, \qquad (4.2^0)$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ - неотрицательные непрерывные функции при $t\in J$ и $t\in E_{t_0}$ соответственно, $c_2(t_0)=c_1(t_0)$; $v_i(t)$ и $w_{kj}(t,\tau_k)$ $(i=0,1,...,m;$ $k=1,...,l;$ $j=0,1,...,m_k)$- неотрицательные непрерывные функции при $t\ge t_0$, $a_k(t)\le\tau_k\le b_k(t)$ $(k=1,...,l)$. Тогда

$$u(t)\le c_1(t)+\int_{t_0}^{t}W(s)\exp(\int_{s}^{t}V(s_0)ds_0)ds,\ t\in J, \qquad (4.3)$$

где

$$W(t)\equiv\sum_{i=0}^{m}v_i(t)c(\alpha_i(t))+\sum_{k=1}^{l}\int_{a_k(t)}^{b_k(t)}\sum_{j=0}^{m_k}w_{kj}(t,\tau_k)c(\beta_{kj}(\tau_k))d\tau_k,$$

$c(t)\equiv c_1(t)$ при $t\in J$ и $c(t)\equiv c_2(t)$ при $t\in E_{t_0}$;

$$V(t)\equiv\sum_{i=0}^{m}v_i(t)+\sum_{k=1}^{l}\int_{a_k(t)}^{b_k(t)}\sum_{j=0}^{m_k}w_{kj}(t,\tau_k)d\tau_k.$$

Доказательство. Обозначая правую часть неравенства (4.2) без $c_1(t)$ через $U(t)$, имеем

$$u(t)\le c_1(t)+U(t),\ t\in J. \qquad (4.4)$$

Используя (4.4) и монотонную неубываемость функции $U(t)$ при $t \in J$, получаем

$$U(t) \le \int_{t_0}^{t} W(s)ds + \int_{s}^{t} V(s)U(s)ds,\ t \in J. \tag{4.5}$$

Применяя к неравенству (4.5) лемму Гронуолла-Беллмана, затем производя интегрирование по частям и учитывая (4.4), получаем (4.3).

Следствие 4.1. Если в условиях леммы 4.1 $c_1(t) \equiv 0$ на J и $c_2(t) \equiv 0$ на E_{t_0}, то $u(t) \equiv 0$ на J.

В самом деле, заметим, что если усилить равенство (4.2^0) функцией, например, $2c_2(t)$, то в неравенстве (4.3) вместо $c_2(t)$ будет $2c_2(t)$. Для любой последовательности $\{\varepsilon_p\}$ неотрицательных чисел, стремящейся к нулю при $p \to \infty$, согласно условию, имеем

$$u(t) \le \varepsilon_p + U(t) \ \ (p = 1,2,...),\ t \in J,$$

$$u(t) \le \varepsilon_p \ \ (p = 1,2,...),\ t \in E_{t_0},$$

где $U(t)$ - правая часть неравенства (4.3) без $c_1(t)$. Из последних неравенств в силу леммы с учетом сделанного замечания получаем

$$u(t) \le \varepsilon_p \exp\left(\int_{t_0}^{t} V(s_0)ds_0\right) \ \ (p = 1,2,...),\ t \in J.$$

Отсюда при $p \to \infty$ имеем, что $u(t) \equiv 0$ на J.

Введем обозначения:

$$f(t) \equiv F(t, 0, \int_{a(t)}^{b(t)} K(t,\tau,0)d\tau),$$

$$V_1(t, c_1^0, c_2^0) \equiv g_0(t)c_1^0(t) + \sum_{i=0}^{m} g_i(t) \begin{cases} c_1^0(\alpha_i(t)), & \alpha_i(t) \ge t_0 \\ c_2^0(\alpha_i(t)), & \alpha_i(t) \le t_0 \end{cases} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} g_{k0}(t) \int_{a_k(t)}^{b_k(t)} [h_{k0}(t,\tau_k)c_1^0(\tau_k) + \sum_{j=1}^{m_k} h_{kj}(t,\tau_k) \begin{cases} c_1^0(\beta_{kj}(\tau_k)), & \beta_{kj}(\tau_k) \ge t_0 \\ c_2^0(\beta_{kj}(\tau_k)), & \beta_{kj}(\tau_k) \le t_0 \end{cases}]d\tau_k$$

для любых неотрицательных непрерывных функций $c_1^0(t)$ и $c_2^0(t)$ на J и на E_{t_0}, соответственно, $c_1^0(t_0) = c_2^0(t_0)$.

Теорема 4.1. Задача (4.1), (4.1^0) имеет единственное решение $x(t)$ в классе $C^1[t_0,\infty)$ $n\times 1$ векторных функций, определенных и непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J. Это решение $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \le M(t),\ t\in J \tag{4.6}$$

где

$$M(t)\equiv N(t)+\int_{t_0}^{t} V_1(s,N,N_0)\exp\left(\int_{s}^{t} V_1(s_0,1,1)ds_0\right)ds,$$

$$N(t)\equiv\left\|\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right\|,\quad N_0(t)\equiv\|\varphi(t)\|.$$

Для любых решений $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ в классе $C^1[t_0,\infty)$ системы (4.1) с начальными векторными функциями $\varphi^{(1)}(t)$ и $\varphi^{(2)}(t)$ соответственно, заданными и непрерывными на начальном множестве E_{t_0}, справедлива оценка

$$\left\|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)\right\| \le N^{(1)}+\int_{t_0}^{t} V_1(s,N^{(1)},N_0^{(1)})\exp\left(\int_{s}^{t} V(s_0,1,1)ds_0\right)ds,\ t\in J, \tag{4.7}$$

где $N^{(1)}=\left\|\varphi^{(1)}(t_0)-\varphi^{(2)}(t_0)\right\|$, $N_0^{(1)}(t)\equiv\left\|\varphi^{(1)}(t)-\varphi^{(2)}(t)\right\|$.

Доказательство. В классе $C^1[t_0,\infty)$ задача (4.1), (4.1^0) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} L(s,x)ds,\ t\in J, \tag{4.8}$$

с условием (4.1^0), где $L(t,x)$ - правая часть системы (4.1). Для задачи (4.8), (4.1^0) построим последовательные приближения:

$$x_0(t)=0,\quad t\in J\cup E_{t_0},$$

$$x_p(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} L(s,x_{p-1})ds\quad (p=1,2,...),\ t\in J, \tag{4.9}$$

$$x_p(t)=\varphi(t)\ (p=1,2,...),\ t\in E_{t_0}. \tag{4.9^0}$$

Методом полной математической индукции убеждаемся в том, что векторные функции $x_p(t)$ $(p=1,2,...)$ определены и непрерывны на полуинтервале J. Составим ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} z_p(t), \quad t \in J \cup E_{t_0}, \tag{4.10}$$

где $z_p(t) \equiv x_p(t) - x_{p-1}(t)$ $(p=1,2,...)$. В силу (4.9^0) имеем

$$z_1(t) = \varphi(t),\ z_p(t) = 0 \ \ (p=2,...),\ t \in E_{t_0}, \tag{4.10^0}$$

и, значит, ряд (4.10) на E_{t_0} совпадает с $\varphi(t)$. Из (4.9) с учетом (4.10^0) получаем

$$z_1(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,\ t \in J, \tag{4.11}$$

$$\|z_2(t)\| \le \int_{t_0}^{t} V_1(s, N, N_0)ds,\ t \in J. \tag{4.12}$$

Предположим, что для некоторого натурального числа $p \ge 2$ имеет место неравенство

$$\|z_p(t)\| \le \frac{1}{(p-2)!}\int_{t_0}^{t} [Q(t) - Q(s)]^{p-2} V_1(s, N, N_0)ds,\ t \in J, \tag{4.13}$$

где

$$Q(t) \equiv \int_{t_0}^{t} V_1(s,1,1)ds.$$

Тогда из (4.9), учитывая (4.10^0) и монотонную неубываемость при $t \in J$ правой части неравенства (4.13), получаем

$$\|z_{p+1}(t)\| \le \frac{1}{(p-2)!}\int_{t_0}^{t} Q'(s)\int_{t_0}^{s} [Q(s) - Q(s_0)]^{p-2} V_1(s_0, N, N_0)ds_0 ds =$$

$$= \frac{1}{(p-2)!}\int_{t_0}^{t} V_1(s_0, N, N_0)\int_{s_0}^{t} [Q(s) - Q(s_0)]^{p-2} Q'(s)ds ds_0 = \quad .$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\int_{t_0}^{t} [Q(t) - Q(s_0)]^{p-1} V_1(s_0, N, N_0)ds_0,\ t \in J.$$

Следовательно, учитывая (4.12), по индукции заключаем, что для любого натурального числа $p \geq 2$ справедлива оценка (4.13). Из (4.11) и (4.13) вытекает, что ряд (4.10) сходится абсолютно на полуинтервале J и равномерно на всяком конечном отрезке $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$. Сумма, скажем, $x(t)$ ряда (4.10) определена и непрерывна на $J \cup E_{t_0}$, $x(t) = \varphi(t)$ на E_{t_0}. Переходя в (4.9) к пределу при $p \to \infty$, получаем, что $x(t)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (4.8): $x(t) \in C^1[t_0, \infty)$. В силу (4.11) и (4.13) получаем оценку (4.6). Пусть $x(t)$ и $y(t)$ - любые два решения задачи (4.1) и (4.1^0) в классе $C^1[t_0, \infty)$. Тогда, обозначая $u(t) \equiv \|x(t) - y(t)\|$, $t \in J \cup E_{t_0}$, получаем

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} V_1(s,u,u)ds\,,\ t \in J\,, \tag{4.14}$$

$$u(t) = 0\,,\ t \in E_{t_0}\,. \tag{4.14^0}$$

Из (4.14), (4.14^0) на основании следствия 4.1 вытекает, что $u(t) = 0$ и, значит, $y(t) = x(t)$ на J. Далее, обозначая $u_0(t) \equiv \left\|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)\right\|$, $t \in J \cup E_{t_0}$, получаем

$$u_0(t) \leq N^{(1)} + \int_{t_0}^{t} V_1(s,u_0,u_0)ds,\ t \in J\,, \tag{4.15}$$

$$u_0(t) = N_0^{(1)}(t),\ t \in E_{t_0}\,. \tag{4.15^0}$$

Применяя к соотношениям (4.15), (4.15^0) лемму 4.1, получаем оценку (4.7).

Теорема 4.2. Если

$$\int_{t_0}^{\infty} V_1(t,1,1)dt < \infty\,, \tag{A}$$

$$\sup_J \left\| \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \right\| < \infty\,, \tag{B}$$

то каждое решение $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ ограничена на полуинтервале J.

Доказательство. В силу условия (B) и ограниченности $\varphi(t)$ на E_{t_0} получаем

$$N(t) \le N_*,\ t \in J, \tag{4.16}$$

$$V_1(t, N, N_0) \le N_* V_1(t,1,1),\ t \in J, \tag{4.17}$$

где

$$N_* = \max\{\sup_J N(t);\ \sup_{E_{t_0}} N_0(t)\} < \infty .$$

Вследствие (4.16) и (4.17) имеем

$$M(t) \le N_* \exp(\int_{t_0}^{t} V_1(s,1,1)ds),\ t \in J . \tag{4.18}$$

В силу условия (A) из (4.18) следует, что функция $M(t)$ ограничена на J. Поэтому из оценки (4.6) вытекает, что $x(t)$ ограничено на J.

Теорема 4.3. Если выполняется условие (A), то любое решение системы (4.1) в классе $C^1[t_0, \infty)$ устойчиво относительно начальных данных (4.1^0).

Это предложение вытекает из оценки (4.7).

Теорема 4.4. Если выполняются условия (A) и

$$\left\| \int_{t_0}^{\infty} f(t)dt \right\| < \infty, \tag{C}$$

то все решения $x(t)$ системы (4.1) с любыми непрерывными и ограниченными E_{t_0} начальными векторными функциями $\varphi(t)$ стремятся к конечным предельным векторам при $t \to \infty$. При этом предельные векторы отличны от нулевых для решений $x(t)$ с начальными данными $\varphi(t)$, удовлетворяющими условию

$$\left\| \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} f(t)dt \right\| - \int_{t_0}^{\infty} V_1(t,M,N_0)dt > 0 . \tag{D}$$

Доказательство. Из условия (C) вытекает условие (B). Поэтому на основании теоремы 4.2 векторная функция $x(t)$ ограничена на полуинтервале J. Функция $M(t)$ также ограничена на J. В силу условия (A) и ограниченности $x(t)$ на J и $\varphi(t)$ на E_{t_0} получаем, что интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty}[L(t;x)-f(t)]dt \tag{4.19}$$

сходится абсолютно. Учитывая условие (C) и сходимость интеграла (4.19), из тождества

$$x(t)\equiv\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s)ds+\int_{t_0}^{t}[L(s,x)-f(s)]ds,\ \ t\in J$$

получаем, что существует конечный векторный предел

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{\infty}f(s)ds+\int_{t_0}^{\infty}[L(s,x)-f(s)]ds\,. \tag{4.20}$$

В силу условия (A) и ограниченности $M(t)$ на J и $N_0(t)$ на E_{t_0} имеем, что

$$\int_{t_0}^{\infty}V_1(t,M,N_0)dt<\infty. \tag{4.21}$$

Учитывая оценку (4.6), получаем

$$\left\|L(t,x)-f(t)\right\|\le V_1(t,M,N_0),\ t\in J\,. \tag{4.22}$$

Используя абсолютную сходимость интеграла (4.19) и соотношение (4.22), из (4.20) оценками снизу находим

$$\left\|\lim_{t\to\infty}x(t)\right\|\ge\left\|\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{\infty}f(s)ds\right\|-\int_{t_0}^{\infty}V_1(s,M,N_0)ds\,. \tag{4.23}$$

В силу условия (D) из (4.23) вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty}x(t)\ne 0\,.$$

Из теоремы 4.1 без оценки (4.7), теоремы 4.2 и теоремы 4.4 без условия (D) при $l=1$, $a_1(t)\equiv t_0$, $b_1(t)\equiv t$ вытекают результаты [23].

Теорема 4.5. Если выполняются условия (A), (B) и

$$\Big|\int_{t_0}^{\infty} f_i(t)\,dt\Big| < \infty \quad (1 \le i \le n), \qquad (C_i)$$

где $f_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ - компонента вектора $f(t)$, то компоненты $x_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ всех решений $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ системы (4.1) с любыми непрерывными и ограниченными на E_{t_0} начальными векторными функциями $\varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$ стремятся к конечным пределам при $t \to \infty$. Эти пределы отличны от нуля для решений $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ с начальными данными $\varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$, удовлетворяющими условию

$$\Big|\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} f_i(t)\,dt\Big| - \int_{t_0}^{\infty} V_1(t, M, N_0)\,dt > 0 \quad (1 \le i \le n). \qquad (D_i)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4.

Следствие 4.2. Если выполняются условия (A), (C) и

$$q = \int_{t_0}^{\infty} V_1(t, E, 1)\,dt < 1, \qquad (q)$$

где

$$E(t) \equiv \exp\Big(\int_{t_0}^{t} V_1(s,1,1)\,ds\Big),$$

то решения $x(t)$ системы (4.1) с непрерывными на E_{t_0} начальными векторными функциями $\varphi(t)$, для которых $\varphi(t_0) \ne 0$,

$$\|\varphi(t)\| \le \|\varphi(t_0)\| + f_*, \quad t \in E_{t_0}, \qquad (E_1)$$

$$\|\varphi(t_0)\| > (1-q)^{-1}(f_0 + qf_*), \qquad (E_2)$$

где

$$f_* = \sup_J \Big\|\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds\Big\| < \infty, \quad f_0 = \Big\|\int_{t_0}^{\infty} f(t)\,dt\Big\| < \infty,$$

стремятся к ненулевым конечным предельным векторам при $t \to \infty$.

В самом деле, в силу (4.18) получаем

$$V_1(t, M, N) \le N_* V_1(t, E, 1),\ t \in J .$$

Следовательно, условие (D) будет выполняться, если

$$\left\|\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} f(t)\,dt\right\| - N_* q > 0 . \tag{4.24}$$

Согласно условию (E_1) имеем

$$N_* \le \|\varphi(t_0)\| + f_* . \tag{4.25}$$

Используя соотношения

$$\left\|\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} f(t)\,dt\right\| \ge \|\varphi(t_0)\| - f_0 , \tag{4.26}$$

(4.25) и условия (q), $\varphi(t_0) \ne 0$, (E_2), получаем, что выполняется соотношение (4.24) и, значит, условие (D).

Следствие 4.3. Если $f(t) \equiv 0$ и выполняются условия (A), (q), то решения $x(t)$ системы (4.1) с непрерывными на E_{t_0} начальными векторными функциями $\varphi(t)$, для которых $\|\varphi(t)\| \le \|\varphi(t_0)\| \ne 0,\ t \in E_{t_0}$ стремятся к ненулевым конечным предельным векторам при $t \to \infty$.

В данном случае соотношение (E_2) выполняется автоматически.

Следствие 4.4. Если выполняются условия (A), (C) и

$$f_0 - q f_* > 0 , \tag{F}$$

то решения $x(t)$ системы (4.1) с непрерывными на E_{t_0} начальными векторными функциями $\varphi(t)$, удовлетворяющими соотношениям (E_1) и

$$\|\varphi(t_0)\| < (1+q)^{-1}(f_0 - q f_*) , \tag{E_3}$$

стремятся к ненулевым конечным предельным векторам при $t \to \infty$.

В этом случае вместо соотношения (4.26) используется соотношение

$$\left\|\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} f(t)\,dt\right\| \ge f_0 - \|\varphi(t_0)\| .$$

Следствие 4.5. Если выполняются условия (*A*), (*C*) и (*F*), то решение $x(t)$ системы (4.1) с нулевым начальным вектором $\varphi(t) \equiv 0, t \in E_{t_0}$, стремится к ненулевому конечному предельному вектору при $t \to \infty$.

В рассматриваемом случае соотношения (E_1) и (E_3) выполняются автоматически.

Замечание 4.1. Имеет место соотношение

$$V_1(t, E, 1) \le E'(t),\ t \in J. \qquad (4.27)$$

Следовательно, условие (*q*) будет выполняться, если

$$q' = \int_{t_0}^{\infty} V_1(t,1,1)dt < \ln 2. \qquad (q')$$

Условие (*q*) будет нарушаться, если

$$q' \ge 1. \qquad (q'')$$

В случае, когда компоненты векторной функции $f(t)$, не равные тождественно нулю, неотрицательные или неположительные на полуинтервале J, условие (*F*) совпадает с условием (*q*).

Действительно, учитывая монотонную неубываемость функции $E(t)$ на J, получаем

$$V_1(t, E, 1) \le E(t)V_1(t,1,1) = E'(t),\ t \in J,$$

откуда следует соотношение (4.27). В силу (4.27) имеем $q \le \exp(q') - 1$. Следовательно, при выполнении (*q*') будет выполняться (*q*). Так как $E(t) \ge 1,\ t \in J$, то $V_1(t, E, 1) \ge V_1(t,1,1),\ t \in J$. Поэтому при выполнении (*q*'') будет нарушаться условие (*q*). Наконец, имеем $f_* = f_0 > 0$ и, значит, в этом случае условие (*F*) совпадает с условием (*q*).

В качестве следствий из теоремы 4.5 аналогично следствиям 4.2-4.5 устанавливаются следующие предложения.

Следствие 4.6. Если выполняются условия (A), (B), (C_i) и

$$q_0 = e_0(n)q < 1, \qquad (q_0)$$

где $e_0(n) \equiv 1$ или $e_0(n) \equiv n$, или $e_0(n) \equiv n^{\frac{1}{2}}$ соответственно определению нормы вектора, то для непрерывных на E_{t_0} начальных векторных функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям

$$|\varphi_k(t)| \le |\varphi_i(t)| \le |\varphi_i(t_0)| + f_* \ \ (k = 1,...,n;\ 1 \le i \le n),\ t \in E_{t_0}, \qquad (E_{1i})$$

$$\varphi_i(t_0) \ne 0 \ \ (1 \le i \le n),$$

$$|\varphi_i(t_0)| > (1 - q_0)^{-1}(f_{0i} + q_0 f_*) \ \ (1 \le i \le n), \qquad (E_{2i})$$

где

$$f_{0i} = \left|\int_{t_0}^{\infty} f_i(t)\,dt\right| < \infty \ \ (1 \le i \le n),$$

соответствующие компоненты $x_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ решений $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ системы (4.1) стремятся к ненулевым конечным пределам при $t \to \infty$. Если, кроме того, выполняется условие (C), то в случае

$$|\varphi_1(t)| \equiv ... \equiv |\varphi_n(t)|,\ \ t \in E_{t_0},$$

все компоненты $x_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ стремятся к ненулевым конечным пределам при $t \to \infty$.

Следствие 4.7. Если $f(t) \equiv 0$ и выполняются условия (A), (q_0), то для непрерывных на E_{t_0} начальных векторных функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$, компоненты которых удовлетворяют соотношениям $|\varphi_k(t)| \le |\varphi_i(t)| \le |\varphi_i(t_0)| \ne 0$ $(k = 1,...,n;\ 1 \le i \le n)$, $t \in E_{t_0}$, соответствующие компоненты $x_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ и в случае (E_0) все компоненты решений $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ системы (4.1) стремятся к ненулевым конечным пределам при $t \to \infty$.

Следствие 4.8. Если выполняются условия (A), (B), (C_i) и

$$f_{0i} - qf_* > 0 \ \ (1 \le i \le n), \qquad (F_i)$$

то для непрерывных на E_{t_0} начальных векторных функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$, удовлетворяющих соотношениям (E_1) и

$$\|\varphi_i(t_0)\| \le (1+q_0)^{-1}(f_{0i} - q_0 f_*) \ \ (1 \le i \le n), \qquad (E_{3i})$$

соответствующие компоненты $x_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ решений $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ системы (4.1) стремятся к ненулевым конечным пределам при $t \to \infty$. Если, кроме того, выполняются условия (C) и (F_i) для всех $i = 1,...,n$ то в случае выполнения (E_{3i}) для всех $i = 1,...,n$ все компоненты $x_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ стремятся к ненулевым пределам при $t \to \infty$.

Следствие 4.9. Если выполняются условия (A), (B), (C_i) и (F_i), то компонента $x_i(t)$ $(1 \le i \le n)$ решения $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ системы (4.1) с нулевым начальным вектором $\varphi(t) \equiv 0,\ t \in E_{t_0}$ стремится к ненулевому конечному пределу при $t \to \infty$. Если условия (C_i) и (F_i) выполняются для всех $i = 1,...,n$, то все компоненты $x_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ стремятся к ненулевым конечным пределам при $t \to \infty$.

Замечание 4.2. Условие (q_0) будет выполняться, если $q' < \ln[1 + (e_0(n))^{-1}]$, и будет нарушаться, если $q' \ge (e_0(n))^{-1}$.

Это вытекает из соотношений (4.27) и $E(t) \ge 1,\ t \in J$.

Замечание 4.3. В случае, когда j $(j = 1,...,n-1)$ функций $\varphi_k(t)$ $(k = 1,...,n,$ $k \ne i,\ 1 \le i \le n)$ равны тождественно нулю на E_{t_0}, можно заменить $e_0(n)$ на $e_0(n-j)$.

Пусть задано однопараметрическое семейство векторных кривых

$$x = x_0(t) + c, \qquad (x)$$

где $x_0(t)$ - заданная $n\times1$ векторная функция, определенная и непрерывная на множестве $J\cup E$ и непрерывно дифференцируемая на полуинтервале J; c - $n\times1$ векторный параметр. Установим существование у каждого решения $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ асимптоты вида (x), т.е.

$$\lim_{t\to\infty}[x(t)-x_0(t)]=c.$$

Теорема 4.6. Пусть выполняется условие (A) и векторная функция $x_0(t)$ ограничена на E_{t_0}. Тогда для существования у каждого решения $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ асимптоты вида (x) необходимо и достаточно существования конечного векторного предела

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}[L(s;x_0)-x_0(s)]ds. \qquad (G)$$

Доказательство. Применяя к задаче (4.1), (4.1^0) подстановку

$$y(t)=x(t)-x_0(t),\quad t\in J\cup E_{t_0}, \qquad (4.28)$$

получаем систему

$$y'(t)=L_0(t;y),\quad t\in J, \qquad (4.29)$$

с начальным условием

$$y(t)=\varphi_0(t),\quad t\in E_{t_0}, \qquad (4.29^0)$$

где

$$L_0(t;y)\equiv L(t;y+x_0)-x_0'(t),\quad \varphi_0(t)\equiv\varphi(t)-x_0(t).$$

При $t\in J$ и любых векторах $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ имеем

$$L_0(t;0)\equiv L(t;x_0)-x_0'(t), \qquad (30)$$

$$L_0(t;y^{(1)})-L_0(t;y^{(2)})\equiv L(t;y^{(1)}+x_0)-L(t;y^{(2)}+x_0). \qquad (31)$$

Из (4.31) вытекает, что векторные функции в правой части системы (4.29) удовлетворяют условию Липшица с теми же самыми коэффициентами Липшица, что и соответствующие векторные функции в правой части системы (4.1).

Пусть у каждого решения $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ существует асимптота вида (x). Тогда, согласно ограниченности $x_0(t)$ на E_{t_0} и подстановке (4.28), каждое решение $y(t)$ системы (4.29) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi_0(t)$ имеет конечный предельный вектор при $t \to \infty$. Составим тождество

$$y(t) - \varphi_0(t_0) - \int_{t_0}^{t} [L_0(s;y) - L_0(s;0)]ds \equiv \int_{t_0}^{t} L_0(s;0)ds,\ t \in J. \qquad (4.32)$$

В силу условия (A) и ограниченности $y(t)$ на $J \cup E_{t_0}$ получаем, что интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty} [L_0(s;y) - L_0(s;0)]ds$$

сходится абсолютно. Следовательно, левая часть тождества (4.32) стремится к конечному предельному вектору при $t \to \infty$. Поэтому правая часть тождества (4.32) также стремится к конечному предельному вектору при $t \to \infty$, т.е. согласно (4.28), существует конечный векторный предел (G).

Пусть теперь существует конечный векторный предел (G). Тогда в силу условия (A), соотношения (4.30) и теоремы 4.4 каждое решение $y(t)$ системы (4.29) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi_0(t)$ стремится к конечному предельному вектору при $t \to \infty$. Следовательно, в силу ограниченности $x_0(t)$ на E_{t_0} из подстановки (4.28) вытекает, что каждое решение $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ обладает асимптотой вида (x).

Следствие 4.10. Пусть выполняются условия (A) и

$$\alpha_i(t) \geq \alpha^0 > -\infty, \ \beta_{kj}(\tau_k) \geq \alpha^0, \qquad (\alpha^0)$$

$(i = 1,...,m; \ k = 1,...,l; \ j = 1,...,m_k)$ при $t \geq t_0$, $\alpha_k(t) \leq \tau_k \leq b_k(t)$ $(k = 1,...,l)$. Тогда для существования у каждого решения $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ асимптоты вида (x) необходимо и достаточно существования конечного векторного предела (G).

В силу условия (α^0) начальное множество E_{t_0} является конечным замкнутым множеством. Поэтому непрерывные на E_{t_0} векторные функции $x_0(t)$ и $\varphi(t)$ ограничены на E_{t_0}.

Следствие 4.11. Пусть (4.1) - скалярное уравнение и выполняются условия (A), (α^0). Тогда для существования у каждого решения $x(t)$ уравнения (4.1) с любой непрерывной на E_{t_0} начальной функцией $\varphi(t)$ асимптоты с заданным угловым коэффициентом k необходимо и достаточно существования конечного векторного предела

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} [L(s;ks) - k] ds,$$

где $L(t;kt)$ - результат подстановки в правую часть уравнения (4.1) вместо $x(t)$ функции kt, $t \in J \cup E_{t_0}$.

В данном случае $x_0(t) \equiv kt$.

Последний результат для линейного неоднородного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием установлен в монографии [5].

Из теоремы 4.6 и следствий 4.10, 4.11 при $l = 1$, $a_1(t) \equiv t_0$, $b_1(t) \equiv t$ вытекают результаты [5].

Предложение, аналогичное следствию 4.10, для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием установлено в монографии [5].

Из теорем 4.4, 4.6 (необходимость) при $x_0(t) \equiv 0$ вытекает следующее предложение.

Теорема 4.7. Если выполняется условие (A), то каждое решение $x(t)$ системы (4.1) с любой непрерывной и ограниченной на E_{t_0} начальной векторной функцией $\varphi(t)$ стремится к конечному предельному вектору при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (C).

§ 5. Об одной предельной задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений второго порядка вольтеррова типа

В этом параграфе развивается метод использования эквивалентной системы интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования из § 1 настоящей главы к решению одной предельной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра.

Изучается однозначное существование решений систем интегро-дифференциальных уравнений (и.- д.у.)

$$[P(t)x'(t)]' = F(t, x(t), x'(t), \int_{a(t)}^{b(t)} H(t, \tau, x(\tau), x'(\tau))d\tau), \quad t \geq t_0, \tag{5.1}$$

удовлетворяющих предельным условиям

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c_0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t)x'(t) = c_1, \tag{5.2}$$

где $x(t)$ - искомая $n \times 1$ векторная функция $P(t)$ - $n \times n$ матричная функция, неособенная и непрерывно дифференцируемая на полуинтервале $J = [t_0, \infty)$; $a(t) \equiv t$ и $b(t) \equiv \infty$ (система и.- д.у. (5.1_1)) или $a(t) \equiv t_0$ и $b(t) \equiv t$ (система и.- д.у. (5.1_2)); $F(t, x, x', \vartheta)$ и $H(t, \tau, x, x') - n \times 1$ и $l \times 1$ соответственно векторные функции, которые при $t \in J$, $\tau \in J_b$ и любых x, x', ϑ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по x, x', ϑ с коэффициентами Липшица соответственно $g_k(t), g(t)$ и $h_k(t,\tau)\ (k=0,1)$, неотрицательными и непрерывными при $t \in J, \tau \in J_b, J_b = [t,\infty)$ для случая $a(t) \equiv t$, $b(t) \equiv \infty$ и $J_b = [t_0, t]$ для случая $a(t) \equiv t_0, b(t) \equiv t; c_0, c_1$ - заданные постоянные $n \times 1$ векторы.

Под $\|x\|$ для вектора x понимается сумма или максимум абсолютных величин его компонент, соответственно для матрицы – максимум сумм абсолютных величин компонент ее столбцов или строк.

Устанавливаются достаточные коэффициентные условия однозначной разрешимости задач (5.1_1), (5.2) и (5.1_2), (5.2) в классе $C^2[t_0,\infty)\ n \times 1$ векторных функций $x(t)$, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J. Выводятся оценки решений изучаемых задач. Задача (5.1_1), (5.2) сводится к эквивалентной системе и.-д.у.; которая изучается методом последовательных приближений Пикара; сходимость последовательных приближений устанавливается по факториальному закону. Задача (5.1_2), (5.2) изучается методом построения специальных последовательных приближений (последовательных приближения определяются из рекуррентных систем дифференциальных уравнений), при этом используется результат относительно задачи (5.1_1), (5.2) для случая системы дифференциальных уравнений; сходимость последовательных приближений устанавливается по закону геометрической прогрессии.

Задачи (5.1_1), (5.2) и (5.1_2), (5.2) в случае $P(t) \equiv E$ - единичная матрица и $c_1 = 0$ изучались в [25,26], где рассматриваются и.- д.у. и r - мерные системы и. - д.у. n - го порядка с заданными на бесконечности значением искомой векторной функции и нулевыми значениями ее производных до $(n-1)$ - го порядка включительно.

В случае $c_1 = 0$ может быть $P(t) \equiv E$.

Введем обозначения:

$$p_0(t) \equiv \left\| P^{-1}(t) \right\|, \ G_k(t,\tau) \equiv g(t) h_k(t,\tau) \quad (k = 0,1),$$

$F_1(t;x)$ - правая часть системы и.- д. у. (1_1),

$$f_1(t) \equiv F(t, 0, 0, \int_t^\infty H(t, \tau, 0, 0) d\tau),$$

$$F_2(t; x, y) \equiv F(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^t H(t, \tau, y(\tau), y'(\tau)) d\tau),$$

$$f_2(t) \equiv F(t, 0, 0, \int_{t_0}^t H(t, \tau, 0, 0) d\tau).$$

Теорема 5.1. Если

1) интегралы

$$\int_t^\infty H(t, \tau, 0, 0) d\tau, \int_t^\infty h_k(t,\tau)(p_0(\tau))^k d\tau \ \ (k = 0,1)$$

сходятся по t на полуинтервале J и сходятся равномерно по t на всяком конечном отрезке $J_0 = [t_0, t_1], \ t_1 > t_0$

$$\int_{t_0}^\infty \left[g_k(t)(p_0(t))^k \int_t^\infty G_k(t,\tau)(p_0(\tau))^k d\tau \right] dt < \infty \quad (k = 0,1), \tag{A$_1$}$$

$$\left\| \int_{t_0}^\infty f_1(t) dt \right\| < \infty, \tag{B$_1$}$$

$$\int_{t_0}^\infty p_0(t) \int_t^\infty \left[g_k(\eta)(p_0(\eta))^k + \int_\eta^\infty G_k(\eta,\tau)(p_0(\tau))^k d\tau \right] d\eta dt < \infty \quad (k = 0,1), \tag{C$_1$}$$

$$\left\| \int_{t_0}^\infty P^{-1}(t) \int_t^\infty f_1(\eta) d\eta dt \right\| < \infty, \tag{D$_1$}$$

$$\left\| \int_{t_0}^\infty P^{-1}(t) dt \right\| < \infty, \tag{E$_1$}$$

то задача (5.1_1), (5.2) с любыми фиксированными предельными векторами c_0, c_1 имеет единственное решение $x(t)$ в классе $C^2[t_0,\infty)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| + \|P(t)x'(t)\| \le d_1 \exp(T(t)), \qquad t \in J, \tag{5.3}$$

где

$$d_1 = \sup_J \left\| c_0 - \int_t^\infty P^{-1}(s)\left[c_1 - \int_s^\infty f_1(\eta)d\eta \right] ds \right\| + \sup_J \left\| c_1 - \int_t^\infty f_1(\eta)d\eta \right\| < \infty,$$

$$T(t) \equiv \int_t^\infty \left\{ g_*(s) + \int_s^\infty \left[p_0(s)g_*(\eta) + G_*(s,\eta) + p_0(s)\int_\eta^\infty G_*(\eta,\tau)d\tau \right] d\eta \right\} ds,$$

$$g_*(t) \equiv \max_{0\le k\le 1} g_k(t)(p_0(t))^k, \; G_*(t,\tau) \equiv \max_{0\le k\le 1} G_k(t,\tau)(p_0(\tau))^k.$$

Доказательство. В классе $C^2[t_0,\infty)$ задача (5.1_1), (5.2) эквивалентна системе и.- д. у.

$$x(t) = c_0 - \int_t^\infty P^{-1}(s)L_1(s;c_1,x)ds, \quad t \ge t_0, \tag{5.4}$$

где

$$L_1(t;c_1,x) \equiv c_1 - \int_t^\infty F_1(\eta;x)d\eta.$$

Всякая из класса $C^2[t_0,\infty)$ векторная функция $x(t)$, удовлетворяющая предельным условиям (5.2), ограничена вместе с векторной функцией $P(t)x'(t)$ на полуинтервале J.

Таким образом, достаточно доказать, что система и.- д. у. (5.4) при любых фиксированных векторах c_0, c_1 имеет единственное решение в классе $O^2[t_0,\infty)$ $n\times 1$ векторных функций $x(t)$, определенных, дважды непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с векторными функциями $P(t)x'(t)$ на полуинтервале J, и это решение $x(t)$ удовлетворяет оценке (5.3).

Для системы и.- д. у. (5.4) построим последовательные приближения:

$$x_0(t) = 0,\, t \in J,$$

$$x_m(t) = c_0 - \int_t^{\infty} P^{-1}(s) L_1(s; c_1, x_{m-1}) ds \quad (m = 1, 2, \ldots),\ t \in J. \tag{5.5}$$

Формально дифференцируя (5.5), имеем

$$x'_m(t) = P^{-1}(t) L_1(t; c_1, x_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \ldots),\ t \in J. \tag{5.6}$$

Для любой $n \times 1$ векторной функции $x(t)$, определенной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной вместе с векторной функцией $P(t)x'(t)$ на полуинтервале J, в силу условия 1) интеграл в $F_1(t; x)$ сходится по t на J и сходится равномерно по t на J_0 и, значит, является непрерывной векторной функцией по $t \in J$; далее, в силу условий (A_1) и (B_1) интеграл в $L_1(t; c_1, x)$ сходится равномерно по t на J, векторная функция $L_1(t; c_1, x)$ непрерывно дифференцируема по t на J и стремится к вектору c_1 при $t \to \infty$ и, значит, ограничена на J; наконец, в силу условий $(C_1), (D_1)$ и (E_1) интеграл в (5.4) сходится равномерно по t на J, непрерывно дифференцируем по t на J и стремится к нулю при $t \to \infty$ и, значит, ограничен на J; следовательно, правая часть системы и.- д. у. (5.4) отображает $x(t)$ в векторную функцию из класса $O^2[t_0, \infty)$.

Используя доказанное, методом полной математической индукции убеждаемся в том, что интегралы в $F_1(t; x_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ сходятся по t на J и сходятся равномерно по t на J_0, и интегралы в $L_1(t; c_1, x_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ и в (5.5) сходятся равномерно по t на J (тем самым обоснованы соотношения (5.6)), векторные функции $x_m(t)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ принадлежат классу $O^2[t_0, \infty)$. Из (5.5) и (5.6) имеем

$$u_1(t) \le d_1, \quad t \in J, \tag{5.7}$$

$$u_m(t) \le \int\limits_t^{\infty} \left\{ g_*(s) u_{m-1}(s) + \int\limits_s^{\infty} \left[p_0(s) g_*(\eta) + G_*(s,\eta)) u_{m-1}(\eta) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + p_0(s) \int\limits_\eta^{\infty} G_*(\eta,\tau) u_{m-1}(\tau) d\tau \right] d\eta \right\} ds \quad (m = 2,...),\ t \in J, \tag{5.8}$$

где

$$u_m(t) \equiv \| x_m(t) - x_{m-1}(t) \| + \| P(t)[x'_m(t) - x'_{m-1}(t)] \| \quad (m = 1,2,...).$$

В силу (5.7) из (5.8) методом полной математической индукции получаем, что справедлива оценка

$$u_m(t) \le d_1 \frac{(T(t))^{m-1}}{(m-1)!} \quad (m = 1,2,...),\ t \in J. \tag{5.9}$$

Из (5.9) с учетом $T(t) \le T(t_0) < \infty, \quad t \in J$, вытекает, что ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[x_m(t) - x_{m-1}(t) \right], \tag{5.10}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(t) \left[x'_m(t) - x'_{m-1}(t) \right] \tag{5.11}$$

сходятся абсолютно и равномерно на полуинтервале J. Следовательно, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[x'_m(t) - x'_{m-1}(t) \right] \tag{5.12}$$

сходится абсолютно на J и равномерно на J_0. Сумма, скажем, $x(t)$ ряда (5.10) определена и непрерывно дифференцируема на полуинтервале J. Используя оценку (5.9), из (5.10) и (5.11) получаем оценку (5.3), откуда с учетом $T(t) \le T(t_0) < \infty, \quad t \in J$, следует, что векторные функции $x(t)$ и $P(t)x'(t)$ ограничены на полуинтервале J. Следовательно, согласно доказанному выше, интеграл в $F_1(t;x)$ сходится по t на J и сходится равномерно по t на J_0, и интегралы в $L_1(t;c_1,x)$ и в (5.4) сходятся равномерно по t на J. Переходя в (5.5) к пределу при $m \to \infty$ получаем, что $x(t)$ удовлетворяет системе и.- д. у. (5.4); $x(t) \in O^2[t_0,\infty)$,

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - любые два решения системы и.- д.у. (5.4) в классе $O^2[t_0,\infty)$. Тогда получаем

$$u(t) \le \int_t^{\infty} \left\{ g_*(s)u(s) + \int_s^{\infty} \left[(p_0(s)g_0(\eta) + G_*(s,\eta))u(\eta) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_{\eta}^{\infty} p_0(s)G_*(\eta,\tau)u(\tau)d\tau \right] d\eta \right\} ds, \qquad t \in J, \tag{5.13}$$

где

$$u(t) \equiv \|x_1(t) - x_2(t)\| + \|P(t)[x'_1(t) - x'_2(t)]\|.$$

Из (5.13), согласно следствию, аналогичному следствию 1 [21], вытекает, что $u(t) \equiv 0$ и, значит, $x_1(t) = x_2(t)$ на J.

Обозначим через $(A_2),(B_2),(C_2)$ и (D_2) условия, получающиеся соответственно из условий $(A_1),(B_1),(C_1)$ и (D_1) заменой в них интегралов с пределами от t до ∞ (с подынтегральными функциями $G_k(t,\tau)(p_0(\tau))^k$ $(k=0,1)$) на интегралы с пределами от t_0 до t и $f_1(t)$ на $f_2(t)$.

Теорема 5.2. Если выполняются условия $(A_2),(B_2),(C_2),(E_2)$ и

$$q = \int_{t_0}^{\infty} (E(t))^{-1} \left[\int_{t_0}^{t} G_*(t,\tau)E(\tau) + p_0(t)\int_t^{\infty}\int_{t_0}^{\eta} G_*(\eta,\tau)E(\tau)d\tau d\eta \right] dt < 1, \tag{q}$$

где

$$E(t) \equiv \exp\left\{ \int_t^{\infty} \left[g_*(s) + p_0(s)\int_s^{\infty} g_*(\eta)d\eta \right] ds \right\},$$

то задача (5.1_2), (5.2) с любыми фиксированными предельными векторами c_0, c_1 имеет единственное решение $x(t)$ в классе $C^2[t_0,\infty)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| + \|P(t)x'(t)\| \le \frac{d_2}{1-q}E(t), \quad t \in J, \tag{5.14}$$

где d_2 - постоянная, получающаяся из постоянной d_1 заменой в ней $f_1(t)$ на $f_2(t)$.

Доказательство. Для задачи (5.1$_2$), (5.2) построим последовательные приближения:

$x_0(t) = 0,\ t \in J,$

$$[P(t)x_m'(t)]' = F_2(t; x_m, x_{m-1}) \quad (m = 1, 2, \ldots),\ t \in J, \tag{5.15}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_m(t) = c_0, \quad \lim_{t\to\infty} P(t)x'_m(t) = c_1 \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{5.16}$$

Используя условия $(A_2), (B_2), (C_2), (E_2)$ и теорему 5.1, методом полной математической индукции получаем, что задача (5.15), (5.16) для любого натурального числа m имеет единственное решение $x_m(t)$ в классе $C^2[t_0, \infty)$. Заменим задачу (5.15), (5,16) эквивалентной системой и.- д.у.

$$x_m(t) = c_0 - \int_t^\infty P^{-1}(s) L_2(s; c_1, x_m, x_{m-1}) ds \quad (m = 1, 2, \ldots),\ t \in J, \tag{5.17}$$

где

$$L_2(t; c_1, x, y) \equiv c_1 - \int_t^\infty F_2(\eta; x, y) d\eta.$$

Из (5.17) имеем

$$u_m(t) \le D_m(t) + \int_t^\infty \left[g_*(s) u_m(s) + p_0(s) \int_s^\infty g_*(\eta) u_m(\eta) d\eta \right] ds \quad (m = 1, 2, \ldots),\ t \in J, \tag{5.18}$$

где

$$u_m(t) \equiv \|x_m(t) - x_{m-1}(t)\| + \|P(t)[x'_m(t) - x'_{m-1}(t)]\| \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$D_1(t) \equiv d_2,\ D_m(t) \equiv \int_t^\infty \left[\int_{t_0}^s G_*(s, \tau) u_{m-1}(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + p_0(s) \int_s^\infty \int_{t_0}^\eta G_*(\eta, \tau) u_{m-1}(\tau) d\tau d\eta \right] ds \quad (m = 2, \ldots).$$

Применяя к неравенству (5.18) замечание 3.1 [15], получаем

$$u_1(t) \le d_2 E(t), \quad t \in J, \tag{5.19}$$

$$u_m(t) \le E(t)\int_t^{\infty}(E(s))^{-1}\left[\int_{t_0}^{s} G_*(s,\tau)u_{m-1}(\tau)d\tau + \right.$$

$$\left. + p_0(s)\int_s^{\infty}\int_{t_0}^{\eta} G_*(\eta,\tau)u_{m-1}(\tau)d\tau d\eta\right]ds \quad (m=2,...),\ t\in J. \tag{5.20}$$

В силу (5.19) из (5.20) получаем оценку

$$u_m(t) \le d_2 E(t) q^{m-1} \quad (m=1,2,...), \quad t \in J. \tag{5.21}$$

Используя оценку (5.21) и условие (q), аналогично, как в теореме 5.1, получаем, что задача (5.1_2), (5.2) имеет решение в классе $C^2[t_0,\infty)$. Для любых двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ задачи (5.1_2), (5.2) в классе $C^2[t_0,\infty)$ имеем

$$u(t) \le D(t) + \int_t^{\infty}\left[g_*(s)u(s) + p_0(s)\int_s^{\infty} g_*(\eta)u(\eta)d\eta\right]ds, \quad t \in J, \tag{5.22}$$

где

$u(t) \equiv \|x_1(t)-x_2(t)\| + \|P(t)[x'_1(t)-x'_2(t)]\|,$

$$D(t) \equiv \int_t^{\infty}\left[\int_{t_0}^{s} G_*(s,\tau)u(\tau)d\tau + p_0(s)\int_s^{\infty}\int_{t_0}^{\eta} G_*(\eta,\tau)u(\tau)d\tau d\eta\right]ds.$$

Применяя к неравенству (5.22) замечание 3.1 [15] и производя оценку, имеем

$$M \le Mq, \tag{5.23}$$

где

$$M = \sup_J (E(t))^{-1}u(t) < \infty.$$

В силу условия (q) из (5.23) следует, что $M=0$ и, значит, $u(t)\equiv 0, x_1(t)\equiv x_2(t)$ на J.

Замечание 5.1. В случае $c_1 = 0$ можно опустить в теоремах 5.1, 5.2 условие (E_1).

Глава 2

Оценки и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра на полуоси

Всюду в этой главе, кроме последнего параграфа, будем пользоваться следующими обозначениями, аналогично как в монографии [11].

Все переменные и постоянные величины являются вещественными: символ «∞» означает «$+\infty$»; «$\in$» означает «принадлежит»; «$\Leftrightarrow$» означает «эквивалентно, равносильно»; R означает числовую ось, т.е. $R=(-\infty,\infty)$; R_+ означает полуось, т.е. $R_+=[0,\infty)$; J означает бесконечный полуинтервал, т.е. $J=[t_0,\infty), t_0\in R;$ запись $t\geq t_0$ означает $t\in J$, т.е. $t\geq t_0 \Leftrightarrow t\in J.$

$C^k(J,R)$ - пространство функций, определенных и k раз непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J со значениями из $R.$

$L^p(J,R)\ (p>0)$ - пространство абсолютно интегрируемых на полуинтервале J в p-й степени функций со значениями в $R,$т.е. $x(t)\in L^p(J,R)\ (p>0)\Leftrightarrow\int\limits_{t_0}^{\infty}\left|x(t)\right|^p dt<\infty\ (p>0).$ Это означает степенную абсолютную интегрируемость функции $x(t)$на полуинтервале J.

$L^p(J,R_+)\ (p>0)$ - пространство неотрицательных функций, интегрируемых на полуинтервале J в p-й степени, т.е.

$$x(t)\in L^p(J,R_+)\ (p>0)\Leftrightarrow x(t)\geq 0,\int\limits_{t_0}^{\infty}(x(t))^p dt<\infty\ (p>0).$$

$x(t)=O(1), t\in J\Leftrightarrow\exists$ const $M>0$ такая, что $\left|x(t)\right|\leq M.$ В этом случае говорят, что функция $x(t)$ограничена на бесконечном полуинтервале J.

Если $\exists\,\alpha$ - const > 0 такая, что $x(t)=e^{-\alpha t}O(1), t\in J,$ то говорят, что функция $x(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$ по экспоненциальному закону.

Если $\exists\,\beta,\gamma$ - const > 0 такие, что $x(t)=(t+\beta)^{-\gamma}O(1), t\in J, t_0=0,$ то говорят, что функция $x(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$ по степенному закону.

ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение.

ДУ - дифференциальное уравнение.

ФДУ – функционально-дифференциальное уравнение.

Если $\int_{t_0}^{\infty}|g(t)|dt=\infty,$ то функция $g(t)\in C(J,R)$ называется немалой.

АС - асимптотическое свойство. Под АС решений понимается АС решений при $t\in J, t\to\infty,$ а именно ограниченность на J, принадлежность пространству $L^p(J,R)\ (p>0)$ и стремление к нулю решений при $t\to\infty,$ в том числе по экспоненциальному и степенному закону при $t\to\infty.$

Под устойчивостью решений слабо нелинейного ИДУ k- го порядка понимается ограниченность на полуинтервале J всех его решений и их производных до $k-1$ - го порядка включительно.

Под оценкой и асимптотическим свойством решений ИДУ k- го порядка понимается оценка и асимптотическое свойство на полуинтервале J всех его решений и их производных до $k-1$ - го порядка включительно.

Под асимптотическим представлением на J, функции $x(t)$, понимается соотношение $x(t)=\Phi(t)O(1)$, при этом функция $\Phi(t)\ge 0$ и допускает наложение на нее дополнительных условий, например, типа $\Phi(t)\to 0, t\to\infty; \Phi(t)\in L^p(J,R)\ (p>0).$ Такое асимптотическое представление эквивалентно следующей оценке функции $x(t)$: $\exists$ const $M>0$ такая, что $x(t)=\Phi(t)M,$ где $\Phi(t)\ge 0.$

Отметим, что в ниже рассматриваемых ИДУ типа Вольтерра, речь идет о их решениях $x(t) \in C^n(J,R)\, (n \in N)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ $(k = 0,1,2,...,n-1);$. Каждое такое решение существует и единственно, что следует из § 1 главы 1 настоящей работы.

Всюду в настоящей работе рассматриваются обыкновенные ДУ и ИДУ.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$.

§ 1. Об асимптотическом представлении решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка

Задача 1.1. Установить достаточные условия гарантирующие АП вида:

$$x(t) = P(t) + o(1) \tag{1.1}$$

для любого решения $x(t)$ ИДУ первого порядка

$$L[x] \equiv x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t \ge t_0, \tag{1.2}$$

где $P(t)$ - известная функция с заранее заданными асимптотическими свойствами, $o(1)$ - символ Э. Ландау, означающий бесконечно малую величину при $t \to \infty$, т.е. $o(1) \to 0,\ t \to \infty.$

Заметим, что идея изучения такой задачи взята из статьи Ю.А. Ведь [27].

Отметим, что аналогичная задача ранее рассмотрена в статье Ю.А. Ведь [28] для n- мерной системы ИДУ:

$$x'(t) + A(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t \ge t_0,$$

где $x(t)$ - $n \times 1$ искомая вектор-функция, $A(t), K(t,\tau)$ - $n \times n$ заданные матричные функции, $f(t)$ - $n \times 1$ известная вектор-функция, методом сравнения, т.е. в случае, когда $P(t) = y(t)$ - решение соответствующей системы ДУ:

$$y'(t) + A(t)y(t) = 0, \quad t \ge t_0.$$

Заметим также, что в монографии Ф.Хартмана [29, с. 523-526] содержится идея получения АП (1.1) при $P(t)=c$ (c - заданный постоянный вектор) для слабо нелинейной системы ДУ первого порядка.

В данной работе, для решения поставленной задачи, сначала в ИДУ (1.1) делается подстановка:

$$x(t)=P(t)+u(t), \tag{1.3}$$

где $u(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда для $u(t)$ получается ИДУ:

$$u'(t)+a(t)u(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau=f(t)-L[P], \tag{1.4}$$

где

$$L[P]\equiv P'(t)+a(t)P(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)P(\tau)\,d\tau. \tag{1.5}$$

Затем к ИДУ (1.4) развивается метод весовых и срезывающих функций [11] для доказательства $u(t)=o(1),\ t\to\infty.$

Идея подстановки (1.3) есть в [27].

Пусть [11]: $0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t)\equiv f(t)-L[P]=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \tag{F}$$

$$R_i(t,\tau)\equiv\varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},\quad E_i(t)\equiv\varphi(t)F_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\quad (i=1..n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ \ (i=1..n)$ - некоторые функции.

Аналогично [11, с. 46] для любого решения $x(t)$ ИДУ (1.4) умножаем на $\varphi(t)u(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим условия (K), (F), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, условие (R), функции $c_i(t)$ $(i=1..n)$, и после некоторых преобразований с применением лемм 1.4., 1.5 [11] получаем следующее тождество:

$$\varphi(t)(u(t))^2+\int\limits_{t_0}^{t}\Delta(s)(u(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(U_i(t,t_0))^2-\int\limits_{t_0}^{t}A_i'(s)(U_i(s,t_0))^2ds+$$

$$+B_i(t)(U_i(t,t_0))^2-2E_i(s)U_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}B_i'(s)(U_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)U_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\int\limits_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(U_i(t,\tau))^2d\tau-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(U_i(s,\tau))^2d\tau\,ds\}\equiv c_*+2\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s)u(s)[F_0(s)-\int\limits_{t_0}^{s}K_0(s,\tau)u(\tau)d\tau]ds, \qquad (1.6)$$

где $\Delta(t)\equiv 2\varphi(t)a(t)-\varphi'(t)$,

$U_i(t,\tau)\equiv\int\limits_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)u(\eta)d\eta \quad (i=1..n)$, $c_*=\varphi(t_0)(u(t_0))^2+\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(t_0)$.

Аналогично теореме 1.1 из [11, с. 48-49] доказывается

Теорема 1.1. Пусть 1) выполняются условия (K), (F), (R), $\varphi(t)>0$; 2) $\Delta(t)\ge 0$; 3) $A_i(t)\ge 0$, $B_i(t)\ge 0$, $B_i'(t)\le 0$, $R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0$, существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$, $c_i(t)$, $R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t)$, $(E_i^{(k)}(t))^2\le c_i^{(k)}(t)B_i^{(k)}(t)$ $(i=1..n;\ k=0,1)$;

4) $(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}[|F_0(t)|+\int\limits_{t_0}^{t}|K_0(s,\tau)|(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau]\in L^1(J,R_+)$.

Тогда для любого решения $u(t)$ ИДУ (1.4) справедлива оценка

$$u(t)=(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (1.7)$$

где $O(1)$ - символ Э. Ландау, означающий: $|O(1)|\le M<\infty,\ t\in J$.

Пусть кроме того,

5) $\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi(t))^{-1/2}=0$.

Тогда для любого решения $u(t)$ ИДУ (1.4) справедливо соотношение

$$u(t)=o(1) \qquad (1.8)$$

и для любого решения $x(t)$ ИДУ (1.2) справедливо АП (1).

Отметим, что утверждение (1.8) в силу (1.3) обеспечивает АП (1.1).

Пример 1.1. Для ИДУ первого порядка

$$x'(t)+(\sqrt{t}+1)x(t)+\int_0^t\left[\frac{e^{t+\tau}(\sin t)^{\frac{1}{3}}(\sin\tau)^{\frac{1}{3}}}{t+1}\left\{\frac{1}{t-\tau+1}+\exp\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-t}\left|\cos\tau\right|}{t+\tau+3}\right]x(\tau)d\tau=\frac{1}{\sqrt[3]{t}+1}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2-\frac{e^t(\sin t)^{\frac{1}{3}}}{(t+1)(t+2)}-e^{-t}+(\sqrt{t}+1)e^{-t}+$$

$$+\int_{t_0}^t\left[\frac{e^{t+\tau}(\sin t)^{\frac{1}{3}}(\sin\tau)^{\frac{1}{3}}}{t+1}\left\{\frac{1}{t-\tau+1}+\exp\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right)\right\}+\frac{e^{-t}\left|\cos\tau\right|}{t+\tau+3}\right]e^{-\tau}d\tau,\ t\geq 0 \qquad (1.2_1)$$

выполняются все условия теоремы 1.1 при $\varphi(t)\equiv t+1$, здесь

$t_0=0,\ \Delta(t)\equiv 2(\sqrt{t}+1)(t+1)-1>0,\ n=1,\ \psi_1(t)\equiv e^t(\sin t)^{\frac{1}{3}}$,

$R_1(t,\tau)\equiv\dfrac{1}{t-\tau+1}+\exp\left(\dfrac{t+\tau+1}{t+\tau+2}\right),\ E_1(t)\equiv-\dfrac{1}{t+2},\ A_1(t)\equiv\exp\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right),\ A_1^*(t)\equiv\dfrac{1}{(t+2)^2}$,

$B_1(t)\equiv\dfrac{1}{t+1},\ c_1(t)\equiv\dfrac{1}{t+1},\ R_1^*(t)\equiv 0,\ K_0(t,\tau)\equiv\dfrac{e^{-t}\left|\cos\tau\right|}{t+\tau+3},\ F_0(t)\equiv\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}+1}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$,

$P(t)\equiv e^{-t}$. Следовательно, для любого решения $x(t)$ ИДУ (1.2_1) имеет место АП: $x(t)=e^{-t}+o(t)$.

Теперь рассмотрим случай, когда выполняется следующее условие:

$$(\varphi(t))^{\frac{1}{2}}\left|L[p]\right|\in L^1(J,R_+), \qquad (1.9)$$

которое нарушается для ИДУ примера 1.1.

В этом случае вместо условия (F) налагается условие:

$$f(t)=\sum_{i=0}^n f_i(t), \qquad (f)$$

а вместо $E_i(t)$ вводятся $\tilde{E}_i(t)\equiv\varphi(t)f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}\quad(i=1...n)$.

Для этого случая справедлива

Теорема 1.2. Пусть 1) выполняются условия 1)-4) теоремы 1.1, где вместо условия (F) стоит условие (f), вместо функций $F_i(t)$ стоят функции $f_i(t)$, вместо функций $E_i(t)$ - функции $\tilde{E}_i(t)$, вместо функции $F_0(t)$ - функция $f_0(t)$; 2) выполняется условие (1.9). Тогда справедливо соотношение (1.8) и для любого решения $x(t)$ ИДУ (1.2) верно АП (1.1).

Пример 1.2. Простейшее ИДУ первого порядка

$$x'(t)+x(t)+\int_0^t \frac{e^{\tau^2}x(\tau)}{(t+1)^3(t-\tau+1)^2}d\tau=0,\quad t\ge 0 \qquad (1.2_2)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2 при $\varphi(t)\equiv t+1$, здесь $t_0=0$, $\varphi_1(t)\equiv e^{t^2}$,

$R_1(t,\tau)\equiv \dfrac{e^{-t^2}}{(t+1)^2(t-\tau+1)^2}$, $P(t)\equiv e^{-t^2}$, $L[e^{-t^2}]=-2te^{-t^2}+e^{-t^2}+\displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{(t+1)^3(t-\tau+1)^2}$.

Значит, для любого решения $x(t)$ данного ИДУ (1.2_2) справедливо АП: $x(t)=e^{-t^2}+o(t)$.

Замечание 1.1. В ИДУ (1.2) можно сделать подстановку

$$x(t)=P(t)+W(t)u(t), \qquad (1.10)$$

где $0<W(t)$ - некоторая весовая функция. Из (1.10) при $W(t)\equiv 1$ вытекает подстановка (1.3).

Замечание 1.2. Нам кажется интереснее будет решение выше приведенной задачи в случае $a(t)\equiv 0$, т.е. в критическом случае, развитием результатов из главы 3 монографии [11].

Замечание 1.3. В условиях теоремы 1.1 может быть $P(t)=A\sin(\omega t+t_0)$, где A,ω - известные постоянные. Тогда любое решение $x(t)$ ИДУ (1.2) будет иметь АП:

$x(t)=A\sin(\omega t+t_0)+o(1)$,

т.е. $\lim\limits_{t\to\infty}[x(t)-A\sin(\omega t+t_0)]=0$,

что дает связь АП (1.1) с предельным циклом, а именно любое решение $x(t)$ ИДУ (1.1) имеет асимптотическую периодичность при $t\to\infty$.

Пример 1.3. Для ИДУ первого порядка

$$x'(t)+3x(t)+\int_0^t \frac{e^{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}(\tau+1)}{t-\tau+5}x(\tau)d\tau=\cos t+3\sin t+\int_0^t \frac{e^{\sqrt{t}+\sqrt{\tau}}(\tau+1)\sin\tau}{t-\tau+5}\,d\tau,\ \ t\ge 0 \qquad (1.2_3)$$

выполняются все условия теоремы 1.1 при $\varphi(t)\equiv t+1$, здесь $\Delta(t)\equiv 6t+5>0$, $n=1$, $\psi_1(t)\equiv(t+1)e^{\sqrt{t}}$, $F(t)\equiv 0$, $F_1(t)\equiv 0$, $P(t)\equiv\sin t$.

Таким образом, для любого решения $x(t)$ ИДУ (1.2_3) верно АП: $x(t) = \sin t + o(t)$, т.е. $\lim[x(t) - \sin t] = 0,\ t \to \infty$.

Замечание 1.4. В АП (1.1) функция $P(t)$ может быть неограниченной. Например, может быть $P(t) = e^t$, $P(t) = kx + b\ (k \neq 0,\ k,\ b = const)$ и т.д. В случае $P(t) = kx + b$ для любого решения $x(t)$ данного ИДУ (1.1) справедливо АП: $x(t) = kx + b + o(1)$, т.е. любое решение $x(t)$ ИДУ (1.2) имеет наклонную асимптоту $x(t) = kx + b$ при $t \to \infty$. Напомним, что вопросы, связанные с наклонной асимптотой при $t \to \infty$ решений ИДУ (1.1) изучены в работах Ю.А. Ведь и его учеников (см. например, [30]).

Замечание 1.5. Для ИДУ вида (c - заданная const):

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = c\cdot[a(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\,d\tau],\quad t \ge t_0$$

имеем $F(t) \equiv 0$. Тогда из теоремы 1.1 при $F_i(t) \equiv c_i(t) \equiv F_0(t) \equiv 0\ (i = 1..n)$ вытекает, что для любого решения $x(t)$ ИДУ (1.2) справедливо АП $x(t) = c + o(1)$, а именно имеется горизонтальная асимптота $x(t) = c$ при $t \to \infty$.

§ 2. О влиянии интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения второго порядка

Задача 2.1. Установить достаточные условия ограниченности на полуинтервале J всех решений следующего линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}[Q(t,\tau)x(\tau) + K(t,\tau)x'(\tau)]d\tau = f(t), \qquad (2.1)$$

$t \ge t_0$, в случае, когда соответствующее ДУ второго порядка

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = f(t),\quad t \ge t_0 \qquad (2.1_0)$$

может иметь неограниченные на полуинтервале J решения.

Заметим, что такая задача, т.е. задача о влиянии интегральных возмущений для некоторых классов ИДУ(2.1) и ДУ (2.1_0) изучены во многих работах, например, в [31;11, с.83-89, с.142-164]. Настоящая работа является существенным дополнением этим работам.

Для решения выше поставленной задачи применяется метод, разработанный в [32],применительно к ИДУ (2.1), а именно развиваются метод преобразования уравнений В.Вольтерра [1, с 194-217], метод срезывающих функций [11], метод интегральных неравенств [33], применяется лемма, которая устанавливается ниже, и являющая обобщением леммы 3.3 [11, с.111] об интегральном неравенстве первого рода.

Лемма 2.1. Пусть $\psi(t)>0,\ \psi'(t)\geq 0,\ q(t,c)\geq 0,\ q'(t,c)\geq 0,$

$0\leq c=const,\ t\geq t_0$. Тогда из интегрального неравенства первого рода

$$\left|\int_{t_0}^{t}\psi(s)x'(s)ds\right|\leq q(t,c)$$

вытекает оценка

$$|x(t)|\leq|x(t_0)|+\left(\psi(t_0)\right)^{-1}q(t_0,c)+\int_{t_0}^{t}q'(s,c)(\psi(s))^{-1}ds.$$

Эта лемма доказывается аналогично леммам 3.1-3.3 [11, с.110-111].

Переходим к получению основного результата.

Пусть [11]:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n}f_i(t), \tag{f}$$

$\psi_i(t)(i=1\ldots n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1},E_i(t)\equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\ (i=1\ldots n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ (i=1\ldots n)$ - некоторые функции.

Для любого решения $x(t)$ ИДУ(2.1) умножаем на $x'(t)$ [1,с. 194-217], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом учитываем условия *(K), (f),* вводим функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t),$ условие *(R)*, функции $c_i(t)$, применяем леммы 1.4,1.5 [30]. В итоге после некоторых преобразований будем иметь следующее тождество:

$$(x'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_1(s)\big(x'(s)\big)^2 ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)\big(X_i(s,t_0)\big)^2 ds +$$

$$+B_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 - 2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}[B'(s)\big(X_i(s,t_0)\big)^2 ds -$$

$$-2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(t)]ds + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)\big(X_i(t,\tau)\big)^2 d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)\big(X_i(s,\tau)\big)^2 d\tau ds\} \equiv c_* + 2\int_{t_0}^{t} x'(s)\{f_0(s) - a_0(s)x(s) -$$

$$-\int_{t_0}^{s}\big[Q(s,\tau)x(\tau) + K_0(s,\tau)x'(\tau)\big]d\tau\}ds, \tag{2.2}$$

где

$$X_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi_i(\eta)x'(\eta)d\eta \ \ (i = 1 \ldots n), \ \ c_* = (x'(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0).$$

Теорема 2.1. Пусть 1) выполняются условия *(K), (f), (R)*; $a_1(t) = a_{10}(t) + a_{11}(t),\ a_{11}(t) \geq 0;$

2) $A_i(t) \geq 0, B_i(t) \geq 0, B_i'(t) \leq 0, R_{i\tau}'(t,\tau) \geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t) \geq 0,\ R_i^*(t) \geq 0$ такие, что

$$A_i'(t) \leq A_i^*(t)A_i(t),\ (E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t), R_{it\tau}''(t,\tau) \leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$$

$(i = 1 \ldots n;\ k = 0,1)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (2.1) верно следующее энергетическое неравенство:

$$(x'(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_{11}(s)(x'(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n}[A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2 d\tau] \leq M(t,c_*), \tag{2.3}$$

где

$$M(t,c_*)\equiv\{\sqrt{c_*}+\int_{t_0}^{t}f_*(s)\exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s}V(\eta)d\eta)ds\}^2\exp(\int_{t_0}^{t}V(s)ds),$$

$$f_*(t)\equiv|f_0(t)|+|a_0(t)x(t_0)|+|x(t_0)|\int_{t_0}^{t}|Q(t,\tau)|d\tau,$$

$$V(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}[A_i^*(t)+R_i^*(t)]+2\{|a_{10}(t)|+|a_0(t)|(t-t_0)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}[|Q(t,\tau)|(\tau-t_0)+|K_0(t,\tau)|]d\tau\}.$$

Пусть, кроме того, 3) $A_j(t)\geq A_{j*}(t)>0,\psi_j(t)>0,\ \psi'_j(t)\geq 0\ (1\leq j\leq n),$

$q(t,c_*)\geq 0, q'(t,c_*)\geq 0,\ q'(t,c_*)(\psi_j(t))^{-1}\in L^1(J,R_+)\ (1\leq j\leq n),$

где

$$q(t,c_*)\equiv(A_{j*}(t))^{-\frac{1}{2}}(M(t,c_*))^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда любое решение ИДУ (2.1) $x(t)=O(1)$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что условия $(E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ (i=1\ldots n;\ k=0,1)$ гарантирует выполнения неравенств:

$$(-1)^k\left[B_i^{(k)}(t)(X_i(t,t_0))^2-2(E_i^{(k)}(t))^2X_i(t,t_0)+c_i^{(k)}(t)\right]\geq 0\ (k=0,1;\ i=1\ldots n).$$

С учетом этого факта, введя обозначение:

$$u(t)\equiv(x'(t))^2+2\int_{t_0}^{t}a_{11}(s)(x'(s))^2ds+\sum_{i=1}^{n}[A_i(t)(X_i(t,t_0))^2+$$
$$+\int_{t_0}^{t}R'_{i\tau}(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2d\tau], \tag{2.4}$$

заменяя в двух местах правой части тождества (2.2) $x(t)$ на:

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}x'(s)ds,$$

из тождества (2.2), в силу условий 1), 2) теоремы 2.1 получаем следующее интегральное неравенство:

$$0 \le u(t) \le c_* + 2\int_{t_0}^{t} \{ f_*(s)(u(s))^{1/2} + [\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(A_i^*(s) + R_i^*(s)) + |a_{10}(s)|]u(s) +$$

$$+|a_0(s)|\int_{t_0}^{s}(u(\eta))^{1/2}d\eta + 2\int_{t_0}^{s}[|Q(s,\tau)|\int_{t_0}^{\tau}(u(\eta))^{1/2}d\eta + |K_0(s,\tau)|(u(\tau))^{1/2}]d\tau\}ds. \quad (2.5)$$

Применяя к интегральному неравенству (2.5) лемму 1 [33], имеем

$$u(t) \le \{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{t} f_*(s)\exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s}V(\eta)d\eta)ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{t}V(s)ds) \equiv M(t,c_*), \qquad (2.6)$$

что равносильно утверждению (2.3) теоремы в силу обозначения (2.4).

Из оценки (2.6) или (2.3) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(t)\left(X_i(t,t_0)\right)^2 \le M(t,c_*).$$

Отсюда с учетом обозначения $X_i(t,t_0)$ для $1 \le j \le n$ имеем

$$A_j(t)(\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)x'(\eta)d\eta)^2 \le M(t,c_*),$$

что в силу условия $A_j(t) \ge A_{j*}(t) > 0$ дает следующее:

$$|\int_{t_0}^{t}\psi_j(\eta)x'(\eta)d\eta| \le (A_{j*}(t))^{-\frac{1}{2}}\left(M(t,c_*)\right)^{\frac{1}{2}} \equiv q(t,c_*). \qquad (2.7)$$

Применяя к интегральному неравенству первого рода (2.7) нашу лемму 2.1, с учетом условия 3) теоремы 2.1 получаем:

$$|x(t)| \le |x(t_0)| + (\psi_j(t_0))^{-1}q(t_0,c_*) + \int_{t_0}^{t} q'(s,c_*)(\psi_j(s))^{-1}ds \le$$

$$\le |x(t_0)| + (\psi_j(t_0))^{-1}q(t_0,c_*) + \int_{t_0}^{\infty} q'(s,c_*)(\psi_j(s))^{-1}ds < \infty,$$

что равносильно ограниченности любого решения $x(t)$ ИДУ (2.1) на *J*. Теорема доказана.

Замечание 2.1. В условиях теоремы может быть $f(t)\equiv 0,$ т.е. $f_i\left(t\right)\equiv 0\ \left(i=0,1\ldots n\right)$. Тогда $B_i\left(t\right)\equiv E_i\left(t\right)\equiv c_i\left(t\right)\equiv 0\ \left(i=1\ldots n\right),$ $R_i\left(t,t_0\right)\equiv A_i\left(t\right)\left(i=1\ldots n\right),$ условия $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i\left(t\right)$ заменяться на: $R_i'(t,t_0)\le R_i^*(t)R_i\left(t,t_0\right)\ (i=1...n).$ Значит, интегральное возмущение типа Вольтерра может оказать влияние на ограниченность решений линейного однородного ДУ второго порядка (в (2.1_0) $f(t)\equiv 0$) и на ограниченность решений линейного неоднородного ДУ второго порядка (в (2.1_0) $f(t)\ne 0$ тождественно).

Пример 2.1. Для линейного однородного ИДУ:

$$x''\left(t\right)-\frac{4}{t+1}x'\left(t\right)+\frac{6}{\left(t+1\right)^2}x\left(t\right)+\int\limits_0^t\left[\frac{x\left(\tau\right)}{t+\tau+1}+K\left(t,\tau\right)x'\left(\tau\right)\right]d\tau=0,\ t\ge 0,$$

где $K\left(t,\tau\right)\equiv\left[\left(t+\tau+1\right)^{\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{t-\tau+2}\right]\exp\left(e^t+e^\tau\right)+\left[\exp\left(\dfrac{\cos t}{t+2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{2}}(t+$

$+1)^3(\sin t)^{\frac{1}{5}}\left(\tau+1\right)^3\left(\sin\tau\right)^{\frac{1}{5}}-\dfrac{100}{\left(t+\tau+1\right)^2}$, выполняются все условия теоремы 2.1 с учетом замечания, здесь $t_0=0,\ n=2,\ j=1,$

$$\psi_1\left(t\right)\equiv\exp\left(e^t\right),\ R_1\left(t,\tau\right)\equiv(t+\tau+1)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t-\tau+2},$$

$$R_1\left(t,0\right)=\left(t+1\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{t+2}\ge 1=A_{1*}\left(t\right)>0,A_1^*\left(t\right)\equiv\frac{1}{t+1},\ R_1^*\left(t\right)\equiv 0,$$

$$\psi_2\left(t\right)\equiv\left(t+1\right)^3(\sin t)^{\frac{1}{5}},\ R_2(t,\tau)\equiv[\exp\left(\frac{\cos t}{t+2}\right)+\tau]^{\frac{1}{2}},\ A_2^*(t)\equiv\frac{t+3}{(t+2)^2},$$

$$R_2^*\left(t\right)\equiv\frac{3\left(t+3\right)}{2\left(t+2\right)^2},\ K_0\left(t,\tau\right)\equiv-\frac{100}{(t+\tau+1)^2}\ ,\ f_*\left(t\right)\equiv[\frac{6}{(t+1)^2}+\ln(\frac{2t+1}{t+1})]\,|\,x(0)\,|,$$

$$V\left(t\right)\equiv\frac{1}{t+1}+\frac{t+3}{(t+2)^2}+\frac{3(t+3)}{2(t+2)^2}+2[\frac{4}{t+1}+\frac{6t}{(t+1)^2}+t-\left(t+1\right)\ln(\frac{2t+1}{t+1})+$$

$$+\frac{100t}{\left(t+1\right)(2t+1)}\ .$$

Следовательно, все решения этого ИДУ ограничены на полуоси R_+. Однако, все ненулевые решения $x(t) = c_1(t+1)^2 + c_2(t+1)^3$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные), соответствующего линейного однородного ДУ второго порядка

$$x''(t) - \frac{4}{t+1}x'(t) + \frac{6}{(t+1)^2}x(t) = 0,\ t \ge 0$$

не ограничены на полуоси R_+.

Пример 2.2. ИДУ

$$x''(t) - \frac{4}{t+1}x'(t) + \frac{6}{(t+1)^2}x(t) +$$

$$+\int_0^t \left[(t+\tau+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{t-\tau+2}\right]\exp\left(e^t + e^\tau\right)x'(\tau)\,d\tau = -\frac{\exp(e^t)}{t+3},\ t \ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, здесь $t_0 = 0,\ n = 1,$

$\psi_1(t) \equiv \exp\left(e^t\right),\ R_1(t,\tau) \equiv (t+\tau+1)^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{t-\tau+2},\ A_1(t) = (t+1)^{\frac{1}{3}} \ge 1 \equiv A_{1*}(t),$

$A_1^*(t) \equiv \dfrac{1}{t+1},\ R_1^*(t) \equiv 0,\ B_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+2},\ f_1(t) \equiv -\dfrac{\exp(e^t)}{t+3},\ E_1(t) \equiv -\dfrac{1}{t+3},$

$c_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+2},\ K_0(t,\tau) \equiv f_0(t) \equiv Q(t,\tau) \equiv 0,\ f_*(t) \equiv \dfrac{6|x(0)|}{(t+1)^2},$

$V(t) \equiv \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{4(5t+2)}{(t+1)^2}$. Значит, все решения данного ИДУ ограничены на R_+.

Можно показать, что все решения соответствующего линейного неоднородного ДУ:

$$x''(t) - \frac{4}{t+1}x'(t) + \frac{6}{(t+1)^2}x(t) = -\frac{\exp(e^t)}{t+3},\ t \ge 0$$

будут неограниченными на полуоси R_+, что следует из формулы Лагранжа.

Таким образом, нам удалось найти класс ИДУ (2.1) и ДУ (2.1_0), для которых выше приведенная задача решаема. Опыт построения примеров показывает, что для любого ДУ вида (2.1_0) с неограниченными решениями можно построить ИДУ (2.1) уже с ограниченными решениями. Это и есть влияние интегральных возмущений типа Вольтерра.

§ 3. Об оценках решений и их первых производных линейного вольтеррова неявного интегро-дифференциального уравнения второго порядка

Неявное ИДУ второго порядка -ИДУ второго порядка, содержащее в подынтеграле вторую производную неизвестной функции.

Задача 3.1. Установить достаточные условия, дающие оценки на J всех решений и их первых производных линейного неявного ИДУ второго порядка вида

$$\begin{gathered} x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + \right. \\ \left. + Q_2(t,\tau)x''(\tau) \right] d\tau = f(t), \ t \geq t_0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Отметим, что такая задача ранее решена в статье [38] модифицированным методом преобразования уравнений [11, с.28-29] и методом срезывающих функций [11, с.41]. В настоящей работе для решения поставленной задачи развиваются нестандартный метод сведения к системе [35], метод весовых функций [11, с.27-28], метод преобразования уравнений В.Вольтерра [1, с.194-217], метод срезывающих функций [11, с.41] и метод интегральных неравенств [33], что приведет к новым классам ИДУ (3.1).

В ИДУ (3.1) аналогично[35] сделаем следующую замену:

$$x'(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t), \quad x'(t) = -\lambda^2 x(t) + W(t)y(t), \tag{3.2}$$

где $0 < \lambda$ - некоторый вспомогательный параметр, $0 < W(t)$ - некоторая весовая функция, $y(t)$ - новая неизвестная функция.

Из (3.2) дифференцированием имеем

$$\begin{gathered} x''(t) = -\lambda^2 x'(t) + W'(t)y(t) + W(t)y'(t) = -\lambda^2[-\lambda^2 x(t) + W(t)y(t)] + \\ + W'(t)y(t) + W(t)y'(t) = \lambda^4 x(t) + [W'(t) - \lambda^2 W(t)]y(t) + W(t)y'(t). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Теперь подставляем (3.2), (3.3) в ИДУ (3.1):

$$\lambda^4 x(t)+[W'(t)-\lambda^2 W(t)]y(t)+W(t)y'(t)+a_1(t)[-\lambda^2 x(t)+W(t)y(t)]+$$
$$+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)[-\lambda^2 x(\tau)+W(\tau)y(\tau)]+$$
$$+Q_2(t,\tau)[\lambda^4 x(\tau)+(W'(\tau)-\lambda^2 W(\tau))y(\tau)+W(\tau)y'(\tau)]\}\,d\tau=f(t),\ t\ge t_0.$$

Отсюда после некоторых преобразований, аналогичных [35], получаем

$$y'(t)+b_1(t)y(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+$$
$$+K(t,\tau)y'(\tau)]d\tau=F(t),\ t\ge t_0, \tag{3.4}$$

где

$$b_1(t)\equiv a_1(t)-\lambda^2+W'(t)(W(t))^{-1},\quad b_0(t)\equiv(W(t))^{-1}[a_0(t)-\lambda^2 a_1(t)+\lambda^4],$$
$$P_0(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-\lambda^2 Q_1(t,\tau)+\lambda^4 Q_2(t,\tau)],\ P_1(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}\{Q_1(t,\tau)W(\tau)+$$
$$+Q_2(t,\tau)[W'(\tau)-\lambda^2 W(\tau)]\},\ K(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau),\ F(t)\equiv(W(t))^{-1}f(t).$$

Объединяя замену (3.2) и ИДУ (3.4), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \\ y'(t)+b_1(t)y(t)+a_0(t)x(t)+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\big[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+ \\ +K(t,\tau)y'(\tau)\big]d\tau=F(t),\quad t\ge t_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

эквивалентной заданному ИДУ второго порядка (3.1).

Пусть [11]:

$$b_1(t)=b_{11}(t)+b_{12}(t), \tag{b_1}$$

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i=1,...,n)$ - некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\big(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\big)^{-1},\ E_i(t)\equiv F_i(t)\big(\psi_i(t)\big)^{-1}\quad(i=1,...,n),$$
$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t)\quad(i=1,...,n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ (i=0,1,...,n)$ - некоторые функции.

Теперь первое уравнение системы (3.5) умножаем на $\varphi(t)x(t)$ $(0<\varphi(t)$ - некоторая весовая функция), второе - на $y'(t)$, сложим полученные соотношения, затем интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия $(b_1),(K),(F)$, функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau), E_i(t)$, условие (R), функции $c_0(t), c_i(t)$ $(i=1,...,n)$. Тогда аналогично [11] будем иметь следующее тождество:

$$\varphi(t)(x(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(x(s))^2ds+2\int_{t_0}^{t}(y'(s))^2ds+b_{11}(t)(y(t))^2-$$

$$-\int_{t_0}^{t}b_{11}'(s)(y(s))^2ds+b_{12}(t)(y(t))^2-2F_0(t)y(t)+c_0(t)-\int_{t_0}^{t}[b_{12}'(s)(y(s))^2-$$

$$-2F_0'(s)y(s)+c_0'(s)]ds+\sum_{i=1}^{n}\left\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-\int_{t_0}^{t}A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2ds+\right.$$

$$+B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+$$

$$\left.+c_i'(s)]ds+\int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2d\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2d\tau ds\right\}\equiv c_*+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}W(s)\varphi(s)x(s)y(s)ds-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}y'(s)\left\{a_0(s)x(s)+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)y(\tau)]d\tau\right\}ds, \tag{3.6}$$

где

$$\Delta(t)\equiv 2\lambda^2\varphi(t)-\varphi'(t),\quad Y_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y'(\eta)d\eta\quad (i=1,...,n),$$

$$c_*=\varphi(t_0)(x(t_0))^2+b_1(t_0)(y(t_0))^2-2F_0(t_0)y(t_0)+c_0(t_0)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

Теорема 3.1. Пусть 1) $\lambda>0, W(t)>0, \varphi(t)>0,$ выполняются условия $(b_1),(K),(F),(R);$

2) $\Delta(t) \geq 0;$

3) $b_{11}(t) \geq b_{110} > 0,$ существует функция $b_{11}^{*}(t) \in L^{1}(J, R_{+})$ такая, что $b_{11}^{'}(t) \leq b_{11}^{*}(t) b_{11}(t);$

4) $b_{12}(t) \geq 0, b_{12}^{'}(t) \leq 0,$ существует функция $c_{0}(t)$ такая, что $(F_{0}^{(k)}(t))^{2} \leq b_{12}^{(k)}(t) c_{0}^{(k)}(t)\ (k = 0,1);$

5) $A_{i}(t) \geq 0, B_{i}(t) \geq 0, B_{i}^{'}(t) \leq 0, R_{i\tau}^{'}(t,\tau) \geq 0,$ существуют функции $A_{i}^{*}(t) \in L^{1}(J, R_{+}), c_{i}(t), R_{i}^{*}(t) \in L^{1}(J, R_{+})$ такие, что $A_{i}^{'}(t) \leq A_{i}^{*}(t) A_{i}(t),$ $(E_{i}^{(k)}(t))^{2} \leq B_{i}^{(k)}(t) c_{i}^{(k)}(t) \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 0,1);$

6) $$W(t)(\varphi(t))^{\frac{1}{2}} + \left\{ |a_{0}(t)| (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t} \left[|P_{0}(t,\tau)| (\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} + |P_{1}(t,\tau)| \right] d\tau \right\}^{2} \in L^{1}(J, R_{+}\{0\}).$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3.5) справедливы следующие утверждения:

$$x(t) = (\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} 0(1), \tag{3.7}$$

$$y(t) = 0(1), \tag{3.8}$$

$$\Delta(t)(x(t))^{2} \in L^{1}(J, R_{+}), (y'(t))^{2} \in L^{1}(J, R_{+}), \tag{3.9}$$

а для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1) верны оценка (3.7) и оценка:

$$x'(t) = \left[(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} + W(t) \right] 0(1). \tag{3.10}$$

Идея доказательства теоремы такова. Введем обозначение:

$$\begin{gathered} u(t) \equiv \varphi(t)(x(t))^{2} + \int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^{2} ds + \int_{t_0}^{t} (y'(s))^{2} ds + b_{11}(t)(x(t))^{2} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[A_{i}(t)(Y_{i}(t,t_{0}))^{2} + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}^{'}(t,\tau)(Y_{i}(t,\tau))^{2} d\tau \right]. \end{gathered} \tag{3.11}$$

В силу условий 1)-3), 5) функция $u(t) \geq 0,$ а также имеем:

$$\varphi(t)(x(t))^2 \le u(t),\ \int_{t_0}^{t} \Delta(s)(x(s))^2 ds \le u(t),\ \int_{t_0}^{t} (y'(s))^2 ds \le u(t),$$
$$b_{11}(t)(x(t))^2 \le u(t),\ A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 \le u(t),\ \int_{t_0}^{t} R'_{i\tau}(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2 d\tau \le u(t). \tag{3.12}$$

Используя неравенство

$$2y'(t)\left\{a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)]d\tau\right\} \le (y'(t))^2 +$$
$$+\left\{|a_0(t)||x(t)|+\int_{t_0}^{t}[|P_0(t,\tau)||x(\tau)|+|P_1(t,\tau)||y(\tau)|]d\tau\right\}^2$$

к последнему интегралу в правой части тождества (3.6), переходим к интегральному неравенству

$$u(t) \le c_* + \int_{t_0}^{t}\left\{2W(s)(\varphi(s))^{\frac{1}{2}}(b_{11}(s))^{-\frac{1}{2}} + b_{11}^*(s) + \sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s)+R_i^*(s)]\right\}u(s)ds + \tag{3.13}$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left\{|a_0(s)|(\varphi(s))^{-\frac{1}{2}}(u(s))^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{s}\left[|P_0(s,\tau)|(\varphi(\tau))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(s,\tau)|(b_{11}(\tau))^{-\frac{1}{2}}\right](u(\tau))^{\frac{1}{2}}\right\}ds.$$

Применение к интегральному неравенству (3.13) лемму 1 из статьи [33] дает $u(t)=O(1)$, при этом учитываются условия 3) $(b_{110} \le b_{11}(t)=O(1))$, 5), 6) теоремы 3.1. Отсюда на основании соотношений (3.12) получаем все утверждения теоремы 3.1. В частности, утверждение (3.7) теоремы 3.1 вытекает из $\varphi(t)(x(t))^2 \le u(t) = O(1)$, а утверждение (3.10) - из замены (3.2) с учетом утверждений (3.7), (3.8) теоремы 3.1.

Таким образом, доказанная нами теорема 3.1 утверждает, что для любого решения и его первой производной ИДУ (3.1) справедливы оценки (3.7), (3.10) соответственно.

Замечание 3.1. Из оценок (3.7), (3.10) можно вывести следствие об ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуинтервале J, стремлении к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при $t \to \infty$ всех решений и их первых производных ИДУ (3.1) соответственно.

§ 4. Нестандартный метод сведения к системе для устойчивости и стабилизируемости линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

Под устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка понимается ограниченность на полуинтервале J (соответственно стремление к конечному пределу при $t \to \infty$) всех его решений и их первых и вторых производных.

В данной работе решается следующая.

Задача 4.1. Установить достаточные условия типа немалости членов устойчивости и стабилизуриемости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + \right.$$

$$\left. + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau = f(t), \quad t \geq t_0 \ . \tag{4.1}$$

Отметим, что такая задача и некоторые близкие к ней вопросы для других классов ИДУ вида (4.1) в [28, 36] изучена методом сравнения [11, с. 15 − 17] с решениями соответствующих ДУ, в [37] модифицированным методом весовых [38] и срезывающих функций [11, с. 41]; в [39] методом умножения уравнений на некоторую весовую функцию и методом возведения уравнений в квадрат [11, с. 28]; в [40] методом частичного срезывания [41].

Для решения поставленной задачи нами развивается метод, основанный на идеях метода сведения к системе [42], метода срезывающих функций [11, с. 1; 30], и метода интегральных неравенств [33].

Приступим к изложению предлагаемого метода и получению основных результатов.

В ИДУ (4.1) сделаем следующие замены:

$$x'(t) = W_1(t)y(t), \tag{4.2}$$

$$y'(t) = W_2(t)z(t), \tag{4.3}$$

где $0 < W_k(t)\ \ (k=1,2)$ - некоторые вспомогательные весовые функции, $y(t),\, z(t)$ - новые неизвестные функции.

Из (4.2), (4.3) дифференцированием имеем:

$$x''(t) = W_1'(t)\,y(t) + W_1(t)\,y'(t) = W_1'(t)W_2'(t)\,z(t) + W_1'(t)\,y'(t), \qquad (4.4)$$

$$\begin{aligned} x'''(t) &= W_1(t)W_2(t)z'(t) + (W_1(t)W_2(t))'z(t) + W_1''(t)\,y(t) + W_1'(t)\,y'(t) = \\ &= W_1(t)W_2(t)z'(t) + \left[W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'\right]z(t) + W_1''(t)\,y(t). \end{aligned} \qquad (4.5)$$

подставляя (4.2), (4.4), (4.5) в ИДУ (4.1), получаем

$$\begin{aligned} &W_1(t)W_2(t)z'(t) + \left[W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'\right]z(t) + W_1''(t)\,y(t) + \\ &+a_2(t)\left[W_1(t)W_2(t)z(t) + W_1'(t)\,y(t)\right] + a_1(t)W_1(t)\,y(t) + a_0(t)x(t) + \\ &+\int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)W_1(\tau)\,y(\tau) + Q_2(t,\tau)[W_1(\tau)W_2(\tau)z(\tau) + \\ &+W_1'(\tau)\,y(\tau)]\}d\tau = f(t),\ t \ge t_0\ . \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &W_1(t)W_2(t)z'(t) + \left[a_2(t)W_1(t)W_2(t) + W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'\right]z(t) + \\ &+\left[a_1(t)W_1(t) + a_2(t)W_1'(t) + W_1''(t)\right]y(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau) + \\ &+\left[Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)W_1'(\tau)\right]y(\tau) + Q_2(t,\tau)W_1(\tau)z(\tau)\}d\tau = f(t),\, t \ge t_0. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Обе части (4.6) делим на $W_1(t)W_2(t)$ и вводим следующие обозначения:

$b_2(t) \equiv a_2(t) + W_1'(t)(W_1(t))' + (W_1'(t)W_2(t))'(W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $z(t)$),

$b_1(t) \equiv a_1(t) + (W_2(t))^{-1} + a_2(t)W_1'(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1} + W_1''(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$

(коэффициент $y(t)$),

$b_0(t) \equiv a_0(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,\tau) \equiv \left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1} Q_0(t,\tau)$ (коэффициент $x(\tau)$),

$P_1(t,\tau) \equiv \left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1} \left[Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)W_1'(\tau)\right]$ (коэффициент $y(\tau)$),

$K(t,\tau) \equiv \left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1} Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)$ (коэффициент $z(\tau)$),

$F(t,) \equiv f(t)\left(W_1(t)W_2(t)\right)^{-1}$.

Тогда для неизвестной $z(t)$ будем иметь следующее ИДУ первого порядка:

$$z'(t) + b_2(t)z(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x'(t) + \int_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + \right. \tag{4.7}$$
$$\left. + K(t,\tau)z(\tau)\right]d\tau = F(t),\ t \ge t_0.$$

Объединяя (4.2) , (4.3) с ИДУ (4.7), из ИДУ третьего порядка (4.1) к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t) = W_1(t)y(t), \\ y'(t) = W_2(t)z(t), \\ z'(t) + b_2(t)z(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x'(t) + \int_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + \right. \\ \left. + K(t,\tau)z(\tau)\right]d\tau = F(t),\ t \ge t_0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Система (4.8) состоит из трех уравнений первого порядка: из ДУ первого порядка (4.2), (4.3) для $x(t)$, $y(t)$ и ИДУ первого порядка типа Вольтера (4.7). В получении системы (4.8) и состоит суть предлагаемого нестандартного метода сведения к системе для ИДУ (4.1).

Система (4.8) называется нестандартно сведенной и из нее при $W_1(t) \equiv W_2(t) \equiv 1$ получается стандартно (классически) сведенная система:

$$
\begin{cases}
x'(t) = y(t), \\
y'(t) = z(t), \\
z'(t) + b_2(t)z(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x'(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \big[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) + \\
+ K(t,\tau)z(\tau) \big] d\tau = F(t),\ t \ge t_0 .
\end{cases} \tag{4.9}
$$

Метод получения системы (4.9) из ИДУ (4.1) будем называть стандартным методом сведения к системе и ее содержание изложено для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка ($n \ge 2$) во многих классических учебниках, например, в [43, с. 205].

Анализ известных качественных методов и их результаты показывает, что исследование асимптотических свойств (АС): ограниченности, устойчивости, стремления к нулю при $t \to \infty$ и т.д. решений и их первых и вторых производных системы (4.8) значительно проще, чем исследование – исходного ИДУ третьего порядка (4.1), что достигается за счет введения весовых функций $W_k(t)\ (k = 1,2)$. Исследование АС решений системы (4.9) представляется очень затруднительным, почти невозможным.

Введенные обозначения $b_k(t)\ (k = 0,1,2)$ показывают, что от коэффициентов $a_k(t)\ (k = 0,1,2)$ не требуется непрерывная дифференцируемость на J.

Теперь аналогично [1, с.194-217] умножая ДУ системы (4.8) на $x(t)$, второе - на $y(t)$, третье ИДУ на $z(t)$, суммируя полученные соотношения и интегрируя в пределах от t до t_0, получаем следующее тождество:

$$
\big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2 + 2\int\limits_{t_0}^{t} b_2(s)\big(z(s)\big)^2 ds + 2\int\limits_{t_0}^{t} z(s)\big\{ b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) +
$$

$$
+ \int\limits_{t_0}^{s} [P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)y(\tau) + K(s,\tau)z(\tau)] d\tau \} ds \equiv c_* +
$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[W_1(s)x(s)+y(s)+W_2(s)y(s)z(s)+F(s)z(s)]ds, \qquad (4.10)$$

где $c_* = \left(x(t_0)\right)^2 + \left(y(t_0)\right)^2 + \left(Z(t_0)\right)^2$.

Введем обозначение: $Y_1(t) \equiv \left(x(t_0)\right)^2 + \left(y(t_0)\right)^2 + \left(Z(t_0)\right)^2 \geq 0$.

С учетом этого обозначения из тождества (4.10) интегральному неравенству

$$V_1(t) \leq c_* + \int_{t_0}^{t}[g(s)V_1(t) + 2\left|F(s)\right|(V_1(t))^{\frac{1}{2}} + \int_{t_0}^{t}[G(s,\tau)V_1(t)d\tau]d\tau]ds, \qquad (4.11)$$

где

$$g(s) \equiv 2\sum_{k=0}^{2}\left|b_k(t)\right| + 2[W_1(t)+W_2(t)], \;\; G(t,\tau) \equiv 2[\left|P_0(t,\tau)\right| + \left|P_1(t,\tau)\right| + \left|K(t,\tau)\right|.$$

Применяя к интегральному неравенству (4.11) лемму 1 [33], имеем оценку:

$$V_1(t) \leq \{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{t}\left|F(s)\right|ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{s}[g(s) + \int_{t_0}^{s}G(s,\tau)]d\tau]ds) \equiv E(t,c_*). \qquad (4.12)$$

Теорема 4.1. Пусть 1) существуют функции $W_k(t) > 0$ $(k=1,2)$ такие, что выполняются следующие условия:

$$\int_{t_0}^{\infty}[W_j(t) + \left|b_k(t)\right| + \int_{t_0}^{t}\left|P_r(t,\tau)\right|d\tau]dt < \infty \;\; (j=1,2;\, k=0,1,2;\, r=0,1), \qquad C_1$$

$$\int_{t_0}^{\infty}[F(t) + \int_{t_0}^{\infty}[\left|K(t,\tau)\right|d\tau < \infty; \qquad C_2$$

2) функции $W_k(t) > 0$ $(k=1,2)$ $W_1'(t)$ ограничены на полуинтервале *J*. Тогда любое решение $x(t)$ ИДУ (4.1) устойчиво.

Утверждение теоремы 4.1 следует из оценки (4.12) и из (4.2), (4.3) в силу условий 1), 2). В этом случае $E\left(t,c_*\right)\le E\left(\infty,c_*\right)<\infty$.

В условиях теоремы 4.1 функции $b_k\left(t\right)$, $P_r\left(t,\tau\right)$ $(k=0,1,2;\ r=0,1)$, $F\left(t\right),K\left(t,\tau\right)$ - интегрально малы, что следует из (C_1), (C_2).

Ниже рассмотрим случай, когда эти функции могут быть немалыми.

Пусть [11]:

$$K\left(t,\tau\right)=\sum_{i=1}^{n}K_i\left(t,\tau\right)+K_0\left(t,\tau\right), \qquad (K)$$

$$F\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}F_i\left(t\right)+F_0\left(t\right), \qquad (F)$$

$\psi_i\left(t\right)$ $\left(i=1...n\right)$ - некоторые срезывающие функции,

$$R_i\left(t,\tau\right)\equiv K_i\left(t,\tau\right)\left(\psi_i\left(t\right)\psi_i\left(\tau\right)\right)^{-1},\quad E_i\left(t\right)\equiv F_i\left(t\right)\left(\psi_i\left(t\right)\right)^{-1}\qquad \left(i=1...n\right),$$

$$R_i\left(t,t_0\right)=A_i\left(t\right)+B_i\left(t\right)\qquad \left(i=1...n\right), \qquad (R)$$

$c_i\left(t\right)$ $\left(i=1...n\right)$ - некоторые функции.

$$K_0\left(t,\tau\right)=K_{01}\left(t,\tau\right)K_{02}\left(t,\tau\right)+K_{03}\left(t,\tau\right) \qquad \left(K_0\right)$$

$$F_0\left(t\right)=F_{01}\left(t\right)F_{02}\left(t\right)+F_{03}\left(t\right), \qquad \left(F_0\right)$$

$$b_k\left(t\right)=b_{k1}\left(t\right)b_{k2}\left(t\right)+b_{k3}\left(t\right)\qquad \left(k=0,1\right), \qquad \left(b_k\right)$$

$$P_k\left(t,\tau\right)=P_{k1}\left(t,\tau\right)P_{k2}\left(t,\tau\right)+P_{k3}\left(t,\tau\right)\qquad \left(k=0,1\right), \qquad \left(P_k\right)$$

Введем обозначения:

$$\varDelta\left(t\right)\equiv 2b_2\left(t\right)-\left(F_{02}\left(t\right)\right)^2-\left(b_{12}\left(t\right)\right)^2-\int_{t_0}^{t}[\left(P_{02}\left(t,\tau\right)\right)^2+$$

$$+\left(P_{12}\left(t,\tau\right)\right)^2+\left(K_{02}\left(t,\tau\right)\right)^2]d\tau,\ \ Z\left(t,\tau\right)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i\left(s\right)Z\left(s\right)ds\qquad \left(i=1...n\right),$$

Учитывая условия *(K), (F), (b_k), (P_k), (R)*, применяя к двойному интегралу с $K(t,\tau)$ и интегралу с $F(t)$ леммы 1.4,1.5 [42], а к интегралам с $K_{01}(t,\tau)K_{02}(t,\tau)$, $F_{01}(t)F_{02}(t)$, $b_{k1}(t)b_{k2}(t)$, $P_{k1}(t,\tau)P_{k2}(t,\tau)$ $(k=0,1,2,3)$ известное неравенство $2\alpha\beta\le\alpha^2+\beta^2$, после некоторых простейших выкладок, из тождества (4.8) будем иметь следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\left(x'(t)\right)^2+\lambda^2\left(x(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\mu^2\left(y(t)\right)^2+\left(u(t)\right)^2+\int_{t_0}^{t}\varDelta(s)\left(u(s)\right)^2ds+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\{M_i(t)\left(U_i(t,t_0)\right)^2+T_i(t)\left(U_i(t,t_0)\right)^2-2E_i(t)U(t,t_0)+c_i(t)-\\
&-\int_{t_0}^{t}\left[T'(s)\left(U_i(s,t_0)\right)^2-2E_i'U_i(s,t_0)+c_i'(s)\right]ds+\int_{t_0}^{s}R_{i\tau}{}'(t,\tau)\left(U_i(t,\tau)\right)^2\}d\tau\le\\
&\le c_*+\int_{t_0}^{t}\left(F_{01}(s)\right)^2ds+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left[M_i'(s)\left(U_i(s,t_0)\right)^2+\right.\\
&\left.+\int_{t_0}^{s}R_{is\tau}{}''(s,\tau)\left(U_i(s,t_0)\right)^2d\tau\right]ds+2\int_{t_0}^{t}\left[W_1(s)y(s)x'(s)+W_2(s)u(s)y'(s)\right]ds+\\
&+\int_{t_0}^{t}\{\left(b_{01}(s)\right)^2\left(x(s)\right)^2+2b_{03}(s)u(s)x(s)+\left(b_{11}(s)\right)^2\left(x'(s)\right)^2+2b_{13}(s)u(s)x'(s)+\\
&+\left(b_{21}(s)\right)^2\left(y(s)\right)^2+2b_{23}(s)u(s)y(s)+\left(b_{31}(s)\right)^2\left(y'(s)\right)^2+2b_{33}(s)u(s)y(s)+\\
&+\int_{t_0}^{s}\left[\left(P_{01}(s,\tau)\right)^2\left(x(\tau)\right)^2+2P_{03}(s,\tau)u(s)x(\tau)+\left(P_{11}(s,\tau)\right)^2\left(x'(\tau)\right)^2+\right.\\
&+2P_{13}(s,\tau)u(s)x'(\tau)+\left(P_{21}(s,\tau)\right)^2\left(y(\tau)\right)^2+2P_{23}(s,\tau)u(s)y(\tau)+\\
&\left.+\left(P_{31}(s,\tau)\right)^2\left(y'(\tau)\right)^2+2P_{33}(s,\tau)u(s)y(\tau)\right]d\tau\}ds,
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

где $\varDelta(t)\equiv 2b_4(t)-\left(F_{02}(t)\right)^2-\left(b_{02}(t)\right)^2-\left(b_{12}(t)\right)^2-\left(b_{22}(t)\right)^2-\left(b_{32}(t)\right)^2-$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[\left(P_{02}(t,\tau)\right)^2+\left(P_{12}(t,\tau)\right)^2+\left(P_{22}(t,\tau)\right)^2+\left(P_{32}(t,\tau)\right)^2\right]d\tau,$$

$$U_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)u(\eta)d\eta\quad(i=1...n),\quad c_*=c+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

Исходя из неравенства (4.13), аналогично теоремам 1.1, 2.1 [11] доказывается

Теорема 4.2. Пусть 1) $\lambda, \mu \in R,\ \lambda, \mu \neq 0,\ W_k(t) > 0\ (k = 1,2),$ выполняются условия $(K), (F), (b_k), (R);$ 2) $\Delta(t) \geq 0;$ 3) $M_i(t) \geq 0, \quad T_i(t) \geq 0, T_i'(t) \leq 0, R_{i\tau}'(t) \geq 0,$ существуют функции такие, что $M_i^*(t) \in L^1(J, R_+), c_i(t),\ R_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такие, что:

$$M_i'(t) \leq M_i^*(t) M_i(t),\ (E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t)\ (i = 1..n;\ k = 0,1)$$
$$R_{it\tau}''(t,\tau) \leq R_i^*(t) R_{i\tau}'(t,\tau),\ 4)\ (F_{01}(t))^2 + W_j(t) + (b_{k1}(t))^2 + |b_{k3}(t)| +$$

$$+\int_{t_0}^{t} [(P_{k1}(t,\tau))^2 + |P_{k3}(t,\tau)|] d\tau \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})\ (j = 1,2; k = 0,1,2,3).$$

Тогда для любого решения $(x(t)), (y(t)), (u(t))$ системы (4.7) $x^{(k)}(t), y^{(k)}(t),\ u(t)\ (k = 0,1)$ ограничены на полуинтервале J.

Пусть, кроме того,

5) функции $W_1^{(k)}(t)\ (k = 0,1), W_2(t)$ ограничены на J. Тогда все решения $x(t)$ и их $x_1^{(k)}(t)\ (k = 1,2,3,4)$ ИДУ (4.1) ограничены на J, т.е. все решения ИДУ (4.1) устойчивы.

Замечание 4.1. Можно накладывать условие:
$W_2(t) = W_{21}(t) W_{22}(t) + W_{23}(t)$,

где $(W_{21}(t))^2 + |W_{23}(t)| \in L^1(J, R_+)$. Тогда условие 2) теоремы 4.2: $\Delta(t) \geq 0$ заменится на условие $\Delta_1(t) \equiv \Delta(t) - (W_{22}(t))^2 \geq 0$.

Замечание 4.2. Вбирая конкретно вспомогательные постоянные λ, μ и весовые функции $W_k(t)\ (k = 1,2)$, а также некоторые срезывающие функции

$\psi_k(t)$ $(k=1..n)$ и функции $c_i(t)$, можно из данной теоремы получить коэффициенты признаки устойчивости решений ИДУ (4.1).

Пример 4.1. ИДУ (1) пятого порядка.

$$x^{(5)}(t)+\left[5e^t+\sqrt[3]{\sin t}+\frac{6}{t+1}\right]x^{(4)}(t)+\left[\frac{20e^t}{t+1}+\sqrt[5]{\cos t}\right]x''(t)+$$

$$+\left[10e^t+\left(1+\frac{1}{(t+1)^2}\right)+\sqrt[9]{\cos 5t}\right]x(t)+\int_0^t\left[\left(1+\frac{2}{(\tau+1)^2}\right)x(\tau)+\frac{4}{\tau+1}x'(\tau)+\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{(\tau+1)^2}\right)x''(\tau)+\frac{4}{\tau+1}x'''(\tau)+x^{(4)}(\tau)\right](t+1)^{-2}\left(\frac{et^2+\tau^2}{t-\tau+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt[3]{\cos 4t}\ \sqrt[3]{\cos 4\tau}\ (t+1)^3(\tau+1)^3\ (t-\tau+1)}{t-\tau+2}\right)(\tau+1)^{-2}\,d\tau=$$

$$=\frac{et^2}{t+2}+(t+1)^3\ \sqrt[3]{\cos 4t},\quad t\ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2 с учетом замечания 4.1 при

$W_1(t)=(t+1)^{-2}$, $W_2(t)\equiv 1$, $\lambda=\mu=1$, здесь $b_4(t)=5e^t+\sqrt[3]{\sin t}$,

$$b_3(t)\equiv\sqrt[5]{\cos t}-2-\frac{6}{(t+1)^2}-\frac{4\cdot\sqrt[3]{\sin t}}{t+1},\ b_2(t)\equiv\frac{8}{t+1}-\frac{24}{(t+1)^3}-\frac{2\cdot\sqrt[5]{\cos t}}{t+1}+$$

$$+2\left[\frac{3}{(t+1)^2}-1\right]\left(\sqrt[3]{\sin t}+\frac{6}{t+1}+\sqrt[7]{\sin 3t}\right),\quad b_1(t)\equiv 0,\ b_0(t)\equiv(t+1)^2\left[\sqrt[9]{\cos t}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[3]{\sin t}+\frac{6}{t+1}\right],\quad F(t)\equiv\frac{et^2}{t+2}+\sqrt[3]{\sin t}\,(t+2)^3,\ P_k(t,\tau)=0\ \ (k=0,1,2,3),$$

$$K(t,\tau)\equiv\frac{et^2+\tau^2}{t-\tau+1}+\frac{\sqrt[3]{\cos 4t\cos 4\tau}\,(t+1)^3(\tau+1)^3(t-\tau+1)}{t-\tau+2},$$

$b_{k2}(t)\equiv e^{\frac{t}{2}}$, $b_{k1}(t)\equiv b_k(t)^{\frac{t}{2}}$, $b_{k3}(t)\equiv 0$ $(k=0,1,2,3)$,

$F_{01}(t)\equiv F_{02}(t)\equiv F_{03}(t)\equiv 0$, $\Delta(t)\equiv 6e^t+\sqrt[3]{\sin t}$, $n=2$, $\psi_1(t)\equiv et^2$,

$\psi_2(t)\equiv\sqrt[3]{\cos 4t}\,(t+1)^3$, $R_1(t,\tau)\equiv(t-\tau+1)^{-1}$, $R_2(t,\tau)\equiv\dfrac{t-\tau+1}{t-\tau+2}$,

$E_2(t) \equiv -\dfrac{1}{t+2},\ E_2(t) \equiv 1,\ M_1(t) \equiv 0, T_1(t) \equiv -\dfrac{1}{t+1}, c_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+1},$

$M_2(t) \equiv \dfrac{t+1}{t+2} - \dfrac{1}{4}, M_2^*(t) = 4(t+2)^{-1}(3t+2)^{-1}, T_2(t) \equiv \dfrac{1}{4},$

$c_2 \equiv 4,\quad W_2(t) \equiv 1 = e^{\frac{t}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}},\quad W_{21}(t) \equiv e^{-\frac{t}{2}},\quad W_{22}(t) \equiv e^{\frac{t}{2}},\quad W_{23}(t,\tau)$ (учет замечания 4.1), $\Delta_1(t) \equiv \Delta(t) - e^t = 5e^t + \sqrt[3]{\sin t}$. Значит, все решения и их производные до четвертого порядка данного ИДУ пятого порядка ограничены на $R_+ = [0,\infty)$, т.е. все его решения устойчивы.

Как показывает этот пример 4.1, может быть функция $W_2(t) \equiv 1$.

Замечание 4.3. Все известные функции ИДУ (4.1) могут быть негладкими на полуинтервале J, что подтверждается приведенным выше иллюстративным примером.

§ 5. Об одном методе исследования асимптотических свойств решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

Целью настоящего § является развитие метода частичного срезывания из [44, 42] для исследования асимптотических свойств решений ИДУ третьего порядка в сочетании с нестандартным методом сведения к системе из [45, 46].

Здесь продолжаются исследования работ [44, 42,45, 46, 40, 47] по асимптотическим свойствам (оценка, ограниченность и степенная абсолютная интегрируемость на J, стремление к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону) решений и их первых и вторых производных линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right] d\tau = f(t),\ t \ge t_0\,, \tag{5.1}$$

и в ней предлагается новый метод, основанный на последовательном развитии метода нестандартного сведения к системе [45, 35, 40], метода преобразования уравнений [1, с. 194–217], метода срезывающих функций [11, с. 41] и метода вариации произвольных постоянных Лагранжа [43, с. 490–493]. Этот метод позволяет получить новые оценки на полуинтервале J для любого решения $x(t)$ и их $x^{(k)}(t)$ $(k=1,2)$ ИДУ (5.1). Из этих оценок формулируются новые следствия об асимптотических свойствах $x^{(k)}(t)$ $(k=0,1,2)$ ИДУ (5.1). Поскольку такое сочетание четырех перечисленных выше методов для исследования свойств $x^{(k)}(t)$ $(k=0,1,2)$ ИДУ (5.1) используется впервые, то это позволит расширить классы ранее исследованных ИДУ третьего порядка вида (5.1) и в перспективе, предлагаемый здесь метод, можно развивать для изучения асимптотических свойств решений и их производных новых классов ИДУ типа Вольтерра высших порядков, в том числе третьего порядка.

Сначала поступаем аналогично как в [45, 35, 40]. В ИДУ (5.1) сделаем замену $x(t)$ следующим образом:

$$x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t),\ x'(t)=-\lambda^2 x(t)+W(t)y(t), \tag{5.2}$$

где $0\neq\lambda$ - некоторый вспомогательный параметр, причем $\lambda\in R,\ 0<W(t)$ - некоторая вспомогательная весовая функция; $y(t)$ - новая неизвестная функция. Тогда как в [40] ИДУ (5.1) сводится к следующей системе из ДУ (5.2) первого порядка для неизвестной $x(t)$ и из ИДУ второго порядка для неизвестной $y(t)$:

$$\begin{cases} x'(t)+\lambda^2 x(t)=W(t)y(t), \\ y''(t)+b_2(t)y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+ \\ +\int\limits_{t_0}^{t}\left[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau=F(t),t\geq t_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

где

$$b_2(t) \equiv a_2(t) + 2W'(t)\left(W(t)\right)^{-1} - \lambda^2,\, b_1(t) \equiv a_1(t) - \lambda^2 a_2(t) + \lambda^4 +$$

$$+a_2(t)W'(t)\left(W(t)\right)^{-1} + \left[W'(t) - \lambda^2 W(t)\right]'\left(W(t)\right)^{-1},$$

$$b_0(t) \equiv \left(W(t)\right)^{-1}\left[a_0(t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4 a_2(t) - \lambda^6\right],$$

$$P_0(t,\tau) \equiv \left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_0(t,\tau) - \lambda^2 Q_1(t,\tau) + \lambda^4 Q_2(t,\tau)\right],$$

$$P_1(t,\tau) \equiv \left(W(t)\right)^{-1}\left[Q_1(t,\tau)W(\tau) + Q_2(t,\tau)\left(W'(\tau) - \lambda^2 W(\tau)\right)\right],$$

$$K(t,\tau) \equiv \left(W(t)\right)^{-1} Q_2(t,\tau)W(\tau),\; F(t) \equiv \left(W(t)\right)^{-1} f(t).$$

Как отмечено в [45, 40] система ИДУ (5.3) эквивалентна ИДУ (5.1).

Введем предположения и обозначения, аналогичные [11]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$ - некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, E_i(t) \equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1},$$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t)\;\; (i = 1...n), \tag{R}$$

$c_i(t)$ $(i = 1...n)$ - некоторые функции.

Первое уравнение (ДУ первого порядка) системы (5.3) умножаем на $x(t)$, а второе (ИДУ второго порядка) - на $y'(t)$ [1, с. 194-217], сложим полученные соотношения, после чего интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом учитываем условия *(K), (F),* функции $R_i(t,\tau), E_i(t)$, условие *(R)*, применим леммы 1.4, 1.5 [30], и после некоторых преобразований получаем следующее тождество:

$$\left(x(t)\right)^2 + 2\lambda^2\int_{t_0}^{t}\left(x(s)\right)^2 ds + \left(y'(t)\right)^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_2(s)\left(y'(s)\right)^2 ds +$$

$$+b_1(t)\left(y(t)\right)^2 - \int_{t_0}^{t} b_1'(s)\left(y(s)\right)^2 ds + 2\int_{t_0}^{t} b_0(s)x(s)y'(s)ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} y'(s)\int_{t_0}^{s}\left[P_0(s,\tau)x(\tau)+P_1(s,\tau)y(\tau)\right]d\tau+\sum_{i=1}^{n}\Big[A_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2-$$

$$-\int_{t_0}^{t} A_i'(s)\big(X_i(s,t_0)\big)^2 ds+B_i(t)\big(X_i(t,t_0)\big)^2-2E_i(t)X_i(t,t_0)+c_i(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)\big(X_i(s,t_0)\big)^2-2E_i'(s)X_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds+\int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)\big(X_i(t,\tau)\big)^2 d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)\big(X_i(s,\tau)\big)^2 d\tau ds\}\equiv c_*+2\int_{t_0}^{t}[W(s)y(s)x(s)+2F_0(s)y'(s)-$$

$$-2\int_{t_0}^{s} K_0(s,\tau)y'(\tau)y'(s)d\tau]\,ds, \qquad (5.4)$$

где

$$X_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(s)y'(s)ds \quad (i=1...n),$$

$$c_*=(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+b_1(t_0)(y(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

Переходя от тождества (5.4), к интегральному неравенству, аналогично теореме 2.1 из [11, с. 85], доказывается

Теорема 5.1. Пусть 1) $0\neq\lambda\in R, W(t)>0$; выполняются условия *(K)*, *(F)*, *(R);* 2) $b_2(t)\geq 0$; 3) $b_1(t)\geq b_{10}>0$, $|b_1'(t)|(b_1(t))^{-1}\in L^1(J,R_+)$;

4) $|b_0(t)|+\int_{t_0}^{t}[|P_0(t,\tau)|++|P_i(t,\tau)|(b_1(\tau))^{-\frac{1}{2}}]d\tau+W(t)+|F_0(t)|+$

$+\int_{t_0}^{t}|K_0(t,\tau)|d\tau\in L^1(J,R_+\setminus\{0\});$ 5) $A_i(t)\geq 0,\ B_i(t)\geq 0,\ B_i'(t)\leq 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0,$

существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+), c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что

$A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\ \left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{it\tau}''(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$

$(i = 1..n;\ k = 0,1)$. Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (5.3) функции $x(t),\quad y^{(k)}(t) \quad (k = 0, 1)$ ограничены на полуинтервале J и справедливы соотношения:

$$x(t) \in L^2(J, R), \tag{5.5}$$

$$b_2(t)(y'(t))^2 \in L^1(J, R_+), \tag{5.6}$$

$$A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 = O(1). \tag{5.7}$$

Для установления достаточных условий наличия асимптотических свойств решений и их первых и вторых производных ИДУ (5.1) к первому уравнению (линейному неоднородному ДУ первого порядка) системы (5.3) применим метод вариации произвольных постоянных Лагранжа. Тогда получаем:

$$x(t) = e^{-\lambda^2(t-t_0)}[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(s)y(s)ds], \qquad t \ge t_0. \tag{5.8}$$

Из (5.8) в силу условия $W(t) \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$ и утверждения $y(t) = O(1)$ следует, что $x(t) = e^{-\lambda^2(t-t_0)}O(1)$. (5.9)

Далее из (5.2) вытекает:

$$|x'(t)| \le \lambda^2 |x(t)| + W(t)O(1).$$

Отсюда получаем, что

$$x'(t) = [e^{-\lambda^2(t-t_0)} + W(t)]O(1). \tag{5.10}$$

Из (5.2) имеем $x''(t) = -\lambda^2 x'(t) + W(t)y'(t) + W'(t)y(t)$.

Так как $y^{(k)}(t) = O(1)\ (k = 0,1)$, то учитывая (5.10), отсюда получаем, что

$$x''(t) = [e^{-\lambda^2(t-t_0)} + W(t) + |W'(t)|]O(1). \tag{5.11}$$

Таким образом, справедливо

Следствие 5.1. Если выполняются все условия теоремы 5.1, то для любого решения и его первой и второй производных ИДУ третьего порядка (5.1) справедливы оценки (5.9), (5.10), (5.11) соответственно.

Из оценок (5.9), (5.10), (5.11) вытекает

Следствие 5.2. Если 1) выполняются все условия теоремы 5.1; 2) верны условия: $a)\ W(t)=O(1);\ b)\ W^{(k)}(t)=O(1)\ \ (k=0,1);\ c)\ W(t)\to 0,\ t\to\infty;$

$d)\ W^{(k)}(t)\to 0,\ \ t\to\infty\ \ \ (k=0,1);\ e)\ W(t)=e^{-\mu t}O(1)\ \ \ (\mu>0);\ f)\ W^{(k)}(t)=$
$=e^{-\mu_k t}O(1)\ \ (\mu_k>0;\ k=0,1);\ \ \ l)\ \ W(t)\in L^P(J,R)\ (p>0);\ m)\ W^{(k)}(t)\in L^{P_k}(J,R)$
$(p_k>0;\ \ \ k=0,1);\ \ \ r)\ W^{(k)}(t)=(t+\delta_1)^{-\delta_2}O(1)\ (t_0=0;\delta_1,\delta_2>0;\ k=0,1)$,

то для любого решения $x(t)$ ИДУ (5.1) справедливы следующие утверждения:

$a)\ \ x^{(k)}(t)=O(1)\ (k=0,1);\ b)\ \ x^{(k)}(t)=O(1)\ \ (k=0,1,2);$

$c)\ x^{(k)}(t)\to 0,\ t\to\infty\ \ \ (k=0,1);\ d)\ x^{(k)}(t)\to 0,\ \ t\to\infty\ \ \ (k=0,1,2);$

$e)\ x^{(k)}(t)=e^{-\alpha t}O(1),$ где $\alpha=min(\lambda^2,\mu),\ \ (k=0,1);\ \ \ f)\ x^{(k)}(t)=e^{-\beta t}O(1),$

где $\beta=min(\lambda^2,\mu_1,\ \mu_2),\ \ (k=0,1,2);\ \ \ l)\ x^{(k)}(t)=L^{P_k}(J,R)(p>0)(k=0,1);$

$m)\ \ x^{(j)}(t)=L^{P_k}(J,R)(p_k>0)(j=0,1,2;\ \ \ k=0,1);$
$r)\ \ x^{(k)}(t)=(t+\delta_1)^{-\delta_2}O(1)(t_0=0;\delta_1,\delta_2>0)$.

Замечание 5.1. Используя утверждения (5.5), (5.6), (4.7), можно получить дополнительные асимптотические свойства для решения и их первых и вторых производных ИДУ (5.1).

Замечание 5.2. Исходя из тождества (5.4), аналогично теореме 5.1 можно установить следующую теорему.

Теорема 5.2. Пусть 1) выполняются условия 1) – 3) теоремы 5.1;
2) $A_i(t)\ge 0,\ B_i(t)\ge 0,\ B_i'(t)\le 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0,$ существуют функции:

$A_i^*(t)\ge 0,\ c_i(t)\ge 0,\ R_i'(t)\ge 0$ такие, что $A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t),\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le$

$\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{it\tau}''(t)\le R_i^*(t)R_{it}'(t,\tau)\ \ (i=1..n;\ k=0,1);\ W(t)\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$.

Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t))$ системы (5.3) справедливы оценки:

$$\left|x(t)\right| \le e^{-\lambda^2(t-t_0)}[1+\int_{t_0}^{t} W(s)\left|y(s)\right|ds], \tag{5.12}$$

$$y^{(k)}(t) = V(t)O(1) \quad (k=0,1), \tag{5.13}$$

где

$$V(t) \equiv [1+\int_{t_0}^{t} F_0(s)ds]\, exp(\int_{t_0}^{t}\{\left|b_0(s)\right| + \int_{t_0}^{s}[P_0(s,\tau)| + \left|P_1(s,\tau)\right|(b_1(\tau))^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+\left|K_0(s,\tau)\right|]d\tau + \sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s)+R_i^*(s)]\}ds).$$

Используя оценки (5.12), (5.13), замену (5.2) можно установить аналоги следствий 5.1, 5.2.

Замечание 5.3. Подбирая конкретно вспомогательные λ и $W(t)$ из теорем 5.1, 5.2 и следствий 5.1, 5.2 можно получить коэффициентные признаки наличия асимптотических свойств решений и их первых и вторых производных ИДУ (1). Например, может быть $\lambda = 1$, $W(t) = e^{-t}$.

Отметим, что в теоремах 5.1, 5.2 есть условие $b_1(t) \ge b_{10} > 0$, т.е.

$$\inf_{t \ge t_0} b_1(t) = b_{10} > 0. \tag{b_1}$$

Представляет теоретический интерес исследование случая нарушения условия (b_1), т.е. при $b_{10} = 0$ или $b_{10} < 0$ или $b_1(t) \le 0$.

Таким образом, ставится следующая

Задача 5.2. Исследовать асимптотические свойства решений и их первых и вторых производных линейного или слабо нелинейного вольтеррова ИДУ третьего порядка вида (5.1) в случае нарушения условия (b_1).

§ 6. Об экспоненциальной устойчивости линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка

Даная работа продолжает исследования, начатые в [47].

Определение 6.1. Если для любого решения $x(t)$ ИДУ третьего порядка:

$$x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau=f(t),\ t\ge t_0. \quad (6.1)$$

найдутся постоянные $0<A_k,\ 0<\lambda_k\quad (k=0,1,2)$ такие, что

$$x^{(k)}=O(1)e^{-\lambda_k t}\quad (k=0,1,2),$$

то такое ИДУ называется экспоненциально устойчивым.

Задача 6.1. Установить достаточное условия экспоненциальной устойчивости ИДУ (6.1).

Для решения этой задачи в ИДУ (6.1) делается следующая нестандартная замена:

$$x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \quad (6.2)$$

где p,q - некоторые вспомогательные параметры, причем $p\ge 0,\ q>0$;

$0<W(t)$ - некоторая вспомогательная весовая функция; $y(t)$ - новая неизвестная функция, что сводит ИДУ (6.1) к эквивалентной системе [47]. К полученной системе развиваются метод преобразования уравнений [11, с. 25-28] к ДУ (6.2) для $x(t)$ и метод срезывающих функций [11, с. 41] к ИДУ для $y(t)$ системы, полученной в [47]. Затем применяется метод вариации произвольных постоянных Лагранжа [28, 36; 43, с. 391–394] к ДУ второго порядка (6.2).к замене (6.2)

Заметим, что вопрос об экспоненциальной устойчивости ИДУ вида (6.1) другими методами и при других условиях ранее изучен в работах [36, 37,30,42].

Отметим, что в [47] заменой (6.2) ИДУ (6.1) сведена к следующей системе:

$$\begin{cases} x''(t)+px'(t)+qx(t)=W(t)y(t), \\ y'(t)+b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+ \\ +P_1(t,\tau)x'(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)]d\tau=F(t),\, t\ge t_0, \end{cases} \tag{6.3}$$

где

$b_2(t)\equiv a_2(t)-p+W'(t)(W(t))^{-1}, \quad b_1(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_1(t)-pa_2(t)+p^2-q],$
$b_0(t)\equiv (W(t))^{-1}[a_0(t)-qa_2(t)+pq], \quad P_0(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-qQ_2(t,\tau)],$
$P_1(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)-pQ_2(t,\tau)],\ K(t,\tau)\equiv (W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau), \quad F(t)\equiv$
$\equiv (W(t))^{-1}f(t).$

Введем предположения и обозначения [47]:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)+K_0(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}F_i(t)+F_0(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)\ \ (i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1},$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t) \quad (i=1..n), \tag{R}$$

$c_i(t)\ (i=1..n)$ - некоторые функции.

Умножением первого уравнения системы (3) на $x'(t)$, второго - на $y(t)$, сложением полученных соотношений, затем интегрированием в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, введением условий $(K),(F),(R)$, функций $R_i(t,\tau),E_i(t),c_i(t)\ (i=1..n)$, использованием лемм 1.4, 1.5 [30] и аналогично теореме [40] доказана

Теорема 6.1 [47]. Пусть 1) $p\ge 0, q>0,\ W(t)>0$, выполняются условия $(K),(F),(R)$; 2) $b_2(t)\ge 0$; 3) $A_i(t)\ge 0,\ B_i(t)\ge 0,\ B_i'(t)\le 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\ge 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+), c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что
$A_i'(t)\le A_i^*(t)A_i(t),\ \ \left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{it\tau}''(t,\tau)\le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$
$(i=1..n;\ k=0,1);$ 4) $W(t)+|F_0(t)|+|b_k(t)|+$
$+\int\limits_{t_0}^{t}\left[|P_k(t,\tau)|+|K_0(t,\tau)|\right]d\tau\in L^1(J,R_+\setminus\{0\}) \quad (k=0,1).$

Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t))$ системы (6.3) справедливы утверждения:

$x^{(k)}(t) = O(1) \quad (k = 0,1)$,

$x'(t) \in L^1(J,R)$,

$b_2(t)(y(t))^2 \in L^1(J,R_+)$,

$A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 = O(1) \quad (i = 1..n)$.

Пусть, кроме того,

5) $W(t) = O(1)$.

Тогда $x^{(k)}(t) = O(1)(k = 0,1,2)$, т.е. любое решение ИДУ (6.1) устойчиво.

Теорема 6.2. Пусть 1) выполняются все условия теоремы 6.1; 2) $p > 0$, $W(t) = O(1)e^{-pt}$. Тогда ИДУ (6.1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Общее решение $x(t)$ ДУ (6.2) по методу вариации произвольных постоянных Лагранжа [28, 36; 43, с. 391–394] представимо в виде:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \int_{t_0}^{t} \frac{[e^{\lambda_2 t} e^{\lambda_1 s} - e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 s}] W(s) y(s)}{v(s)}\, ds, \tag{6.4}$$

где c_1, c_2 - постоянные, зависящие от произвольных начальных данных

$$x(t_0),\ x'(t_0);\ \lambda_1 = -\frac{1}{2}[p + \Delta],\ \lambda_2 = \frac{1}{2}[-p + \Delta],\ \Delta = \sqrt{p^2 - 4q},$$

т.е. корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$; $v(t)$ - вронскиан для линейно независимых решений ДУ $x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0$, а именно

$$v(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 s} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = \Delta\, e^{-pt}. \tag{6.5}$$

Поскольку ИДУ (6.1) и система (6.3) связаны с помощью ДУ (6.2), то решения ДУ (6.2) и ИДУ (6.1) совпадают.

Так как по условию 2) $W(t) = e^{-pt}$, то из (6.4) с учетом (6.5) получаем:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t} [e^{\lambda_2 t} e^{\lambda_1 s} - e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 s}]\, y(s) ds. \tag{6.6}$$

У нас $p>0,\ q>0$. Тогда характеристическое уравнение $\lambda^2+p\lambda+q=0$ может иметь корни следующих видов:

1) $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}[-p\pm\Delta]$ - действительные корни при $p^2-4q>0$;

2) $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}[-p\pm\Delta i]\ \ (i=\sqrt{-1})$ - комплексно-сопряженные корни при $p^2-4q<0$; 3) $\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}$ - действительные кратные корни при $p^2-4q=0$.

Пусть для определенности $p^2-4q>0$, т.е. имеет место случай 1).

Легко показать, что из (6.6) вытекает

$$x(t)=O(1)e^{-\lambda t},\tag{6.7}$$

где $\lambda=\frac{1}{2}[p-\Delta]>0$.

Далее из (6.6) дифференцированием получаем соотношения:

$$x'(t)=\lambda_1c_1e^{\lambda_1t}+\lambda_2c_2e^{\lambda_2t}+\frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t}[\lambda_2e^{\lambda_2t}e^{\lambda_1s}-\lambda_1e^{\lambda_1t}e^{\lambda_2s}]y(s)ds,\tag{6.8}$$

$$x''(t)=\lambda_1^2c_1e^{\lambda_1t}+\lambda_2^2c_2e^{\lambda_2t}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta}e^{-pt}y(t)+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t}[\lambda_2^2e^{\lambda_2t}e^{\lambda_1s}-\lambda_1^2e^{\lambda_1t}e^{\lambda_2s}]y(s)ds.\tag{6.9}$$

Из соотношений (6.8), (6.9) аналогично (6.7) с учетом $y(t)=O(1)$ вытекают оценки:

$x^{(k)}=O(1)e^{-\lambda t}\ \ (k=1,2)$.

Таким образом, для любого решения $x(t)$ ДУ (6.2), значит, и ИДУ (6.1) справедливы оценки

$$x^{(k)}=O(1)e^{-\lambda t}\quad(k=0,1,2).\tag{6.10}$$

Следовательно, из (6.10) вытекает, что любое решение $x(t)$ ИДУ (6.1) и его первые и вторые производные стремятся к нулю по экспоненциальному закону, т.е. ИДУ (6.1) экспоненциально устойчиво. Теорема 2 в [47] доказана в случае 1).

В случаях 2), 3) доказательство теоремы 6.2 проводится таким же образом с учетом специфики характеристических корней.

Замечание 6.1. В случаях 2), 3) для доказательства теоремы 6.2 нужно исходить от формулы общего решения ДУ (6.2):

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{[x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)]\, W(s)y(s)ds}{v(s)}, \qquad (6.11)$$

где $x_1(t), x_2(t)$ - линейно независимые решения однородного ДУ:

$x''(t) + px'(t) + qx(t) = 0,$ $v(t)$ - вронскиан для этих решений:

$v(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$, и использовать формулу Остроградского – Лиувилля

$v(t) = v(t_0)e^{-pt+pt_0}$. Например, в случае 2) можно доказать, что для любого решения $x(t)$ ИДУ (6.1) справедливы оценки: $x^{(k)}(t) = O(1)e^{-\frac{pt}{2}}$ $(k = 0,1,2)$.

В [47] показано, что любое решение $x(t)$ ИДУ:

$$x'''(t) + \left[a_2(t) \equiv 4e^{\sqrt{t}} + (\sin 5t)^{\frac{1}{3}} \right] x''(t) + \left[a_2(t) - \frac{e^{-t}\sin\sqrt[5]{t}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^4} \right] x'(t) +$$

$$+ \left[a_2(t) - 1 + \frac{e^{-t}|\cos t|}{t^3+7} \right] x(t) + \int_0^t Q_2(t,\tau)\left[x(\tau) + x'(\tau) + x''(\tau)\right] d\tau =$$

$$= \frac{e^{-t}\exp(e^t)}{\sqrt{t+2}}(\cos 2t)^{\frac{1}{15}} - \sin\left(e^{-2t}(\cos t)^{\frac{1}{7}} \right), \;\; t \geq 0, \qquad (*)$$

устойчиво, т.е. любое решение и его первая и вторая производные этого ИДУ ограничены на R_+.

Заметим, что при $p = q = 1,\ \ W(t) \equiv e^{-t}$ (с учетом замечания) ИДУ (*) удовлетворяет всем условиям теоремы 6.2 (то что удовлетворяет всем условиям теоремы 6.1 подробно показано в [47]), здесь $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$,

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i,\ \ \lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ (случай 2)),

$x_1(t) = e^{-\frac{t}{2}} cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t),\quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\, t),\quad v(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-t}.$

Значит, для любого решения $x(t)$ ИДУ (*) справедливы оценки:

$x^{(k)}(t) = O(1)e^{-\frac{t}{2}}\quad (k = 0,1,2)$, т.е. ИДУ (*) экспоненциально устойчиво.

§ 7. О нестандартном методе сведения к системе для устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения седьмого порядка

Под устойчивостью решений линейного ИДУ седьмого порядка понимается ограниченность на полуинтервале $J = [t_0, \infty)$ его решений и их производных до шестого порядка включительно.

В настоящей работе решается следующая

Задача 7.1. Установить достаточные условия устойчивости любого решения линейного ИДУ седьмого порядка типа Вольтерра вида

$$x^{(7)}(t) + a_6(t)x^{(6)}(t) + a_5(t)x^{(5)}(t) + a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) +$$
$$+a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau) +$$
$$+ Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau) + Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau) + Q_6(t,\tau)x^{(6)}(\tau)]d\tau = f(t),\ t \ge t_0. \qquad (7.1)$$

Заметим, что в [28, 36] аналогичная задача решена для ИДУ высоких порядков методом сравнения с решениями соответствующих дифференциальных уравнений [11, с. 15-17]. В [48] описана идея применения к решению такой задачи для ИДУ высоких порядков модифицированным методом весовых и срезывающих функций [11, с. 28-29]. В настоящей работе для решения поставленной задачи сначала развивается вариант метода нестандартного сведения к системе [49], затем к полученной системе применяется метод преобразования уравнений [11, с. 25-27] и метод срезывающих функций [11, с. 41].

Развивая метод нестандартного сведения к системе из [49], в ИДУ (7.1) сделаем замены:

$$x''(t)+\lambda^2 x(t)=W_1(t)y(t),\ x''(t)=-\lambda^2 x(t)+W_1(t)y(t), \tag{7.2}$$

$$y''(t)+\mu^2 y(t)=W_2(t)u(t),\ y''(t)=-\mu^2 y(t)+W_2(t)u(t), \tag{7.3}$$

$$u''(t)+\nu^2 u(t)=W_3(t)z(t),\ u''(t)=-\nu^2 u(t)+W_3(t)z(t), \tag{7.4}$$

где λ,μ,ν - некоторые вспомогательные параметры, причем $\lambda\neq 0,\mu\neq 0,\nu\neq 0$, $0<W_k(t)$ $(k=1,2,3)$ - некоторые весовые функции; $y(t),u(t),z(t)$ - новые неизвестные функции.

Из (7.2- (7.4) дифференцированием получаем следующие выражения:

$$x'''(t)=-\lambda^2 x'(t)+W_1(t)y'(t)+W_1'(t)y(t), \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}
&x^{(4)}(t)=-\lambda^2 x''(t)+W_1(t)y''(t)+2W_1'(t)y'(t)+W_1''(t)y(t)=\\
&=-\lambda^2\left[-\lambda^2 x(t)+W_1(t)y(t)\right]+W_1(t)\left[-\mu^2 y(t)+W_2(t)u(t)\right]+\\
&+2W_1'(t)y'(t)+W_1''(t)y(t)=\lambda^4 x(t)+\left[W_1''(t)-\lambda^2 W_1(t)-\mu^2 W_1(t)\right]y(t)+\\
&+2W_1'(t)y'(t)+W_1(t)W_2(t)u(t).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Введем обозначение: $W(t)\equiv W_1''(t)-\lambda^2 W_1(t)-\mu^2 W_1(t)$.

Тогда далее имеем:

$$\begin{aligned}
&x^{(5)}(t)=\lambda^4 x'(t)+W(t)y'(t)+W'(t)y(t)+2W_1''(t)y'(t)+2W_1'(t)y''(t)+\\
&+\left(W_1(t)W_2(t)\right)' u(t)+W_1(t)W_2(t)u'(t)=\lambda^4 x'(t)+\left[W(t)+2W_1''(t)\right]y'(t)+\\
&+W'(t)y(t)+2W_1'(t)\left[-\mu^2 y(t)+W_2(t)u(t)\right]+\left(W_1(t)W_2(t)\right)' u(t)+W_1(t)W_2(t)u'(t)=
\end{aligned}$$

$$= \lambda^4 x'(t) + \left[W(t) + 2W_1''(t)\right] y'(t) + \left[W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)\right] y(t) +$$
$$+\left[2W_1'(t)W_2(t) + \left(W_1(t)W_2(t)\right)'\right] u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t), \qquad (7.7)$$

$$x^{(6)}(t) = \lambda^4 x''(t) + [W(t) + 2W_1''(t)]y''(t) + [W(t) + 2W_1''(t)]'y'(t) +$$
$$+[W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)]y'(t) + [W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)]'y(t) + [2W_1'(t)W_2(t) +$$
$$+(W_1(t)W_2(t))']'u(t) + [2W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']u'(t) + (W_1(t)W_2(t))'u'(t) +$$
$$+W_1(t)W_2(t)u''(t) = \lambda^4[-\lambda^2 x(t) + W_1(t)y(t)] + [W(t) + 2W_1''(t)][-\mu^2 y(t) +$$
$$+W_2(t)u(t)] + \{[W(t) + 2W_1''(t)]' + W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)\}y'(t) + [W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)]'y(t) +$$
$$+[2W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']'u(t) + 2[W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']u'(t) +$$
$$+W_1(t)W_2(t)[-\nu^2 u(t) + W_3(t)z(t)] = -\lambda^6 x(t) + \{\lambda^4 W_1(t) - \mu^2[W(t) + 2W_1''(t)] +$$
$$+[W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)]'\}y(t) + \{[W(t) + 2W_1''(t)]' + W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)\}y'(t) +$$
$$+\{[W(t) + 2W_1''(t)]W_2(t) + [2W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']' - \nu^2 W_1(t)W_2(t)\}u(t) +$$
$$+2[W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']u'(t) + W_1(t)W_2(t)W_3(t)z(t). \qquad (7.8)$$

Введем обозначения:

$D_1(t) \equiv \lambda^4 W_1(t) - \mu^2[W(t) + 2W_1''(t)] + [W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)]'$ (коэффициент $y(t)$),

$D_2(t) \equiv [W(t) + 2W_1''(t)]' + W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)$ (коэффициент $y'(t)$),

$D_3(t) \equiv [W(t) + 2W_1''(t)]W_2(t) + [2W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']' - \nu^2 W_1(t)W_2(t)$

(коэффициент $u(t)$),

$D_4(t) \equiv 2[W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))']$ (коэффициент $u'(t)$).

С учетом этих обозначений из (7.8) имеем

$$x^{(6)}(t) = -\lambda^6 x(t) + D_1(t)y(t) + D_2(t)y'(t) + D_3(t)u(t) + D_4(t)u'(t) +$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z(t). \qquad (7.9)$$

Из (7.9) аналогично (7.5)-(7.9) получаем

$$x^{(7)}(t) = -\lambda^6 x'(t) + D_1'(t)y(t) + D_1(t)y'(t) + D_2'(t)y'(t) + D_2(t)y''(t) + D_3'(t)u(t) +$$
$$+D_3(t)u'(t) + D_4'(t)u'(t) + D_4(t)u''(t) + (W_1(t)W_2(t)W_3(t))'z(t) +$$

$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)=-\lambda^6 x'(t)+D_1'(t)y(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y'(t)+$$
$$+D_2(t)[-\mu^2 y(t)+W_2(t)u(t)]+D_3'(t)u(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]u'(t)+$$
$$+D_4(t)[-\nu^2 u(t)+W_3(t)z(t)]+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'z(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)=$$
$$=-\lambda^6 x'(t)+[D_1'(t)-\mu^2 D_2(t)]y(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y'(t)+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-\nu^2 D_4(t)]u(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]\,u'(t)+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']z(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t). \qquad (7.10)$$

Подставляя (7.2)-(7.7), (7.9), (7.10) в ИДУ (7.1), имеем

$$-\lambda^6 x'(t)+[D_1'(t)-\mu^2 D_2(t)]y(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y'(t)+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-\nu^2 D_4(t)]u(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]u'(t)+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']z(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)+$$
$$+a_6(t)[-\lambda^6 x(t)+D_1(t)y(t)+D_2(t)y'(t)+D_3(t)u(t)+D_4(t)u'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z(t)]+a_5(t)\{\lambda^4 x'(t)+[W(t)+2W_1''(t)]y'(t)+$$
$$+[W'(t)-2\mu^2 W_1'(t)]y(t)+[2W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']u(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)u'(t)\}+a_4(t)\{\lambda^4 x(t)+[W_1''(t)-\lambda^2 W_1(t)-\mu^2 W_1(t)]y(t)+$$
$$+2W_1'(t)y'(t)+W_1(t)W_2(t)u(t)\}+a_3(t)[-\lambda^2 x'(t)+W_1(t)y'(t)+W_1'(t)y(t)]+$$
$$+a_2(t)[-\lambda^2 x(t)+W_1(t)y(t)]+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)[-\lambda^2 x(\tau)+W_1(\tau)y(\tau)]+$$
$$+Q_3(t,\tau)[-\lambda^2 x'(\tau)+W_1(\tau)y'(\tau)+W_1'(\tau)y(\tau)]+Q_4(t,\tau)[\lambda^4 x(\tau)+$$
$$+(W_1''(\tau)-\lambda^2 W_1(\tau)-\mu^2 W_1(\tau))y(\tau)+2W_1'(\tau)y'(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)u(\tau)]+$$
$$+Q_5(t,\tau)[\lambda^4 x'(\tau)+(W(\tau)+2W_1''(\tau))y'(\tau)+(W'(\tau)-2\mu^2 W_1'(\tau))y(\tau)+$$
$$+(2W_1'(\tau)W_2(\tau)+(W_1(\tau)W_2(\tau))')u(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)u'(\tau)]+$$
$$+Q_6(t,\tau)[-\lambda^6 x(\tau)+D_1(\tau)y(\tau)+D_2(\tau)y'(\tau)+D_3(\tau)u(\tau)+D_4(\tau)u'(\tau)+$$
$$+W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau)z(\tau)]\}d\tau=f(t),\ t\ge t_0. \qquad (7.11)$$

Введем обозначения:

$b_6(t)\equiv a_6(t)+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'](W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $z(t)$),

$b_5(t) \equiv a_5(t)(W_3(t))^{-1} + [a_6(t)D_4(t) + D_3(t) + D_4'(t)](W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $u'(t)$),

$b_4(t) \equiv a_4(t)(W_3(t))^{-1} + \{a_5(t)[2W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'] +$

$+a_6(t)D_3(t) + D_2(t)W_2(t) + D_3'(t) - \nu^2 D_4(t)\}(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ (коэффициент $u(t)$),

$b_3(t) \equiv a_3(t)(W_2(t)W_3(t))^{-1} + [2a_4(t)W_1'(t) + a_5(t)(W(t) + 2W_1''(t)) +$

$+a_6(t)D_2(t) + D_1(t) + D_2'(t)]\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ (коэффициент $y'(t)$),

$b_2(t) \equiv a_2(t)(W_2(t)W_3(t))^{-1} + \{a_3(t)W_1'(t) + a_4(t)W(t) +$

$+a_5(t)[W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)] + a_6(t)D_1(t) + D_1'(t) - \mu^2 D_2(t)\}\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $y(t)$),

$b_1(t) \equiv [a_1(t) - \lambda^2 a_3(t) + \lambda^4 a_5(t) - \lambda^6](W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$(коэффициент $x'(t)$),

$b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda^2 a_2(t) + \lambda^4 a_4(t) - \lambda^6 a_6(t)](W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,\tau) \equiv [Q_0(t,\tau) - \lambda^2 Q_2(t,\tau) + \lambda^4 Q_4(t,\tau) - \lambda^6 Q_6(t,\tau)]\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$-ядро с $x(\tau)$,

$P_1(t,\tau) \equiv [Q_1(t,\tau) - \lambda^2 Q_3(t,\tau) + \lambda^4 Q_5(t,\tau)]\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$- ядро с $x'(\tau)$,

$P_2(t,\tau) \equiv \{Q_2(t,\tau)W_1(\tau) + Q_3(t,\tau)W_1'(\tau) + Q_4(t,\tau)W(\tau) +$

$+Q_5(t,\tau)[W'(\tau) - 2\mu^2 W_1'(\tau)] + Q_6(t,\tau)D_1(\tau)\}\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ - ядро с $y(\tau)$,

$P_3(t,\tau) \equiv [Q_3(t,\tau)W_1(\tau) + 2Q_4(t,\tau)W_1'(\tau) + Q_5(t,\tau)(W(\tau) + 2W_1''(\tau)) +$

$+Q_6(t,\tau)D_2(\tau)]\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ - ядро с $y'(\tau)$,

$P_4(t,\tau) \equiv \{Q_4(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau) + Q_5(t,\tau)[2W_1'(\tau)W_2(\tau) + (W_1(\tau)W_2(\tau))'] +$

$+Q_6(t,\tau)D_3(\tau)\}\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ - ядро с $u(\tau)$,

$P_5(t,\tau) \equiv [Q_5(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau) + Q_6(t,\tau)D_4(\tau)]\,(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$- ядро с $u'(\tau)$,

$K(t,\tau) \equiv (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1} Q_6(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau)$ - ядро с $z(\tau)$,

$F(t) \equiv (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1} f(t)$.

Разделяя обе части соотношения (7.11) на $W_1(t)W_2(t)W_3(t)$ и учитывая введенные обозначения и объединяя полученное ИДУ первого порядка для $z(t)$ с заменами (7.2)-(7.4), будем иметь следующую систему:

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda^2 x(t)=W_1(t)y(t), \\ y''(t)+\mu^2 y(t)=W_2(t)u(t), \\ u''(t)+v^2 u(t)=W_3(t)z(t), \\ z'(t)+b_6(t)z(t)+b_5(t)u'(t)+b_4(t)u(t)+b_3(t)y'(t)+b_2(t)y(t)+ \\ +b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)x'(\tau)+ \\ +P_2(t,\tau)y(\tau)+P_3(t,\tau)y'(\tau)+P_4(t,\tau)u(\tau)+P_5(t,\tau)u'(\tau)+ \\ +K(t,\tau)z(\tau)]d\tau=F(t),\ \ t\ge t_0. \end{cases} \tag{7.12}$$

Отметим, что в силу условий $W_k(t)>0$ $(k=1,2,3)$ система (7.12) эквивалентна ИДУ седьмого порядка (7.1). В приведении ИДУ (7.1) к эквивалентной системе (7.12) и состоит развитие нестандартного метода сведения к системе [49] применительно к ИДУ седьмого порядка (7.1).

Приведем один из простейших результатов.

Пусть [11,49]:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)+K_{01}(t,\tau)K_{02}(t,\tau)+K_{03}(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}F_i(t)+F_{01}(t)F_{02}(t)+F_{03}(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ – некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $(i=1..n)$,

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t) \qquad (i=1...n), \tag{R}$$

$c_i(t)$ $(i=1...n)$ − некоторые функции,

$$b_6(t)=b_{61}(t)+b_{62}(t), \tag{b_6}$$

$$b_k(t)=b_{k1}(t)b_{k2}(t)+b_{k3}(t) \qquad (k=0,1,2,3,4,5), \tag{b_k}$$

$$P_r(t,\tau) = P_{r1}(t,\tau)P_{r2}(t,\tau) + P_{r3}(t,\tau) \qquad (r = 0,1,2,3,4,5), \qquad (P_r)$$

$$\Delta(t) \equiv 2b_{61}(t) - \sum_{k=0}^{5}(b_{k2}(t))^2 - (F_{02}(t))^2 - \int_{t_0}^{t}[(K_{02}(t,\tau))^2 + \sum_{r=0}^{5}(P_{r2}(t,\tau))^2]d\tau,$$

$$Z(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)z(\eta)d\eta \qquad (i = 1...n).$$

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t), u(t), z(t))$ системы (7.12) ее первое уравнение умножаем на $x'(t)$, второе - на $y'(t)$, третье - на $u'(t)$, четвертое - на $z(t)$, складываем полученные соотношения, затем производим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (F), (b_6), (P_r), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, условие (R), функции $c_i(t)$, $Z_i(t,\tau)$ $(i = 1...n)$ с применением лемм 1.4, 1.5 [30], к произведениям функций в условиях (K), (F), (b_k), (P_r) используем неравенство $2x_1x_2 \le x_1^2 + x_2^2$, $\forall x_1x_2 \in R$, вводим функцию $\Delta(t)$. В итоге получаем следующее неравенство:

$$(x'(t))^2 + \lambda^2(x(t))^2 + (y'(t))^2 + \mu^2(y(t))^2 + (u'(t))^2 + \nu^2(u(t))^2 + (z(t))^2 + \int_{t_0}^{t}\Delta(s)(z(s))^2 ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)Z_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2 -$$

$$-2E_i'(s)Z_i(s,t_0) + c_i'(s)]ds + \int_{t_0}^{t}R_{i\tau}'(t,\tau)(Z_i(t,\tau))^2 d\tau\} \le c_* + \int_{t_0}^{t}|b_{62}(s)|(z(s))^2 ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}[A_i'(s)(Z_i(s,t_0))^2 + \int_{t_0}^{s}R_{is\tau}''(s,\tau)(Z_i(s,\tau))^2 d\tau]ds + \int_{t_0}^{t}(F_{01}(s))^2 ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[W_1(s)\left|y(s)x'(s)\right|+W_2(s)\left|u(s)y'(s)\right|+W_3(s)\left|z(s)u'(s)\right|]ds+2\int_{t_0}^{t}\{\left|F_{03}(s)z(s)\right|+$$

$$+\left|b_{53}(s)u'(s)z(s)\right|+\left|b_{43}(s)u(s)z(s)\right|+\left|b_{33}(s)y'(s)z(s)\right|+\left|b_{23}(s)y(s)z(s)\right|+$$

$$+\left|b_{13}(s)x'(s)z(s)\right|+\left|b_{03}(s)x(s)z(s)\right|+\left|z(s)\right|\int_{t_0}^{s}[\left|P_{03}(s,\tau)x(\tau)\right|+\left|P_{13}(s,\tau)x'(\tau)\right|+$$

$$+\left|P_{23}(s,\tau)y(\tau)\right|+\left|P_{33}(s,\tau)y'(\tau)\right|+\left|P_{43}(s,\tau)u(\tau)\right|+\left|P_{53}(s,\tau)u'(\tau)\right|+$$

$$+\left|K_{03}(s,\tau)z(\tau)\right|]d\tau\}ds+\int_{t_0}^{t}\{(b_{51}(s))^2(u'(s))^2+(b_{41}(s))^2(u(s))^2+(b_{31}(s))^2(y'(s))^2+$$

$$+(b_{21}(s))^2(y(s))^2+(b_{11}(s))^2(x'(s))^2+(b_{01}(s))^2(x(s))^2+\int_{t_0}^{s}[(P_{01}(s,\tau))^2(x(\tau))^2+$$

$$+(P_{11}(s,\tau))^2(x'(\tau))^2+(P_{21}(s,\tau))^2(y(\tau))^2+(P_{31}(s,\tau))^2(y'(\tau))^2+(P_{41}(s,\tau))^2(u(\tau))^2+$$

$$+(P_{51}(s,\tau))^2(u'(\tau))^2+(K_{01}(s,\tau))^2(z(\tau))^2]d\tau\}ds, \tag{7.13}$$

где

$$c_*=(x'(t_0))^2+\lambda^2(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+\mu^2(y(t_0))^2+(u'(t_0))^2+v^2(u(t_0))^2+$$

$$+(z(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0).$$

Исходя из неравенства (7.13), аналогично теореме 1 [49] доказывается

Теорема 7.1. Пусть 1) $\lambda\neq 0,\ \ \mu\neq 0,\ \ v\neq 0$, $W_k(t)>0\ (k=1,2,3)$, выполняются условия (K), (F), (R), (b_6), (b_k) $(k=0,1,2,3,4,5)$, (P_r) $(r=0,1,2,3,4,5)$; 2) $\Delta(t)\geq 0$; 3) $A_i(t)\geq 0,\ B_i(t)\geq 0,\ B_i'(t)\leq 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0$, существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+),\ c_i(t),\ \ R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что

$A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\ \ (E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$, $R_{it\tau}''(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$ $(i=1..n;\ k=0,1)$;

$$4)\left|b_{62}(t)\right|+(F_{01}(t))^2+\left|F_{03}(t)\right|+W_j(t)+\left|b_{k3}(t)\right|+(b_{k1}(t))^2+\int_{t_0}^{t}[\left|P_{k3}(t,\tau)\right|+(P_{k1}(t,\tau))^2+$$

$+\left|K_{03}(t,\tau)\right|+(K_{01}(t,\tau))^2]d\tau\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$ $\left(k=0,1,2,3,4,5\right)$. Тогда для любого решения $(x(t),y(t),u(t),z(t))$ системы (12) справедливы следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t)=O(1)\ (k=0,1), \tag{7.14}$$

$$y^{(k)}(t)=O(1)\ (k=0,1), \tag{7.15}$$

$$u^{(k)}(t)=O(1)\ (k=0,1), \tag{7.16}$$

$$z(t)=O(1), \tag{7.17}$$

$$\Delta(t)(z(t))^2\in L^1(J,R_+), \tag{7.18}$$

$$A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2=O(1)\ \ (i=1..n). \tag{7.19}$$

Из теоремы с учетом соотношений (7.2)-(7.9) и утверждений (7.14)-(7.17) вытекает

Следствие 71. Если 1) выполняются все условия теоремы 7.1; 2) $W_k(t)+\left|W^{(k)}(t)\right|+\left|(W_1(t)W_2(t))^{(j)}\right|=O(1)$ $(k=1,2,3;\ \ j=1,2)$, то все решения ИДУ (7.1) и их производные до шестого порядка включительно ограничены на полуинтервале J, т.е. любое решение ИДУ (7.1) устойчиво.

Замечание 7.1. Если $K_{01}(t,\tau)\equiv K_{02}(t,\tau)\equiv F_{01}(t)\equiv F_{02}(t)\equiv b_{k1}(t)\equiv$ $\equiv b_{k2}(t)\equiv P_{r1}(t,\tau)\equiv P_{r2}(t,\tau)\equiv 0$ $(k,r=0,1,2,3,4,5)$, то $\Delta(t)\equiv 2b_{61}(t)$ и условие 2) теоремы 7.1 приобретает вид: $b_{61}(t)\geq 0$.

С учетом этого замечания будем строить следующий

Пример 7.1. Для ИДУ седьмого порядка

$$x^{(7)}(t)+[a_6(t)\equiv 9+E(t)-200(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}]x^{(6)}(t)+$$

$$+[a_5(t)\equiv 33+6E(t)-1200(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}+\sin e^{-2t}]x^{(5)}(t)+$$

$$+[a_4(t)\equiv 61+15E(t)-3000(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}]x^{(4)}(t)+$$

$$+[a_3(t)\equiv 76+22E(t)-4400(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}-\sin e^{-2t}+\frac{e^{-3t}}{2+\sin 3t}]x'''(t)+$$

$$+[a_2(t)\equiv 64+22E(t)-4400(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}-4\sin e^{-2t}]x''(t)+$$

$$+[a_1(t)\equiv 44+16E(t)-3200(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}-2\sin e^{-2t}+\frac{e^{-3t}}{2+\sin 3t}+$$

$$+\frac{e^{-3t}\sin t}{(t+1)^2}]x'(t)+[a_0(t)\equiv 12+8E(t)-1600(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}-4\sin e^{-2t}+$$

$$+\frac{e^{-3t}\cos t}{(t+1)^3}]x(t)+\int_0^t Q_6(t,\tau)[8x(\tau)+16x'(\tau)+22x''(\tau)+22x'''(\tau)+15x^{(4)}(\tau)+$$

$$+6x^{(5)}(\tau)+x^{(6)}(\tau)]d\tau=\frac{e^{-3t}(\sin t)^{\frac{1}{15}}\exp(e^t)}{t+3},\ t\geq 0,$$

где $E(t)\equiv \exp[t^4(\sin t)^{\frac{1}{7}}]$, $Q_6(t,\tau)\equiv e^{-3t+3\tau}\{[\exp(\frac{\sin t}{(t+4)^2})+\tau]^{\frac{1}{2}}+$

$+\frac{1}{t-\tau+7}\}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{15}}\exp(e^t+e^\tau)+\frac{e^{-3t}}{(t+\tau+1)^2}$, выполняются все условия

Теоремы 7.1 и следствия 7.1 при $\lambda=\mu=\nu=1$, $W_1(t)\equiv W_2(t)\equiv W_3(t)\equiv e^{-t}$, здесь

$t_0=0$, $b_6(t)\equiv E(t)-200(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}$, $b_{61}(t)\equiv E(t)>0$,

$\Delta(t)\equiv 2E(t), b_{62}(t)\equiv -200(t-1)(t^2+1)^{-2}(\cos t)^{\frac{1}{3}}$, $b_5(t)\equiv e^t\sin e^{-2t}\equiv b_{53}(t)$,

$b_4(t)\equiv 4e^t\sin e^{-2t}\equiv b_{43}(t)$, $b_3(t)\equiv\frac{e^{-t}}{2+\sin 3t}\equiv b_{33}(t)$,

$b_2(t)\equiv-\frac{e^{-t}}{2+\sin 3t}\equiv b_{23}(t)$, $b_1(t)\equiv\frac{\sin t}{(t+1)^2}\equiv b_{13}(t)$, $b_0(t)\equiv\frac{\cos t}{(t+2)^3}\equiv b_{03}(t)$,

$P_k(t,\tau)\equiv 0\ (k=0,1,2,3,4,5)$, $K(t,\tau)\equiv\{[\exp(\frac{\sin t}{(t+4)^2})+\tau]^{\frac{1}{2}}+$

$+\frac{1}{t-\tau+7}\}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{15}}\exp(e^t+e^\tau)$,

$$n=1,\ \psi_1(t)\equiv(\sin t)^{\frac{1}{15}}\exp(e^t),\ R_1(t,\tau)\equiv[\exp(\frac{\sin t}{(t+4)^2})+\tau]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+7},$$

$$A_1(t)\equiv\exp(\frac{\sin t}{2(t+4)^2}),\ \ A_1^*(t)\equiv R_1^*(t)\equiv\frac{t+5}{(t+4)^3},\ B_1(t)\equiv\frac{1}{t+7},$$

$$K_{03}(t,\tau)\equiv\frac{e^{-3\tau}}{(t+\tau+1)^2},\quad F(t)\equiv\frac{(\sin t)^{\frac{1}{15}}\exp(e^t)}{t+3},\ E_1(t)\equiv\frac{1}{t+3},\ c_1(t)\equiv\frac{1}{t+7}.$$

Значит, все его решения и их производные до шестого порядка включительно ограничены на полуоси $R_+=[0,\infty)$, т.е. любое решение этого ИДУ устойчиво.

Приведенный пример показывает, что в условиях теоремы 7.1 и следствия 7.1 функции $a_k(t),\ \ Q_k(t,\tau)\ \left(k=0,1,2,3,4,5,6\right)$ могут быть недифференцируемыми и немалыми на полуинтервале J.

В теореме 7.1 и следствии 7.1 содержатся новые результаты для устойчивости решений линейного ДУ седьмого порядка.

Следствие 7.2. Если 1) $\lambda\neq0,\ \ \mu\neq0,\ \ \nu\neq0$, $W_k(t)>0\ (k=1,2,3)$, выполняются условия (b_6), (b_k) $\left(k=0,1,2,3,4,5\right)$, $F(t)=F_{01}(t)F_{02}(t)+F_{03}(t)$;

2) $\Delta_1(t)\equiv2b_{61}(t)-\sum\limits_{k=0}^{5}(b_{k2}(t))^2-(F_{02}(t))^2\geq0$; 3) $|b_{62}(t)|+(F_{01}(t))^2+|F_{03}(t)|+W_j(t)+$ $+|b_{k3}(t)|+(b_{k1}(t))^2\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})$ $\left(k=0,1,2,3,4,5\right)$. Тогда для любого решения $(x(t),y(t),u(t),z(t))$ системы ДУ:

$$\begin{cases}x''(t)+\lambda^2x(t)=W_1(t)y(t),\\ y''(t)+\mu^2y(t)=W_2(t)u(t),\\ u''(t)+\nu^2u(t)=W_3(t)z(t),\\ z'(t)+b_6(t)z(t)+b_5(t)u'(t)+b_4(t)u(t)+b_3(t)y'(t)+\\ +b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)=F(t),\ \ t\geq t_0\end{cases}\tag{7.20}$$

верны утверждения (7.14)-(7.18).

Если, кроме того, 4) выполняется условие 2) следствия 7.1, то все решения и их производные до шестого порядка включительно линейного ДУ седьмого порядка (в (7.1)) $Q_k(t,\tau)\equiv 0 \quad (k=0,1,2,3,4,5,6)$:

$$x^{(7)}(t)+\sum_{k=0}^{6} a_k(t)x^{(k)}(t)=f(t),\ t\geq t_0 \qquad (7.1_0)$$

ограничены на полуинтервале J, т.е. любое решение ДУ (7.1_0) устойчиво.

В этом случае $\Delta(t)\equiv\Delta_1(t)$.

Отметим, что система ДУ (7.20) вытекает из системы (7.12) при $Q_k(t,\tau)\equiv 0 \ (k=0,1,2,3,4,5,6)$.

Насколько нам известно, следствие 7.2 отличается от соответствующих результатов для ДУ (7.1_0) из монографий [50,51].

Замечание 7.2. Выбирая конкретно $\lambda,\ \mu,\ \nu$, $W_k(t)\ (k=1,2,3)$, $\psi_i(t),\ c_i(t)\ \ (i=1..n)$ можно получить коэффициентные признаки устойчивости любого решения ИДУ (7.1), затем и для ДУ (7.1_0).

Замечание 7.3. Асимптотические свойства (оценки, устойчивость, принадлежность пространству $L^P(J,R)\quad(p>0)$, стремление к нулю при $t\to\infty$) можно изучить модифицированным методом весовых и срезывающих функций [48;113, с.28-29], умножая для любого решения $x(t)$ ИДУ (7.1) на

$$\varphi_0(t)x(t)+\varphi_1(t)x'(t)+\varphi_2(t)x''(t)+\varphi_3(t)x'''(t)+\varphi_4(t)x^{(4)}(t)+\varphi_5(t)x^{(5)}(t)+\varphi_6(t)x^{(6)}(t)$$

($0<\varphi_k(t)$- некоторые весовые функции $(k=0,1,2,3,4,5,6)$), при этом получаются такие условия, проверка которых, т.е. построение иллюстративных примеров будет нелегким делом. В настоящей работе нами продемонстрирована возможность исследования устойчивости решений ИДУ седьмого порядка (7.1) новым методом, более легким.

Анализ показывает, что легче изучать устойчивость решений ИДУ (7.1) с помощью приведенной системы (7.12), чем ИДУ (7.1) без сведения к системе.

§ 8. Нестандартный метод сведения к системе и устойчивость решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения восьмого порядка

Под устойчивостью решений линейного ИДУ восьмого порядка понимается ограниченность на полуинтервале $J=[t_0,\infty)$ его решений и их производных до седьмого порядка включительно. В настоящем параграфе решается следующая

Задача 8.1. Установить достаточные условия устойчивости любого решения линейного ИДУ восьмого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(8)}(t)+a_7(t)x^{(7)}(t)+a_6(t)x^{(6)}(t)+a_5(t)x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+$$

$$+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+$$

$$+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)+Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)+Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau)+Q_6(t,\tau)x^{(6)}(\tau)+$$

$$+Q_7(t,\tau)x^{(7)}(\tau)]d\tau = f(t), \quad t\ge t_0 . \tag{8.1}$$

Отметим, что в [28, 36] подобная задача решена для ИДУ высоких порядков типа Вольтерра методом сравнения с решениями соответствующих ДУ [11, с. 15-17]. В [48] содержится идея применения к решению такой задачи для ИДУ высоких порядков типа Вольтерра модифицированного метода весовых и срезывающих функций [11, с. 28-29]. В данной работе для решения поставленной задачи сначала применяется нестандартный метод сведения к системе [52], затем к полученной системе развивается метод преобразования уравнений [11, с. 25-27], метод срезывающих функций [11, с. 41] и метод интегральных неравенств [33].

Аналогично [52] в ИДУ (8.1) сделаем замены:

$$x''(t)+\lambda^2x(t)=W_1(t)y(t),\ x''(t)=-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t), \tag{8.2}$$

$$y''(t)+\mu^2y(t)=W_2(t)u(t),\ y''(t)=-\mu^2y(t)+W_2(t)u(t), \tag{8.3}$$

$$u''(t)+\nu^2u(t)=W_3(t)z(t),\ u''(t)=-\nu^2u(t)+W_3(t)z(t), \qquad (8.4)$$

где λ,μ,ν - некоторые вспомогательные параметры, причем $\lambda\neq 0,\mu\neq 0,\nu\neq 0$, $0<W_k(t)\ \ (k=1,2,3)$ - некоторые весовые функции; $y(t),u(t),z(t)$ - новые неизвестные функции.

Из (8.2), (8.3), (8.4) дифференцированием получаем следующие выражения:

$$x'''(t)=-\lambda^2x'(t)+W_1(t)y'(t)+W_1'(t)y(t), \qquad (8.5)$$

$$x^{(4)}(t)=-\lambda^2x''(t)+W_1(t)y''(t)+2W_1'(t)y'(t)+W_1''(t)y(t)=$$
$$=-\lambda^2\left[-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t)\right]+W_1(t)\left[-\mu^2y(t)+W_2(t)u(t)\right]+$$
$$+2W_1'(t)y'(t)+W_1''(t)y(t)=\lambda^4x(t)+\left[W_1''(t)-\lambda^2W_1(t)-\mu^2W_1(t)\right]y(t)+$$
$$+2W_1'(t)y'(t)+W_1(t)W_2(t)u(t). \qquad (8.6)$$

Введем обозначение:

$$W(t)\equiv W_1''(t)-\lambda^2W_1(t)-\mu^2W_1(t).$$

Тогда далее имеем:

$$x^{(5)}(t)=\lambda^4x'(t)+W(t)y'(t)+W'(t)y(t)+2W_1''(t)y'(t)+2W_1'(t)y''(t)+$$
$$+\left(W_1(t)W_2(t)\right)'u(t)+W_1(t)W_2(t)u'(t)=\lambda^4x'(t)+\left[W(t)+2W_1''(t)\right]y'(t)+$$
$$+W'(t)y(t)+2W_1'(t)\left[-\mu^2y(t)+W_2(t)u(t)\right]+\left(W_1(t)W_2(t)\right)'u(t)+W_1(t)W_2(t)u'(t)=$$
$$=\lambda^4x'(t)+\left[W(t)+2W_1''(t)\right]y'(t)+\left[W'(t)-2\mu^2W_1'(t)\right]y(t)+$$
$$+\left[2W_1'(t)W_2(t)+\left(W_1(t)W_2(t)\right)'\right]u(t)+W_1(t)W_2(t)u'(t), \qquad (8.7)$$

$$x^{(6)}(t)=\lambda^4x''(t)+[W(t)+2W_1''(t)]y''(t)+[W(t)+2W_1''(t)]'y'(t)+$$
$$+[W'(t)-2\mu^2W_1'(t)]y'(t)+[W'(t)-2\mu^2W_1'(t)]'y(t)+[2W_1'(t)W_2(t)+$$
$$+(W_1(t)W_2(t)')']u(t)+[2W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t)')]u'(t)+(W_1(t)W_2(t))'u'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)u''(t)=\lambda^4[-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t)]+[W(t)+2W_1''(t)][-\mu^2y(t)+$$
$$+W_2(t)u(t)]+\{[W(t)+2W_1''(t)]'+W'(t)-2\mu^2W_1'(t)\}y'(t)+[W'(t)-2\mu^2W_1'(t)]'y(t)+$$
$$+[2W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']'u(t)+2[W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']u'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)[-\nu^2u(t)+W_3(t)z(t)]=-\lambda^6x(t)+\{\lambda^4W_1(t)-\mu^2[W(t)+2W_1''(t)]+$$

$$+[W'(t)-2\mu^2 W_1'(t)]'\}y(t)+\{[W(t)+2W_1''(t)]'+W'(t)-2\mu^2 W_1'(t)\}y'(t)+$$
$$+\{[W(t)+2W_1''(t)]W_2(t)+[2W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']'-\nu^2 W_1(t)W_2(t)\}u(t)+$$
$$+2[W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']u'(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z(t)\,. \qquad (8.8)$$

Введем обозначения:

$D_1(t)\equiv \lambda^4 W_1(t)-\mu^2[W(t)+2W_1''(t)]+[W'(t)-2\mu^2 W_1'(t)]'$ (коэффициент $y(t)$),

$D_2(t)\equiv [W(t)+2W_1''(t)]'+W'(t)-2\mu^2 W_1'(t)$ (коэффициент $y'(t)$),

$D_3(t)\equiv [W(t)+2W_1''(t)]W_2(t)+[2W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']'-\nu^2 W_1(t)W_2(t)$
(коэффициент $u(t)$),

$D_4(t)\equiv 2[W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']$ (коэффициент $u'(t)$).

С учетом этих обозначений, из (8.8) имеем

$$x^{(6)}(t)=-\lambda^6 x(t)+D_1(t)y(t)+D_2(t)y'(t)+D_3(t)u(t)+D_4(t)u'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z(t)\,. \qquad (8.9)$$

Из (8.9), аналогично (8.5)-(8.9), получаем

$$x^{(7)}(t)=-\lambda^6 x'(t)+D_1'(t)y(t)+D_1(t)y'(t)+D_2'(t)y'(t)+D_2(t)y''(t)+D_3'(t)u(t)+$$
$$+D_3(t)u'(t)+D_4'(t)u'(t)+D_4(t)u''(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'z(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)=-\lambda^6 x'(t)+D_1'(t)y(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y'(t)+$$
$$+D_2(t)[-\mu^2 y(t)+W_2(t)u(t)]+D_3'(t)u(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]u'(t)+$$
$$+D_4(t)[-\nu^2 u(t)+W_3(t)z(t)]+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'z(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)=$$
$$=-\lambda^6 x'(t)+[D_1'(t)-\mu^2 D_2(t)]y(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y'(t)+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-\nu^2 D_4(t)]u(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]\,u'(t)+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']z(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)\,. \qquad (8.10)$$

Из (8.10), аналогично (8.5)-(8.9), имеем:

$$x^{(8)}(t)=-\lambda^6 x''(t)+[D_1'(t)-\mu^2 D_2(t)]'y(t)+[D_1'(t)-\mu^2 D_2(t)]y'(t)+$$
$$+[D_1(t)+D_2'(t)]'y'(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y''(t)+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-\nu^2 D_4(t)]'u(t)+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-\nu^2 D_4(t)]u'(t)+$$
$$+[D_3(t)+D_4'(t)]'u'(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]u''(t)+$$

$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']'z(t)+[D_4(t)W_3(t)+$$
$$+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']z'(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']z'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z''(t)=-\lambda^6[-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t)]+$$
$$+[D_1'(t)-\mu^2D_2(t)]'y(t)+[D_1'(t)-\mu^2D_2(t)]y'(t)+$$
$$+[D_1(t)+D_2'(t)]'y'(t)+[D_1(t)+D_2'(t)](-\mu^2y(t)+W_2(t)u(t))+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)]'u(t)+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)]u'(t)+$$
$$+[D_3(t)+D_4'(t)]'u'(t)+[D_3(t)+D_4'(t)](-v^2u(t)+W_3(t)z(t))+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t)']'z(t)+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t)']z'(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t)'z'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z''(t)=\lambda^8x(t)+$$
$$+\{-\lambda^6W_1(t)+[D_1'(t)-\mu^2D_2(t)]'-\mu^2[D_1(t)+D_2'(t)]\}y(t)+$$
$$+\{D_1'(t)-\mu^2D_2(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]'\}y'(t)+\{[D_1(t)+D_2'(t)]W_2(t)+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)]'-v^2[D_3(t)+D_4'(t)]\}u(t)+$$
$$+\{D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]'\}u'(t)+$$
$$+\{[D_3(t)+D_4'(t)]W_3(t)+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']'\}z(t)+[D_4(t)W_3(t)+$$
$$+2(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']z'(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z''(t). \qquad (8.11)$$

Подставляя (8.2)-(8.7), (8.9)-(8.11) в ИДУ (8.1), получаем

$$\lambda^8x(t)+\{-\lambda^6W_1(t)+[D_1'(t)-\mu^2D_2(t)]'-\mu^2[D_1(t)+D_2'(t)]\}y(t)+$$
$$+\{D_1'(t)-\mu^2D_2(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]'\}y'(t)+\{[D_1(t)+D_2'(t)]W_2(t)+$$
$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)]'-v^2[D_3(t)+D_4'(t)]\}u(t)+$$
$$+\{D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]'\}u'(t)+$$
$$+\{[D_3(t)+D_4'(t)]W_3(t)+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']'\}z(t)+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+2(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']\}z'(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z''(t)+$$
$$+a_7(t)\{-\lambda^6x'(t)+[D_1'(t)-\mu^2D_2(t)]y(t)+[D_1(t)+D_2'(t)]y'(t)+$$

$$+[D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)]u(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]u'(t)+$$
$$+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'z(t)+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z'(t)\}+$$
$$+a_6(t)[-\lambda^6x(t)+D_1(t)y(t)+D_2(t)y'(t)+D_3(t)u(t)+D_4(t)u'(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)W_3(t)z(t)]+a_5(t)[\lambda^4x'(t)+[W(t)+2W_1''(t)]y'(t)+$$
$$+[W'(t)-2\mu^2W_1'(t)]y(t)+[2W_1'(t)W_2(t)+(W_1(t)W_2(t))']u(t)+$$
$$+W_1(t)W_2(t)u'(t)\}+a_4(t)\{\lambda^4x(t)+[W_1''(t)-\lambda^2W_1(t)-\mu^2W_1(t)]y(t)+$$
$$+2W_1'(t)y'(t)+W_1(t)W_2(t)u(t)\}+a_3(t)[-\lambda^2x'(t)+W_1(t)y'(t)+W_1'(t)y(t)]+$$
$$+a_2(t)[-\lambda^2x(t)+W_1(t)y(t)]+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\{Q_0(t,x)x(\tau)+Q_1(t,x)x'(\tau)+Q_2(t,x)[-\lambda^2x(\tau)+W_1(\tau)y(\tau)]+$$
$$+Q_3(t,x)[-\lambda^2x'(\tau)+W_1(\tau)y'(\tau)+W_1'(\tau)y(\tau)]+Q_4(t,x)[\lambda^4x(\tau)+$$
$$+(W_1''(\tau)-\lambda^2W_1(\tau)-\mu^2W_1(\tau))y(\tau)+2W_1'(\tau)y'(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)u(\tau)]+$$
$$+Q_5(t,\tau)\{\lambda^4x'(\tau)+[W(\tau)+2W_1''(\tau)]y'(\tau)+[W'(\tau)-2\mu^2W_1'(\tau)]y(\tau)+$$
$$+[2W_1'(\tau)W_2(\tau)+(W_1(\tau)W_2(\tau))']u(\tau)+W_1(\tau)W_2(\tau)u'(\tau)\}+$$
$$+Q_6(t,\tau)\{-\lambda^6x(\tau)+D_1(\tau)y(\tau)+D_2(\tau)y'(\tau)+D_3(\tau)u(\tau)+D_4(\tau)u'(\tau)+$$
$$+W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau)z(\tau)]+Q_7(t,\tau)\{-\lambda^6x'(\tau)+(D_1'(\tau)-\mu^2D_2(\tau))y(\tau)+$$
$$+(D_1(\tau)-D_2'(\tau))y'(\tau)+(D_2(\tau)W_2(\tau)+D_3'(\tau)-v^2D_4(\tau))u(\tau)+$$
$$+(D_3(\tau)-D_4'(\tau))u'(\tau)+(D_4(\tau)W_3(\tau)+(W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau))')z(\tau)+$$
$$+W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau)z'(\tau)]\}d\tau=f(t),\ \ t\ge t_0. \qquad (8.12)$$

В соотношении (8.12) введем следующие обозначения:

$$b_7(t)\equiv a_7(t)+[D_4(t)W_3(t)+2(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'](W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$$

(коэффициент $z'(t)$),

$$b_6(t)\equiv a_6(t)+a_7(t)[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))'](W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}+$$
$$+\{[D_3(t)+D_4'(t)]W_3(t)+[D_4(t)W_3(t)+(W_1(t)W_2(t)W_3(t))']'\}(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$$

(коэффициент $z'(t)$),

$$b_5(t)\equiv a_5(t)(W_3(t))^{-1}+\{a_6(t)D_4(t)+a_7(t)[D_3(t)+D_4'(t)]+$$
$$+D_2(t)W_2(t)+D_3'(t)-v^2D_4(t)+[D_3(t)+D_4'(t)]'\}(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$$

(коэффициент $u'(t)$),

$b_4(t) \equiv a_4(t)(W_3(t))^{-1} + \{a_5(t)[2W_1'(t)W_2(t) + (W_1(t)W_2(t))'] +$

$+a_6(t)D_3(t) + a_7(t)[D_2(t)W_2(t) + D_3'(t) - v^2 D_4(t)] +$

$+[D_1(t) + D_2'(t)]W_2(t) + [D_2(t)W_2(t) + D_3'(t) - v^2 D_4(t)]' -$

$-v^2[D_3(t) + D_4'(t)]\}(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ (коэффициент $u(t)$),

$b_3(t) \equiv a_3(t)(W_2(t)W_3(t))^{-1} + \{2a_4(t)W_1'(t) + a_5(t)[W(t) + 2W_1''(t)] +$

$+a_6(t)D_2(t) + a_7(t)[D_1(t) + D_2'(t)] + D_1'(t) - \mu^2 D_2(t) +$

$+[D_1(t) + D_2'(t)]'\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$(коэффициент $y'(t)$),

$b_2(t) \equiv a_2(t)(W_2(t)W_3(t))^{-1} + \{a_3(t)W_1'(t) + a_4(t)[W_1''(t) - \lambda^2 W_1(t) -$

$-\mu^2 W_1(t)] + a_5(t)[W'(t) - 2\mu^2 W_1'(t)] + a_6(t)D_1(t) + a_7(t)[D_1'(t) - \mu^2 D_2(t)] -$

$-\lambda^6 W_1(t) + [D_1'(t) - \mu^2 D_2(t)]' - \mu^2[D_1(t) + D_2'(t)]\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $y(t)$),

$b_1(t) \equiv \{a_1(t) - \lambda^2 a_3(t) + \lambda^4 a_5(t) - \lambda^6 a_7(t)\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $x'(t)$),

$b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda^2 a_2(t) + \lambda^4 a_4(t) - \lambda^6 a_6(t) + \lambda^8]\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,\tau) \equiv [Q_0(t,\tau) - \lambda^2 Q_2(t,\tau) + \lambda^4 Q_4(t,\tau) - \lambda^6 Q_6(t,\tau)](W_1(t)W_2(t)W_3(t)^{-1}$

(ядро с $x(\tau)$),

$P_1(t,\tau) \equiv [Q_1(t,\tau) - \lambda^2 Q_3(t,\tau) + \lambda^4 Q_5(t,\tau) - \lambda^6 Q_7(t,\tau)]\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$

(ядро с $x'(\tau)$),

$P_2(t,\tau) \equiv \{Q_2(t,\tau)W_1(\tau) + Q_3(t,\tau)W_1'(\tau) + Q_4(t,\tau)[W_1''(\tau) - \lambda^2 W_1(\tau) -$

$-\mu^2 W_1(\tau)] + Q_5(t,\tau)[W'(\tau) - 2\mu^2 W_1'(\tau)] + Q_6(t,\tau)D_1(\tau) +$

$+Q_7(t,\tau)[D_1'(\tau) - \mu^2 D_2(\tau)]\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ (ядро с $y(\tau)$),

$P_3(t,\tau) \equiv \{Q_3(t,\tau)W_1(\tau) + 2Q_4(t,\tau)W_1'(\tau) + Q_5(t,\tau)[W(\tau) + 2W_1''(\tau)] +$

$+Q_6(t,\tau)D_2(\tau) + Q_7(t,\tau)[D_1(\tau) + D_2'(\tau)]\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$ (ядро с $y'(\tau)$),

$$P_4(t,\tau)\equiv\{Q_4(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)+Q_5(t,\tau)[2W_1'(\tau)W_2(\tau)+(W_1(\tau)W_2(\tau))']+$$

$$+Q_6(t,\tau)D_3(\tau)+Q_7(t,\tau)[D_2(\tau)W_2(\tau)+D_3'(\tau)-v^2D_4(\tau)]\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$$

(ядро с $u(\tau)$),

$$P_5(t,\tau)\equiv\{Q_5(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)+Q_6(t,\tau)D_4(\tau)+$$

$$+Q_7(t,\tau)[D_3(\tau)+D_4'(\tau)]\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$$ (ядро с $u'(\tau)$),

$$P_6(t,\tau)\equiv\{Q_6(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau)+Q_7(t,\tau)[D_4(\tau)W_3(\tau)+$$

$$+(W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau))']\}\ (W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}$$ (ядро с $z(\tau)$),

$K(t,\tau)\equiv(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}\,Q_7(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau)W_3(\tau))$ (ядро с $z'(\tau)$),

$F(t)\equiv(W_1(t)W_2(t)W_3(t))^{-1}\,f(t)$ - новый свободный член.

Обе части соотношения (8.12) делим на $W_1(t)W_2(t)W_3(t)\neq 0$ и учитываем введенные обозначения. Тогда получаем ИДУ второго порядка для неизвестной функции $z(t)$. Объединяя это ИДУ для неизвестной функции $z(t)$ с заменами (8.2)-(8.4), приходим к следующей системе для неизвестной $(x(t),\ y(t),\ u(t),\ z(t))$:

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda^2x(t)=W_1(t)y(t),\\ y''(t)+\mu^2y(t)=W_2(t)u(t),\\ u''(t)+v^2u(t)=W_3(t)z(t),\\ z''(t)+b_7(t)z'(t)+b_6(t)z(t)+b_5(t)u'(t)+b_4(t)u(t)+b_3(t)y'(t)+\\ +b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}[P_0(t,\tau)x(\tau)+P_1(t,\tau)x'(\tau)+\\ +P_2(t,\tau)y(\tau)+P_3(t,\tau)y'(\tau)+P_4(t,\tau)u(\tau)+P_5(t,\tau)u'(\tau)+P_6(t,\tau)z(\tau)+\\ +K(t,\tau)z'(\tau)]d\tau=F(t),\quad t\geq t_0, \end{cases} \tag{8.13}$$

эквивалентной к исходному ИДУ восьмого порядка (8.1).

Аналогично [52] введем следующие предположения и обозначения:

$$K(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n}K_i(t,\tau)+K_{01}(t,\tau)K_{02}(t,\tau)+K_{03}(t,\tau)\,, \tag{K}$$

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t)+F_{01}(t)F_{02}(t)+F_{03}(t), \qquad (F)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}, E_i(t)\equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $(i=1..n)$,

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t) \qquad (i=1...n), \qquad (R)$$

$c_i(t)$ $(i=1...n)$ - некоторые функции,

$$b_7(t)=b_{71}(t)+b_{72}(t), \qquad (b_7)$$

$$b_6(t)=b_{60}(t)+b_{61}(t)+b_{62}(t)b_{63}(t)+b_{64}(t), \qquad (b_6)$$

$$b_k(t)=b_{k1}(t)b_{k2}(t)+b_{k3}(t) \qquad (k=0,1,2,3,4,5), \qquad (b_k)$$

$$P_r(t,\tau)=P_{r1}(t,\tau)P_{r2}(t,\tau)+P_{r3}(t,\tau) \qquad (r=0,1,2,3,4,5,6), \qquad (P_r)$$

$$\Delta(t)\equiv 2b_{71}(t)-\sum_{k=0}^{5}(b_{k2}(t))^2-(b_{62}(t))^2-(F_{02}(t))^2-\int_{t_0}^{t}[(K_{02}(t,\tau))^2+\sum_{r=0}^{6}(P_{r2}(t,\tau))^2]d\tau,$$

$$Z_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)z'(\eta)d\eta \qquad (i=1...n).$$

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),y(t),u(t),z(t))$ системы (8.13) ее первое уравнение умножаем на $x'(t)$, второе - на $y'(t)$, третье - на $u'(t)$, четвертое - на $z'(t)$, сложим полученные соотношения, затем производим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (F), (b_7), (b_6), (b_k), (P_r), функции $\psi_i(t)$, $R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$ $(i=1..n)$, условие (R), функции $c_0(t)$, $c_i(t)$, $Z_i(t,\tau)$ $(i=1...n)$ с применением лемм 1.4, 1.5 [30], к произведениям функций в условиях (K), (F), (b_k), (P_r) применяем неравенство $2x_1x_2\le x_1^2+x_2^2$, $\forall x_1x_2\in R$, вводим функцию $\Delta(t)$. Тогда, после некоторых элементарных преобразований, получаем следующее неравенство:

$$V(t,x)\equiv(x'(t))^2+\lambda^2(x(t))^2+(y'(t))^2+\mu^2(y(t))^2+(u'(t))^2+v^2(u(t))^2+$$
$$+(z'(t))^2+\int_{t_0}^{t}\Delta(s)(z'(s))^2ds+b_{60}(t)(z(t))^2-2F_0(t)z(t)+c_0(t)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}[b'_{60}(s)(z(s))^2-2F'_0(s)z(s)+c'_0(s)]ds+b_{61}(t)(z(t))^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2+B_i(t)(Z_i(t,t_0))^2-2E_i(t)Z_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B'_i(s)(Z_i(s,t_0))^2-$$

$$-2E'_i(s)Z_i(s,t_0)+c'_i(s)]ds+\int_{t_0}^{t}R'_{i\tau}(t,\tau)(Z_i(t,\tau))^2d\tau\}\le$$

$$\le c_*+\int_{t_0}^{t}b'_{61}(s)(z(s))^2ds+\int_{t_0}^{t}[2|b_{72}(s)|(z'(s))^2+$$

$$+(b_{63}(s))^2(z(s))^2+2|b_{64}(s)||z(s)z'(s)|]ds+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}[A'_i(s)(Z_i(s,t_0))^2+$$

$$+\int_{t_0}^{s}R''_{is\tau}(s,\tau)(Z_i(s,\tau))^2d\tau]ds+\int_{t_0}^{t}(F_{01}(s))^2ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[W_1(s)|y(s)x'(s)|+W_2(s)|u(s)y'(s)|+W_3(s)|z(s)u'(s)|]ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\{|F_{03}(s)z'(s)|+|b_{53}(s)u'(s)z'(s)|+|b_{43}(s)u(s)z'(s)|+$$

$$+|b_{33}(s)y'(s)z'(s)|+|b_{23}(s)y(s)z'(s)|+|b_{13}(s)x'(s)z'(s)|+$$

$$+|b_{03}(s)x(s)z'(s)|+|z'(s)|\int_{t_0}^{s}[|P_{03}(s,\tau)x(\tau)|+|P_{13}(s,\tau)x'(\tau)|+$$

$$+|P_{23}(s,\tau)y(\tau)|+|P_{33}(s,\tau)y'(\tau)|+|P_{43}(s,\tau)u(\tau)|+|P_{53}(s,\tau)u'(\tau)|+$$

$$+|P_{63}(s,\tau)z(\tau)|+|K_{03}(s,\tau)z'(\tau)|]d\tau\}ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\{(b_{51}(s))^2(u'(s))^2+(b_{41}(s))^2(u(s))^2+(b_{31}(s))^2(y'(s))^2+$$

$$+(b_{21}(s))^2(y(s))^2+(b_{11}(s))^2(x'(s))^2+(b_{01}(s))^2(x(s))^2+$$

$$+\int_{t_0}^{s}[(P_{01}(s,\tau))^2(x(\tau))^2+(P_{11}(s,\tau))^2(x'(\tau))^2+(P_{21}(s,\tau))^2(y(\tau))^2+$$

$$+(P_{31}(s,\tau))^2(y'(\tau))^2+(P_{41}(s,\tau))^2(u(\tau))^2+(P_{51}(s,\tau))^2(u'(\tau))^2$$

$$+(P_{61}(s,\tau))^2(z(\tau))^2+(K_{01}(s,\tau))^2(z'(\tau))^2]d\tau\}ds, \qquad (8.14)$$

где $c_* = (x'(t_0))^2+\lambda^2(x(t_0))^2+(y'(t_0))^2+\mu^2(y(t_0))^2+(u'(t_0))^2+\nu^2(u(t_0))^2+$

$$+(z'(t_0))^2+[b_{60}(t_0)+b_{62}(t_0)](z(t_0))^2-2F_0(t_0)z(t_0)+\sum_{i=0}^{n}c_i(t_0).$$

Приведем теорему, аналогичную теореме из [52].

Теорема 8.1. Пусть 1) $\lambda\neq 0,\ \mu\neq 0,\ \nu\neq 0,\ W_k(t)>0\ (k=1,2,3)$, выполняются условия (K), (F), (R), (b_7), (b_6), (b_k) $(k=0,1,2,3,4,5)$, (P_r) $(r=0,1,2,3,4,5,6)$; 2) $\Delta(t)\geq 0$; 2) существует функция $c_0(t)$ такая, что $(F_0^{(k)}(t))^2\leq b_{60}^{(k)}(t)c_0^{(k)}(t)$ $(k=0,1)$; 3) $b_{61}(t)\geq b_{610}>0,\ b'_{61}(t)\leq 0$; 4) $A_i(t)\geq 0,\ B_i(t)\geq 0,\ B'_i(t)\leq 0,\ R'_{i\tau}(t,\tau)\geq 0$, существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A'_i(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\ (E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$, $R''_{it\tau}(t,\tau)\leq R_i^*(t)R'_{i\tau}(t,\tau)$ $(i=1..n;\ k=0,1)$; 5) $|b_{72}(t)|+(b_{63}(t))^2+|b_{64}(t)|+(F_{01}(t))^2+|F_{03}(t)|+W_j(t)+$

$$+|b_{k3}(t)|+(b_{k1}(t))^2+\int_{t_0}^{t}[|P_{r3}(t,\tau)|+(P_{r1}(t,\tau))^2++|K_{03}(t,\tau)|+(K_{01}(t,\tau))^2]d\tau\in$$

$L^1(J,R_+\setminus\{0\})$ $(j=1,2,3;\ k=0,1,2,3,4,5;\ r=0,1,2,3,4,5,6)$.

Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t),\ u(t),\ z(t))$ системы (8.13) справедливы следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t)=O(1)\quad (k=0,1), \qquad (8.15)$$

$$y^{(k)}(t)=O(1)\quad (k=0,1), \qquad (8.16)$$

$$u^{(k)}(t)=O(1)\quad (k=0,1), \qquad (8.17)$$

$$z^{(k)}(t)=O(1)\quad (k=0,1), \qquad (8.18)$$

$$\Delta(t)(z(t))^2\in L^1(J,R_+), \qquad (8.19)$$

$$A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2=O(1)\qquad (i=1..n). \qquad (8.20)$$

Доказательство. В силу условий 1) – 4) теоремы 8.1 получается, что функционал $V(t;x) \geq 0$. Из условия 2) теоремы 8.1 вытекает, что

$$(-1)^k [b_{60}^{(k)}(t)\big(z(t)\big)^2 - 2F_0^{(k)}(t)z(t) + c_0^{(k)}(t)] \geq 0 \quad (k = 0,1). \tag{8.21}$$

С учетом (8.21) из вида функционала $V(t;x)$, который является левой частью неравенства (8.14), имеем, что:

$$(x'(t))^2 \leq V(t;x),\ \lambda^2(x(t))^2 \leq V(t;x),\ (y'(t))^2 \leq V(t;x),$$

$$\mu^2(y(t))^2 \leq V(t;x),\ (u'(t))^2 \leq V(t;x),\ \nu^2(u(t))^2 \leq V(t;x),$$

$$(z'(t))^2 \leq V(t;x),\ b_{61}(t)(z(t))^2 \leq V(t;x),\ A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 \leq V(t;x),\quad (i = 1..n),$$

$$\int_{t_0}^{t} \Delta(s)(z'(s))^2 ds \leq V(t;x),\ A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 \leq V(t;x) \quad (i = 1..n). \tag{8.22}$$

Учитывая соотношения (8.22), из неравенства (8.14) получаем следующее интегральное неравенство: $V(t;x) \leq c_{**} + \int\limits_{t_0}^{t} [2\left|F_{03}(t)\right|\big(V(s;x)\big)^{\frac{1}{2}} + v(s)V(s;x) +$

$$+2(V(s;x))^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{s} w_1(s,\tau)(V(s;x))^{\frac{1}{2}} d\tau + \int_{t_0}^{s} w_2(s,\tau)V(\tau;x)d\tau]ds, \tag{8.23}$$

где

$$c_{**} = c_* + \int_{t_0}^{\infty} (F_{01}(t))^2 dt < \infty,$$

$$v(t) \equiv 2\left|b_{72}(t)\right| + \nu^{-2}\big(b_{63}(t)\big)^2 + 2\left|\nu\right|^{-\frac{1}{2}}\left|b_{64}(t)\right| + \sum_{i=1}^{n}[A_i^*(t) + R_i^*(t)] + 2[\left|\mu\right|^{-\frac{1}{2}} W_1(t) +$$

$$+\left|\nu\right|^{-\frac{1}{2}} W_2(t) + (b_{61}(t))^{-\frac{1}{2}} W_3(t) + \left|b_{53}(t)\right| + \left|\nu\right|^{-\frac{1}{2}}\left|b_{43}(t)\right| + \left|b_{33}(t)\right| + \left|\mu\right|^{-\frac{1}{2}}\left|b_{23}(t)\right| + \left|b_{13}(t)\right| +$$

$$+\left|\lambda\right|^{-\frac{1}{2}}\left|b_{03}(t)\right|] + \nu^{-2}\big(b_{41}(t)\big)^2 + \big(b_{31}(t)\big)^2 + \mu^{-2}\big(b_{21}(t)\big)^2 + \big(b_{11}(t)\big)^2 + \lambda^{-2}\big(b_{01}(t)\big)^2,$$

$$w_1(t,\tau) \equiv 2\Big[\left|\lambda\right|^{-\frac{1}{2}}\left|P_{03}(t,\tau)\right| + \left|P_{13}(t,\tau)\right| + \left|\mu\right|^{-\frac{1}{2}}\left|P_{23}(t,\tau)\right| + \left|P_{33}(t,\tau)\right| + \left|\nu\right|^{-\frac{1}{2}}\left|P_{43}(t,\tau)\right| +$$

$$+\left|P_{53}(t,\tau)\right| + \left|P_{63}(t,\tau)\right|\big(b_{61}(\tau)\big)^{-\frac{1}{2}} + \left|K_{03}(t,\tau)\right|\Big],\ w_2(t,\tau) \equiv \lambda^{-2}\big(P_{01}(t,\tau)\big)^2 + \big(P_{11}(t,\tau)\big)^2 +$$

$$+\mu^{-2}\big(P_{21}(t,\tau)\big)^2 + \big(P_{31}(t,\tau)\big)^2 + \nu^{-2}\big(P_{41}(t,\tau)\big)^2 + \big(P_{51}(t,\tau)\big)^2 +$$

$$+\big(P_{61}(t,\tau)\big)^2\big(b_{61}(\tau)\big)^{-1} + \big(K_{01}(t,\tau)\big)^2.$$

Применяя к неравенству (8.23) лемму 1 [33], имеем следующую оценку:

$$V(t;x) \le \{\sqrt{c_{**}} + \int_{t_0}^{t} \left|F_{03}(s)\right| \exp[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} M(\eta)d\eta]ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{t} M(s)ds), \qquad (8.24)$$

где

$$M(t) \equiv v(t) + \int_{t_0}^{t} [w_1(t,\tau) + w_2(t,\tau)]d\tau.$$

С учетом условий 4)-5) теоремы 8.1, из оценки (8.24), получаем, что справедлива оценка:

$$V(t;x) \le c_{***}, \qquad (8.25)$$

где

$$c_{***} = \{\sqrt{c_{**}} + \int_{t_0}^{\infty} \left|F_{03}(s)\right| \exp[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s} M(\eta)d\eta]ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{\infty} M(s)ds) < \infty.$$

Из оценки (8.25), на основе соотношений (8.22), будем иметь справедливость утверждений (8.15)-(8.20) теоремы 8.1. Теорема 8.1 доказана.

Замечание 8.1. Аналогично теореме 2.1 [11, с. 85] условие 3) теоремы 8.1 можно заменить на условие:

3*) $b_{61}(t) = b_{611}(t) + b_{612}(t),\ b_{611}(t) > 0,\ b'_{611}(t) > 0,\ \ b_{612}(t) \ge 0,$ существует функция $b^*_{612}(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $b'_{612}(t) \le b^*_{612}(t) b_{61}(t)$.

Тогда вместо утверждений (8.15)-(8.20) получаются следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t) = \left(b_{611}(t)\right)^{\frac{1}{2}} O(1) \quad (k = 0,1), \qquad (8.15_*)$$

$$y^{(k)}(t) = (b_{611}(t))^{\frac{1}{2}} O(1) \quad (k = 0,1), \qquad (8.16_*)$$

$$u^{(k)}(t) = (b_{611}(t))^{\frac{1}{2}} O(1) \quad (k = 0,1), \qquad (8.17_*)$$

$$z(t) = O(1), \quad z'(t) = (b_{611}(t))^{\frac{1}{2}} O(1), \qquad (8.18_*)$$

$$\int_{t_0}^{t} \Delta(s)(z'(s))^2 ds = (b_{611}(t))^{\frac{1}{2}} O(1), \qquad (8.19_*)$$

$$A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 = (b_{611}(t))^{\frac{1}{2}} O(1) \qquad (i = 1..n). \qquad (8.20_*)$$

Если еще выполняется условие: 6) $\left(b_{611}(t)\right)^{\frac{1}{2}} = O(1)$, то справедливы утверждения (8.15)-(8.20).

Из теоремы 8.1, с учетом замечания 8.1, вытекает

Следствие 8.1. Если 1) выполняются все условия теоремы 8.1 или условия 1), 2), 4), 5) теоремы 8.1 и условия 3*), 6) замечания 8.1; 2) $W_k(t) + \left|W_1^{(l)}(t)\right| + \left|W_2^{(k)}(t)\right| = O(1)$ $(k = 1,2,3;\ l = 1,2,3,4,5)$, то все решения ИДУ (8.1) и их производные до седьмого порядка включительно ограничены на полуинтервале J, т.е. любое решение ИДУ (8.1) устойчиво.

Замечание 8.2. Если $K_{01}(t,\tau) \equiv K_{02}(t,\tau) \equiv F_{01}(t) \equiv F_{02}(t) \equiv b_{62}(t) \equiv b_{63}(t) \equiv$ $\equiv P_{r1}(t,\tau) \equiv P_{r2}(t,\tau) \equiv 0$ $(k = 0,1,2,3,4,5;\ r = 0,1,2,3,4,5,6)$, то $\Delta(t) \equiv 2b_{71}(t)$ и условие 2) теоремы 8.1 переходит в условие: 2*) $b_{71}(t) \ge 0$.

Замечание 8.3. Отметим, что если нарушается условие 3) теоремы 8.1 или условие 3*) замечания 8.1, то из оценки (8.25) и из $b_{61}(t)\left(z(t)\right)^2 \le V(t;x)$ нельзя получить утверждение: $z(t) = O(1)$. В некоторых случаях это утверждение можно получить из утверждения (8.19) теоремы 8.1 следующим образом, аналогично теореме 2 [53]:

Теорема 8.2. Пусть 1) выполняются все условия теоремы 8.1; 2) $b_{61}(t) > 0$, существует функция $b_{61}^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $b_{61}'(t) \le b_{61}^*(t) b_{61}(t)$. Тогда для любого решения $\left(x(t),\ y(t),\ u(t),\ z(t)\right)$ системы (13) справедливы утверждения (8.15)-(8.17), $z'(t) = O(1),\ b_{61}(t)\left(z(t)\right)^2 = O(1)$, (8.19), (8.20).

Пусть, кроме того,

3) $\Delta(t) > 0,\ \left(\Delta(t)\right)^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$.

Тогда $\quad z'(t) \in L^1(J, R_+)$,

т.е. существует конечный предел:

$$\left|\lim_{t\to\infty} z(t)\right| = \left|z(\infty)\right| < \infty. \tag{8.26}$$

Отметим, что в силу $z(t) \in C^2(J,R)$ из (8.26) следует, что $z(t) = O(1)$. Значит, и из теоремы 8.2 тоже можно сформулировать следствие, аналогично следствию 8.1 настоящей работы.

Теперь возникает вопрос: А что будет, если нарушаются условие 3) теоремы 8.1 и условие 3) теоремы 8.2 ?

Ответ на этот вопрос в некоторых случаях дает применение леммы 1.4 [11, с. 45-46], леммы 3.1-3.3 [11, с. 110-112] об интегральных неравенствах первого рода.

Ниже приведем простейшие из этих ответов.

Из теоремы 8.2 аналогично теореме 1.2 и следствию 1.5 [11, с. 56-57] вытекает

Теорема 8.3. Пусть 1) выполняются условия 1), 2) теоремы 8.2. Тогда для любого решения $(x(t), y(t), u(t), z(t))$ системы (8.13) справедливы утверждения (8.15)-(8.17), $z'(t) = O(1)$ и:

$$A_i(t)(Z_i(t,t_0))^2 \le c_{****} \qquad (i = 1..n), \tag{8.27}$$

где

$$c_{****} = \{\sqrt{c_{**}} + \int_{t_0}^{\infty} \left|F_{03}(s)\right| \exp[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s} M_1(\eta)d\eta]ds\}^2 \exp(\int_{t_0}^{\infty} M_1(s)ds) < \infty,$$

$$M_1(t) \equiv M(t) + b_{61}^{*}(t).$$

Пусть кроме того, для некоторого $j\ (1 \le j \le n)$:

2) $A_j(t) \ge A_{j0} > 0,\ \psi_j(t) \ne 0, \quad \prod_j(t) = O(1),$

где

$$\prod_j(t) \equiv \left|\psi_j(t)\right|^{-1} \exp(\int_{t_0}^{t} \left|\psi_j'(s)\right| \left|\psi_j(s)\right|^{-1} ds). \tag{8.28}$$

Тогда

$$z(t) = O(1). \tag{8.29}$$

При доказательстве к интегральному неравенству первого рода:

$$\left|\int_{t_0}^{t} \psi_j(s) z'(s) ds\right| \le \sqrt{c_{****}} \frac{1}{\sqrt{A_{j0}}}$$

применяется лемма 1.4 [3, с. 45-46].

Ниже рассмотрим случай, когда условие $A_j(t) \ge A_{j0} > 0$ теоремы 8.3 может нарушаться.

Теорема 8.4. Пусть 1) выполняется условие 1) теоремы 8.3 и $A_j(t) > 0 \quad (1 \le j \le n)$. Тогда для любого решения $(x(t), y(t), u(t), z(t))$ системы (8.13) справедливы утверждения (8.15)-(8.17), $z'(t) = O(1)$, (8.27) и:

$$\left|\int_{t_0}^{t} \psi_j(s) z'(s) ds\right| \le \sqrt{c_{****}} q_j(t) \quad (1 \le j \le n), \tag{8.30}$$

где

$$q_j(t) \equiv (A_j(t))^{-\frac{1}{2}}.$$

Пусть, кроме того,

2) функция

$$\left|\psi_j(t)\right|^{-1} \{q_j(t) + [1 + \int_{t_0}^{t} q_j(s) \Pi'_j(s) e^{-\Pi_j(s)} ds] e^{\Pi_j(t)}\}$$

ограничена на полуинтервале J, где $\Pi_j(t)$ определена по (8.28). Тогда имеет место утверждение (8.29).

В этом случае к интегральному неравенству первого рода (8.30) применяется лемма 3.1 [11, с. 110-111], что приведет к следующей оценке:

$$\begin{gathered}|z(t)| \le \left|\psi_j(t)\right|^{-1} \{\sqrt{c_{****}} q_j(t) + [\left|\psi_j(t_0) z(t_0)\right| + \\ + \sqrt{c_{****}} \int_{t_0}^{t} q_j(s) \Pi'_j(s) e^{-\Pi_j(s)} ds] e^{\Pi_j(t)}\}.\end{gathered} \tag{8.31}$$

Из оценки (8.31), в силу условия 2), получается справедливость утверждения (8.29) теоремы 8.4.

Так как $A_j(t) \in C^1(J, R_+ \setminus \{0\})$, то $q'_j(t) \in C(J,R)$. Поэтому применение к интегральному неравенству (8.30) лемму 3.2 [11, с.111] дает следующий результат, который следует из оценки (8.31), применяя интегрирование по частям.

Следствие 2. Если 1) выполняется условие 1) теоремы 8.4 и $q_j(t) \in$

$$C^1(J,R);\ 2)\ \left|\psi_j(t)\right|^{-1}[1+\int_{t_0}^{t} q'_j(s)e^{-\Pi_j(s)}ds]e^{\Pi_j(t)} = O(1) \quad (1 \le j \le n),$$

то справедливы утверждения теоремы 8.4.

В этом случае применение к интегральному неравенству (8.30) леммы 3.2 [11, с. 111] приведет к оценке:

$$\left|z(t)\right| \le \left|\psi_j(t)\right|^{-1}[\left|\psi_j(t_0)z(t_0)\right| + q_j(t_0)\sqrt{c_{****}} + \sqrt{c_{****}}\int_{t_0}^{t} q'_j(s)e^{-\Pi_j(s)}ds]e^{\Pi_j(t)}. \qquad (8.32)$$

В силу условия 2) следствия 8.2 из (8.32) следует, что $z(t) = O(1)$.

Из оценки (8.32) вытекает следующее

Следствие 8.3. Если 1) выполнятся условие 1) теоремы 8.4;
2) $\psi_j(t) > 0$, $\psi'_j(t) \ge 0$, $q_j(t) \ge 0$, $q'_j(t) \ge 0$, $q'_j(t)\ (\psi_j(t))^{-1} \in L^1(J, R_+)$, то справедливы утверждения теоремы 8.4.

В этом случае:

$$\Pi_j(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} \frac{\psi'_j(s)}{\psi_j(s)}ds) = \frac{\psi_j(t)}{\psi_j(t_0)},$$

и из оценки (8.32) имеем следующую оценку:

$$\left|z(t)\right| \le \left|z(t_0)\right| + \left(\psi_j(t_0)\right)^{-1} q_j(t_0)\sqrt{c_{****}} + \sqrt{c_{****}}\int_{t_0}^{t} q'_j(s)(\psi_j(s))^{-1}ds, \qquad (8.33)$$

из которой на основании условия 2) следствия 8.3 получаем, что $z(t) = O(1)$.

Замечание 4. Пусть выполняется условие: $A_j(t) \geq A_{j0} > 0 \ (1 \leq j \leq n)$.

Тогда в интегральном неравенстве (8.30) $q_j(t) \equiv (A_{j0})^{-\frac{1}{2}} = const$ и из оценки (8.33) имеем оценку:

$$|z(t)| \leq |z(t_0)| + (\psi_j(t_0))^{-1} q_j(t_0)\sqrt{c_{****}}\,, \tag{8.34}$$

и справедливо следующее

Следствие 4. Если 1) выполняется условие 1) теоремы 8.3 и $A_j(t) \geq A_{j0} > 0 \ (1 \leq j \leq n)$; 2) $\psi_j(t) > 0, \ \psi_j'(t) \geq 0,$ то справедливы утверждения теоремы 8.3.

Замечание 8.5. В силу условий 3), 5) теоремы 8.1 следует, что выполняется условие:

$$|b_{64}(t)| + \int_{t_0}^{t} [|P_{63}(t,\tau)| d\tau \in L^1(J, R_+)\,. \tag{8.35}$$

Ниже рассмотрим случай, когда условие (8.35) может нарушаться.

Введем обозначения:

$$v_1(t) \equiv v(t) - 2|b_{64}(t)|(b_{61}(t))^{-\frac{1}{2}}, \quad w_3(t,\tau) \equiv w_1(t,\tau) - 2\,|P_{63}(t,\tau)|(b_{61}(\tau))^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда вместо (8.23) имеем следующее интегральное неравенство:

$$V(t;x) \leq c_{**} + \int_{t_0}^{t} \{2[|F_{03}(s)| + |b_{64}(s)|(b_{64}(s))^{-\frac{1}{2}}|z(s)| +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} |P_{63}(s,\tau)|(b_{61}(\tau))^{-\frac{1}{2}}|z(\tau)| d\tau] + v_1(s)V(s;x) +$$

$$+ (V(s;x))^{\frac{1}{2}} \int_{t_0}^{s} w_3(s,\tau)(V(\tau;x))^{\frac{1}{2}} d\tau + \int_{t_0}^{s} w_2(s,\tau)V(\tau;x) d\tau\} ds\,, \tag{8.36}$$

где

$c_{**},\ v(t),\ w_1(t,\tau),\ w_2(t,\tau)$ - такие же, как в (8.23).

Аналогично теореме 3.15 [11, с. 146-147], применяя к интегральному неравенству (8.36) лемму 1 [33], получаем следующее интегральное неравенство:

$$V(t;x)\le\{\sqrt{c_{**}}+\int_{t_0}^{t}[|F_{03}(s)|+|b_{64}(s)|(b_{61}(s))^{-\frac{1}{2}}|z(s)|+$$
$$+\int_{t_0}^{s}|P_{63}(s,\tau)|(b_{61}(\tau))^{-\frac{1}{2}}|z(\tau)|d\tau]\exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s}M_2(\eta)d\eta)ds\}^2\exp(\int_{t_0}^{t}M_2(s)ds), \quad (8.37)$$

где

$$M_2(t)\equiv v_1(t)+\int_{t_0}^{t}[w_3(t,\tau)+w_2(t,\tau)]d\tau .$$

С учетом соотношений (8.22) и (8.37), имеем

$$A_i(t)(\int_{t_0}^{t}\psi_i(s)z'(s)ds)^2\le\{\sqrt{c_{**}}+\int_{t_0}^{t}[|F_{03}(s)|+|b_{64}(s)|(b_{61}(s))^{-\frac{1}{2}}|z(s)|+$$
$$+\int_{t_0}^{s}|P_{63}(s,\tau)|(b_{61}(\tau))^{-\frac{1}{2}}|z(\tau)|d\tau]\exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{s}M_2(\eta)d\eta)ds\}^2\exp(\int_{t_0}^{t}M_2(s)ds)\ (i=1..n). \quad (8.38)$$

Теорема 8.5. Пусть 1) выполняются условия 1), 2), 4) теоремы 8.1 и условие 2) теоремы 8.2. Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t),\ u(t),\ z(t))$ системы (8.13) справедливы соотношения (8.36), (8.37).

Пусть, кроме того, 3) $A_j(t)\ge A_{j0}>0\quad(1\le j\le n)$;

4) $\int_{t_0}^{\infty}|F_{03}(s)|ds=F_{030}<\infty,\quad \int_{t_0}^{\infty}M_2(s)ds=M_{20}<\infty$.

Тогда для $z(t)$ выполняется следующее интегральное неравенство:

$$\left|\int_{t_0}^{t}\psi_j(s)z'(s)ds\right|\le c_{1*}+\int_{t_0}^{t}[v_2(s)|z(s)|+\int_{t_0}^{s}w_4(s,\tau)|z(\tau)|d\tau]ds\quad(1\le j\le n), \quad (8.39)$$

где

$$c_{1*}=(A_{j0})^{-\frac{1}{2}}[\sqrt{c_{**}}+F_{030}]e^{\frac{1}{2}M_{20}}<\infty,$$

$$v_2(t) \equiv (A_{j0})^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}M_{20}} \left|b_{64}(t)\right|(b_{61}(t))^{-\frac{1}{2}},$$

$$w_4(t,\tau) \equiv (A_{j0})^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}M_{20}} \left|P_{63}(t,\tau)\right|(b_{61}(\tau))^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} M_2(\eta)d\eta) \quad (1 \le j \le n).$$

Пусть, дополнительно, 5) $\psi_j(t) \ne 0$, функция

$$\left|\psi_j(t)\right|^{-1} \exp(\int_{t_0}^{t} \left|\psi'_j(s)\right|\left|\psi_j(s)\right|^{-1} + v_2(s)\left|\psi_j(t)\right|^{-1} + \int_{t_0}^{s} w_4(s,\tau)\left|\psi_j(\tau)\right|^{-1} d\tau]ds) \quad (1 \le j \le n)$$

ограничена на полуинтервале J.

Тогда

$$z(t) = O(1). \tag{8.40}$$

В этом случае из (8.37) в силу условий 3), 4) вытекает интегральное неравенство (8.39), к которому применяется лемма 3.5 [11, с. 112-113], что приведет к следующей оценке:

$$\left|z(t)\right| \le [c_{1*} + \left|\psi_j(t_0)z(t_0)\right|]\left|\psi_j(t)\right|^{-1} \exp(\int_{t_0}^{t} \left|\psi'_j(s)\right|\left|\psi_j(s)\right|^{-1} + v_2(s)\left|\psi_j(t)\right|^{-1} +$$

$$+\int_{t_0}^{s} w_4(s,\tau)\left|\psi_j(\tau)\right|^{-1} d\tau]ds) \quad (1 \le j \le n). \tag{8.41}$$

Учет условия 5) приведет из (8.41) к утверждению (8.40) теоремы 8.5.

Замечание 8.6. Анализ условий показывает, что теорема 8.5 не обеспечивает устойчивость решений ИДУ (8.1). Точнее не обеспечивается $z'(t) = O(1)$. Возникает вопрос: При каких дополнительных, к условиям теоремы 8.5, условиях обеспечивается $z'(t) = O(1)$? При этом важно, чтобы условия предыдущих теорем об устойчивости решений ИДУ (8.1) и условия получаемой теоремы не пересекались.

Замечание 8.7. Литературный анализ дает основание говорить о том, что приведение ИДУ восьмого порядка (8.1) к системе (8.13) значительно облегчает решение поставленной задачи.

Приведем простейший пример на иллюстрацию условий теоремы 8.1 и следствия 8.1.

Пример 8.1. Для ИДУ восьмого порядка

$$x^{(8)}(t)+[12+e^t+E(t)]x^{(7)}(t)+[62+9e^t+9E(t)+e^{-t}]x^{(6)}(t)+$$

$$+[180+34e^t+34E(t)]x^{(5)}(t)+[329+72e^t+72E(t)]x^{(4)}(t)+$$

$$+[406-2e^{-t}+97e^t+97E(t)+3e^{-2t}]x^{(3)}(t)+[366+e^{-t}+93e^t+93E(t)]x''(t)+$$

$$+[238-2e^{-t}+3e^{-2t}+e^{-3t}+64e^t+64E(t)]x'(t)+[98+2e^{-t}+5e^{-3t}+30e^t+30E(t)]x(t)+$$

$$+\int_0^t[30x(\tau)+64x'(\tau)+93x''(\tau)+97x'''(\tau)+72x^{(4)}(\tau)+34x^{(5)}(\tau)+$$

$$+9x^{(6)}(\tau)+x^{(7)}(\tau)]e^{-3t+3\tau}\{[\exp(\frac{\sin t}{(t+1)^2})+\tau]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+1}\}e^{t^2+\tau^2}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{9}}d\tau=$$

$$=e^{-3t}-\frac{e^{-3t+t^2}(\sin t)^{\frac{1}{9}}}{t+2},\quad t\ge 0,$$

где

$$E(t)\equiv\exp[t^5(\sin t)^{\frac{1}{3}}],$$

выполняются все условия теоремы 8.1 и следствия 8.1 при

$\lambda=\mu=\nu=1, W_1(t)\equiv W_2(t)\equiv W_3(t)=e^{-t}$, здесь $t_0=0,\ W(t)\equiv -e^{-t}$,

$D_1(t)\equiv -3e^{-t}, D_2(t)\equiv 2e^{-t}, D_3(t)\equiv 8e^{-2t}, D_4(t)\equiv -6e^{-2t}$,

$b_7(t)\equiv e^t+E(t), b_6(t)\equiv 1+e^{-t},\ b_5(t)\equiv -6, b_4(t)\equiv 8,\ b_3(t)\equiv 3,$

$b_2(t)\equiv -3,\ b_1(t)\equiv 1,\ b_0(t)\equiv 5,\ \mathrm{P}_k(t,\tau)\equiv 0,\ (k=0,1,2,3,4,5,6),$

$$K(t,\tau)\equiv\{[\exp(\frac{\sin t}{(t+1)^2})+\tau]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+1}\}e^{t^2+\tau^2}(\sin t\sin\tau)^{\frac{1}{9}},\ F(t)\equiv 1-\frac{e^{t^2}(\sin t)^{\frac{1}{9}}}{t+2},$$

$n=1,\ \psi_1(t)\equiv e^{t^2}(\sin t)^{\frac{1}{9}},\ R_1(t,\tau)\equiv[\exp(\frac{\sin t}{(t+1)^2})+\tau]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{t-\tau+1},$

$A_1(t)\equiv\exp(\frac{\sin t}{2(t+1)^2}),\ A_1^{*}(t)\equiv R_1^{*}(t)\equiv\frac{t+3}{(t+1)^3},\ B_1(t)\equiv\frac{1}{t+1},$

$F_1(t)\equiv-\frac{e^{t^2}(\sin t)^{\frac{1}{9}}}{t+2},\ E_1(t)\equiv-\frac{1}{t+2},\ c_1(t)\equiv\frac{1}{t+1},\ b_{60}(t)\equiv\frac{1}{2},$

$F_0(t)\equiv 1,\ c_0(t)\equiv 2,\ K_{01}(t,\tau)\equiv K_{02}(t,\tau)\equiv K_{03}(t,\tau)\equiv F_{01}(t)\equiv$

$\equiv F_{02}(t)\equiv F_{03}(t)\equiv b_{62}(t)\equiv b_{63}(t)\equiv b_{64}(t)\equiv 0,\ b_{61}(t)\equiv\frac{1}{2}+e^{-t},\ b_{72}(t)\equiv 0,$

$b_{k3}(t)\equiv 0\ \ (k=0,1,2,3,4,5),\ P_{r1}(t,\tau)\equiv P_{r2}(t,\tau)\equiv P_{r3}(t,\tau)\equiv 0\ \ \ (r=0,1,2,3,4,5,6),$

$b_{52}(t)\equiv-\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}},\ b_{51}(t)\equiv 18e^{-\frac{t}{2}},\ b_{42}(t)\equiv\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}},\ b_{41}(t)\equiv 24e^{-\frac{t}{2}},$

$b_{32}(t)\equiv\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}},\ b_{31}(t)\equiv 9e^{-\frac{t}{2}},\ b_{22}(t)\equiv\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}},\ b_{21}(t)\equiv -9e^{-\frac{t}{2}},$

$b_{02}(t)\equiv\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}},\ b_{01}(t)\equiv 3e^{-\frac{t}{2}},\ \Delta(t)\equiv\frac{13}{9}e^{t}+2E(t),$

и, значит все его решения и их производные до седьмого порядка включительно ограничены на полуоси $R_+=[0,\infty]$, т.е. любое решение данного ИДУ устойчиво.

Этот пример показывает что в условиях теоремы 8.1 и следствия 8.1 функции $a_k(t), Q_k(t,\tau)\quad (k=0,1,2,3,4,5,6,7)$ могут быть недифференцируемыми и немалыми на полуинтервале J.

Теорема 8.1 и следствие 8.1 содержат новые результаты для устойчивости решений линейного ДУ восьмого порядка:

$$x^{(8)}(t)+a_7(t)x^{(7)}(t)+a_6(t)x^{(6)}(t)+a_5(t)x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+$$
$$+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)\equiv f(t),\ \ t\ge t_0. \qquad (8.1_0)$$

Следствие 8.5. Если 1) $\lambda\ne 0,\ \mu\ne 0,\ \nu\ne 0,\ \ W_k(t)>0\quad (k=1,2,3),$

выполняются условия $(b_7),\ (b_6),\ (b_k)\quad (k=0,1,2,3,4,5),$

$F(t)=F_0(t)F_{01}(t)F_{02}(t)+F_{03}(t);$

2) $\Delta_0(t) \equiv 2b_{71}(t) - \sum_{k=0}^{5} (b_{k2}(t)^2 - (b_{62}(t)^2 - (F_{02}(t))^2 \geq 0;$

3) выполняется условие 3) теоремы 8.1; 4) $|b_{72}(t)| + (b_{63}(t))^2 +$

$+|b_{64}(t)| + (F_{01}(t))^2 + |F_{03}(t)| + W_j(t) + |b_{k3}(t)| + (b_{k1}(t))^2 \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$

$(j = 1,2,3;\ k = 0,1,2,3,4,5)$, то для любого решения $(x(t),\ y(t),\ u(t),\ z(t))$ системы:

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda^2 x(t) = W_1(t)y(t), \\ y''(t) + \mu^2 y(t) = W_2(t)u(t), \\ u''(t) + v^2 u(t) = W_3(t)z(t), \\ z''(t) + b_7(t)z'(t) + b_6(t)z(t) + b_5(t)u'(t) + b_4(t)u(t) + \\ +b_3(t)y'(t) + b_2(t)y(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) = F(t), \end{cases} \qquad (13_0)$$

соблюдается утверждения (8.15)-(8.19) теоремы 8.1.

Если, кроме того, 5) выполняется условие 2) следствия 8.1 , то все решения и их производные до седьмого порядка включительно линейного ДУ восьмого порядка (8.1_0) ограничены на полуинтервале J, т.е. любое решение ДУ (8.1_0) устойчиво.

Пример 8.2. ДУ восьмого порядка:

$$x^{(8)}(t) + [12 + e^t + E(t)]x^{(7)}(t) + [62 + 9e^t + 9E(t) + e^{-t}]x^{(6)}(t) +$$

$$+[180 + 34e^t + 34E(t)]x^{(5)}(t) + [329 + 72e^t + 72E(t)]x^{(4)}(t) +$$

$$+[406 - 2e^{-t} + 97e^t + 97E(t) + 3e^{-2t}]x^{(3)}(t) + [366 + e^{-t} + 93e^t + 93E(t)]x''(t) +$$

$$+[238 - 2e^{-t} + 3e^{-2t} + e^{-3t} + 64e^t + 64E(t)]x'(t) + [98 + 2e^{-t} + 5e^{-3t} + 30e^t + 30E(t)]x(t) =$$

$$= e^{-3t}, \quad t \geq 0, \qquad (*)$$

где $E(t) \equiv \exp[t^5 (\sin t)^{\frac{1}{3}}]$, удовлетворяет всем условиям следствия 8.5 с $F_0(t) \equiv -1$, а все остальные соответствующие функции такие же, как в примере 8.1. Значит, для ДУ (*) верны утверждения следствия 8.5.

Анализ показывает, что результаты следствия 8.5 отличаются от результатов для ДУ (8.1_0) из монографий [50, 51].

Замечание 8.8. Выбирая конкретные $\lambda, \mu, v, W_k(t) \quad (k=1,2,3)$, $c_0(t),\ \psi_i(t), c_i(t) \ \ (i=1..n)$ можно установить коэффициентные признаки устойчивости любого решения ИДУ (8.1) и ДУ (8.1_0).

Замечание 8.9. Оценки, устойчивость , принадлежность пространству $L^p(J,R)$ $(p>0)$, стремление к нулю при $t\to\infty$ и другие асимптотические свойства решений и их производных ИДУ (8.1) и ДУ (8.1_0) можно изучить модифицированным методом весовых функций [48; 11, с. 28-29], умножением для любого решения $x(t)$ ИДУ (8.1) на

$$\sum_{k=0}^{7} \varphi_k(t) x^{(k)}(t),$$

где $0<\varphi_k(t)$ - некоторые весовые функции $(k=0,1,2,3,4,5,6,7)$. При этом получаются такие условия, проверка которых будет нелегким делом.

Анализ показывает, что лучше изучать устойчивость решений ИДУ (8.1) с помощью системы (8.13), чем ИДУ (8.1) непосредственно.

Замечание 8.10. Если в ИДУ (8.1) сделать замены:

$$x''(t)+p_1x'(t)+q_1x(t)=W_1(t)y(t), \tag{8.42}$$

$$y''(t)+p_2y'(t)+q_2y(t)=W_2(t)u(t), \tag{8.43}$$

$$u''(t)+p_3u'(t)+q_3u(t)=W_3(t)z(t), \tag{8.44}$$

которые являются развитием замены (2) [47, 54], то можно изучить асимптотические свойства (оценка, ограниченность на J, стремление к нулю при $t\to\infty$, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, принадлежность пространству $L^p(J,R)$ $(p>0)$, ограниченность на J интеграла от решений) решений и их производных до седьмого порядка включительно ИДУ (8.1). При этих заменах ИДУ (8.1) сводится к системе вида (8.13), где первыми три ДУ являются (8.42)-(8.44). При этом для сведенной системы можно развить метод преобразования уравнений [11, с. 25-27], метод срезывающих функций [11, с. 41], метод интегральных неравенств [33] и в конце для ДУ(8.42)-(8.44) можно использовать метод Лагранжа интегрального представления решений [43, с. 391-394].

Замечание 8.11. Для изучения асимптотических свойств решений ИДУ (8.1) можно применить теорему 2 [55, с. 233-235] и теорему 3 [55, с. 236], а также лемму 1.4.1 [56; 57,с. 37].

Замечание 8.12. К системе, получаемой в замечании 8.10, можно развить метод возведения уравнений в квадрат или модифицированный метод весовых и срезывающих функций [11].

§ 9. Оценка и асимптотические свойства решений вольтерровой системы линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений в критическом случае

Развитием метода матричных весовых и срезывающих функций установлены достаточные условия для оценки, ограниченности, степенной абсолютной интегрируемости на полуоси, стремления к нулю, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, при неограниченном возрастании независимой переменной решений линейной однородной системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с нулевой матрицей коэффициентов, т.е. в критическом случае. Приведен простейший иллюстративный пример.

Рассматривается следующая

Задача 9.1. Установить достаточные условия для оценки, ограниченности на J, принадлежности пространству $L^p(J,R)$ $(p>0)$, стремления к нулю при, в том числе по экспоненциальному и степенному закону, $t\to\infty$ компонент $x_i(t)$ $(1\le i\le n)$ любого решения $x(t)=\{x_i(t)\}$ СИДУ вида

$$x'(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau=0,\quad t\ge t_0. \tag{9.1}$$

Отметим, что все устанавливаемые свойства, кроме ограниченности, решений СИДУ будут специфическими; вопрос о стремлении к нулю по экспоненциальному закону при $t \to \infty$ решений СИДУ был рассмотрен в статье Л.М. Березанского [58], W-методом Н.В. Азбелева [7, с. 89-99]. В настоящей работе для решения поставленной задачи развивается векторный аналог метода, разработанного в [11, с.114-116], с использованием матричного метода весовых и срезывающих функций [59] и преобразований по схеме $A) \to B) \to C)$ из [11, с.114-116].

Пусть $0 < \Phi(t)$ - некоторая $n \times n$ симметрическая, $0 \le P(t)$ - некоторая $n \times n$ внутренняя, $\Psi(t)$ - некоторая $n \times n$ срезывающая, $R(t,\tau) \equiv (\Psi^{-1}(t))^T \Phi(t) K(t,\tau) \Psi^{-1}(\tau)$ - $n \times n$ симметрическая матричная функция

$$X(t,\tau) \equiv \int_\tau^t \Psi(\eta) x(\eta) d\eta.$$

Сначала вводим функцию $P(t)$ в СИДУ (9.1) по правилу веса: $P(t)x(t) - P(t)x(t)$, затем поступаем аналогично как в [59]. Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ СИДУ (9.1) умножаем скалярно на вектор $\Phi(t)x(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, вводим функцию $\Psi(t)$, используем преобразования:

$$2\int_{t_0}^t < \Phi(s)x(s),\, x'(s) > ds = < \Phi(t)x(t),\, x(t) > - < \Phi(t_0)x(t_0),\, x(t_0) > -$$

$$-\int_{t_0}^t < \Phi'(s)x(s),\, x(s) > ds, \tag{9.2}$$

$$2\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s < R(s,\tau)\Psi(\tau)x(\tau),\, \Psi(s)x(s) > d\tau ds = < R(t,t_0)X(t,t_0), X(t,t_0) > -$$

$$-\int_{t_0}^t < R'_s(s,t_0)X(s,t_0), X(s,t_0) > ds + \int_{t_0}^t < R'_\tau(t,\tau)X(t,\tau), X(t,\tau) > d\tau -$$

$$-\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s < R''_{s\tau}(s,\tau)X(s,\tau), X(s,\tau) > d\tau ds. \tag{9.3}$$

В результате получаем следующее тождество:

$$<\Phi(t)x(t),\ x(t)>+\int_{t_0}^{t}<\Delta(s)x(s),x(s)>-2\int_{t_0}^{t}<\Phi(s)P(s)x(s),x(s)>ds+$$

$$+<R(t,t_0)X(t,t_0)X(t,t_0)>-\int_{t_0}^{t}<R'_s(s,t_0)X(s,t_0)X(s,t_0)>ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}<R'_\tau(t,\tau)X(t,\tau)X(t,\tau)>d\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}R''_{s\tau}(s,\tau)X(s,\tau)X(s,\tau)>d\tau ds\equiv c_*, \qquad (9.4)$$

где $\Delta(t)\equiv 2\Phi(t)P(t)-\Phi'(t),\ c_*=<\Phi(t_0)x(t_0),x(t_0)>$.

Заметим, что преобразование (9.3) получается по лемме 4 [30].

Для преобразования «плохого» интеграла из (9.4):

$$I(t)\equiv -2\int_{t_0}^{t}<\Phi(s)P(s)x(s),x(s)>ds,\ t\ge t_0 \qquad (9.5)$$

используем идеи преобразований (3.26)-(3.30) из [11, с.114-116].

Вводя функцию $\Psi(t)$ и интегрируя по частям, имеем

$$I(t)\equiv -2\int_{t_0}^{t}<\Phi(s)P(s)\Psi^{-1}(s)\Psi(s)x(s),x(s)>ds=-2\int_{t_0}^{t}<M_1(s)(X(s,t_0))',x(s)>ds=$$

$$=-2<M_1(t)X(t,t_0),x(t)>+2\int_{t_0}^{t}<M_1'(s)X(s,t_0),x(s)>ds+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}<M_1(s)X(s,t_0),\ x'(s)>ds, \qquad (9.6)$$

где $M_1(t)\equiv\Phi(t)P(t)\Psi^{-1}(t)$.

Предположим, что матрица $M_2(t)\equiv(\Psi^{-1}(t))^T M_1'(t)-n\times n$ симметрическая. Тогда, введением функцию $\Psi(t)$ и интегрированием по частям для первого интеграла из правой части (9.6), получаем

$$2\int_{t_0}^{t} < M_1'(s)X(s,t_0),\ \Psi^{-1}(s)\Psi(s)x(s) > ds = 2\int_{t_0}^{t} < (\Psi^{-1}(s))^T M_1'(s)X(s,t_0),(X(s,t_0))' > ds =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} < M_2(s)X(s,t_0),(X(s,t_0))' > ds =< M_2(t)X(t,t_0), X(t,t_0) > -$$

$$-\int_{t_0}^{t} < M_2'(s)X(s,t_0), X(s,t_0) > ds\,. \qquad (9.7)$$

Далее преобразуем второй интеграл из правой части (6), заменив

$$x'(s) = -\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)x(s)ds,$$

т.е. на эквивалент для $x'(t)$ из СИДУ (1).

Тогда имеем

$$2\int_{t_0}^{t} < M_1(s)X(s,t_0), x'(s) > ds = -2\int_{t_0}^{t} < M_1(s)X(s,t_0),\ \int_{t_0}^{s} K(s,\tau)x(\tau) > ds\,. \qquad (9.8)$$

Во внутреннем интеграле правой части (9.8) вводим функцию $\Psi(t)$ и

интегрируем по частям:

$$\int_{t_0}^{s} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{s} K(s,\tau)\Psi^{-1}(\tau)\Psi(\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{s} K(s,\tau)\Psi^{-1}(\tau)(X(\tau,t_0))'d\tau =$$

$$= K(s,s)\Psi^{-1}(s)X(s,t_0) - \int_{t_0}^{s} (K(s,\tau)\Psi^{-1}(\tau))_\tau' X(\tau,t_0)d\tau.$$

С учетом этого из (9.8) следует

$$2\int_{t_0}^{t} < M_1(s)X(s,t_0), x'(s) > ds = -2\int_{t_0}^{t} < M_1(s)X(s,t_0),\ K(s,s)\Psi^{-1}(s)X(s,t_0) > ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} < M_1(s)X(s,t_0),\ \int_{t_0}^{s} (K(s,\tau)\Psi^{-1}(\tau))_\tau' X(\tau,t_0)d\tau > ds =$$

$$=-2\int_{t_0}^{t}<M_3(s)X(s,t_0),X(s,t_0)>ds+2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}<Q(s,\tau)X(\tau,t_0),X(s,t_0)>d\tau ds, \qquad (9.9)$$

где $M_3(t)\equiv M_1^T(t)K(t,t)\Psi^{-1}(t),\;\; Q(t,\tau)\equiv M_1^T(t)(K(t,\tau)\Psi^{-1}(\tau))'_\tau$.

Пусть $Q(t,\tau)$ - симметрическая матрица. Тогда согласно равенству 2 статьи З.Б. Цалюка [60] получаем:

$$2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}<Q(s,\tau)X(\tau,t_0),X(s,t_0)>d\tau ds=<Q(t,t_0)Y(t,t_0),Y(t,t_0)>-$$

$$-\int_{t_0}^{t}<Q'_s(s,t_0)Y(s,t_0),Y(s,t_0)>ds+\int_{t_0}^{t}<Q'_\tau(t,\tau)Y(t,\tau),Y(t,\tau)>d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}<Q''_{s\tau}(s,\tau)Y(s,\tau),Y(s,\tau)>d\tau ds, \qquad (9.10)$$

где $Y(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}X(\eta,t_0)d\eta$.

С учетом соотношений (9.7)-(9.10) из (9.6) имеем

$$I(t)=-2<M_1(t)X(t,t_0),x(t)>+<M_2(t)X(t,t_0),X(t,t_0)>-$$

$$-\int_{t_0}^{t}<M'_2(s)X(s,t_0),X(s,t_0)>ds-2\int_{t_0}^{t}<M_3(s)X(s,t_0),X(s,t_0)>ds+$$

$$+<Q(t,t_0)Y(t,t_0),Y(t,t_0)>-\int_{t_0}^{t}<Q'_s(s,t_0)Y(s,t_0),Y(s,t_0)>ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}<Q'_\tau(t,\tau)Y(t,\tau),Y(t,\tau)>d\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}<Q''_{s\tau}(s,\tau)Y(s,\tau),Y(s,\tau)>d\tau ds. \qquad (9.11)$$

Отметим, что преобразования (9.6)-(9.11) являются векторными аналогами преобразований (3.26)- (3.31) из [11, с. 114-116] соответственно.

Подставляя (9.11) в (9.4) получаем следующее окончательное тождество:

$$<\Phi(t)x(t),\ x(t)> + \int_{t_0}^{t} <\Delta(s)x(s), x(s)> ds - 2 < M_1(t)X(t,t_0), x(t)> +$$

$$+ < A(t)X(t,t_0), X(t,t_0)> - \int_{t_0}^{t} < B(s)X(s,t_0), X(s,t_0)> ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} < R'_{\tau}(t,\tau)X(t,\tau), X(t,\tau)> d\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} < R''_{s\tau}(s,\tau)X(s,\tau), X(s,\tau)> d\tau ds +$$

$$+ < Q(t,t_0)Y(t,t_0), Y(t,t_0)> - \int_{t_0}^{t} < Q'_s(s,t_0)Y(s,t_0), Y(s,t_0)> ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} < Q'_{\tau}(t,\tau)Y(t,\tau), Y(t,\tau)> d\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} < Q''_{s\tau}(s,\tau)Y(s,\tau), Y(s,\tau)> d\tau ds \equiv c_*, \qquad (9.12)$$

где $A(t) \equiv R(t,t_0) + M_2(t),\ B(t) \equiv R'_t(t,t_0) + M'_2(t) + 2M_3(t)$.

Из тождества (9.12) непосредственно следует

Теорема 9.1. Пусть 1) $P(t) \geq 0,\ \Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$, $\Phi_1(t) \geq diag(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)),\ \Phi_2(t) \geq 0,\ A(t) \geq 0;\ 2)\ \Delta(t) \geq 0;\ 3)\ < \Phi_2(t)z, z >$ - $-2 < M_1(t)u, z > + A(t)u, u > \geq 0$ для любых ненулевых $n \times 1$ векторов z, u; 4) $B(t) \leq 0$; 5) $R'_{\tau}(t,\tau) \geq 0,\ R''_{t\tau}(t,\tau) \leq 0,\ Q(t,t_0) \geq 0,\ Q'_t(t,t_0) \leq 0, Q'_{\tau}(t,\tau) \geq 0$, $Q''_{t\tau}(t,\tau) \leq 0$. Тогда для компонент $x_i(t)$ $(i = 1..n)$ любого решения $x(t) = \{x_i(t)\}$ СИДУ (9.1) справедливы следующие оценки:

$$x_i(t) = (\varphi_i(t))^{-\frac{1}{2}} O(1) \ \ (i = 1..n) \qquad (9.13)$$

и соотношение

$$< \Delta(t)x(t), x(t) > \in L^1(J, R_+). \qquad (9.14)$$

Замечание 9.1. Пусть $A(t) = A_1(t) + A_2(t),\ \ A_1(t) > 0,\ A_2(t) \geq 0$. Тогда в условии 3) теоремы 9.1 вместо $A(t)$ стоит $A_2(t)$ и условие 4) можно заменить на условие: существует скалярная функция $b^*(t) \geq 0$ такая, что $B(t) \leq b^*(t)A_1(t)$.

Из (9.13) вытекает

Следствие 9.1. Если выполняются все условия теоремы 9.1 и

$a)\ \varphi_i(t) \ge \varphi_{i0} > 0\ (1 \le i \le n);\ b)\ \varphi_i(t) \to 0,\ t \to \infty\ (1 \le i \le n);$

$c)\ (\varphi_i(t))^{-\frac{1}{2}} = e^{-\lambda_i t}O(1)\ (\lambda_i - const > 0, 1 \le i \le n);\ d)\ t_0 = 0,\ (\varphi_i(t))^{-\frac{1}{2}} =$

$= (t+\delta)^{-\gamma}O(1)\ (\delta, \gamma - const > 0, 1 \le i \le n);\ e)\ (\varphi_i(t))^{-\frac{1}{2}} \in L^{p_i}(J, R_+ \setminus \{0\})\ (p_i > 0,\ 1 \le i \le n),$

то для компонент $x_i(t)$ $(i = 1..n)$ любого решения $x(t) = \{x_i(t)\}$ СИДУ (9.1) верны утверждения:

$a)\ x_i(t) = O(1)\ (1 \le i \le n);\ b)\ x_i(t) \to 0,\ t \to \infty\ (1 \le i \le n);$

$c)\ x_i(t) = e^{-\lambda_i t}O(1)\ (\lambda_i > 0, 1 \le i \le n);\ d)\ ,\ x_i(t) = (t+\delta)^{-\gamma}O(1)\ (t_0 = 0,$

$\delta, \gamma > 0, 1 \le i \le n);\ e)\, x_i(t) \in L^{p_i}(J, R_+)\ (p_i > 0,\ 1 \le i \le n).$

Из (9.14) получается

Следствие 9.2. Если выполняются все условия теоремы 9.1;
2) $\Delta(t) \ge diag(d_1(t),...,d_n(t)),\ d_i(t) \ge d_{i0}(t) > 0$ (соответственно $d_i(t) > 0$, $(d_i(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})\ (1 \le i \le n),$ то для компонет $x_i(t)$ $(i = 1..n)$ любого решения $x(t) = \{x_i(t)\}$ СИДУ (9.1) справедливы утверждения: $x_i(t) \in L^2(J, R)$ (соответственно $x_i(t) \in L^1(J, R))\ (1 \le i \le n)$.

Первое утверждение сразу следует из (9.14), а второе-из: $|x_i(t)| \le \frac{1}{2}[d_i(t)^{-1} + d_i(t)(x_i(t))^2]\ (1 \le i \le n),$ аналогично следствию 3.5 из [11, с. 117].

Приведем простейший

Пример [61]. ИДУ

$$x'(t) + \int_0^t \frac{\exp(\frac{5}{4}\tau)}{2t - \tau + 1}\ x(\tau)d\tau = 0,\ \ t \ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 9.1 при $n = 1$,

$P(t)=\frac{1}{4},\ \varphi_1(t)\equiv e^{\frac{t}{4}},\ \Psi(t)\equiv \exp(\frac{5}{4}t),$ здесь $t_0=0,\ R(t,\tau)\equiv\frac{1}{2t-\tau+1}e^{-t},$

$\Delta(t)\equiv\frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}},\ M_1(t)\equiv\frac{1}{4}e^{-t},\ M_2(t)\equiv-\frac{1}{4}e^{-\frac{9t}{4}},\ \Phi_1(t)\equiv e^{\frac{t}{4}}-\frac{1}{2},\ \Phi_2(t)\equiv\frac{1}{2}.$

Значит, для любого решения $x(t)$ этого уравнения справедливы утверждения:

$x(t)=O(1)\exp\,(-\frac{t}{8}),\quad \frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}}x^2\in L^1(R_+,R_+).$

Заметим, что для уравнения приведенного примера нарушается условие J.J. Levin'a [62]: $\sup\limits_{t\in J}K(t,t)<\infty,$ а также условие Л.М. Березанского [58]: $K(t,t_0)\geq\delta>0.$

Отметим, что скалярный случай приведенного результата опубликован в статье автора [61].

§ 10. Асимптотическая эквивалентность систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

Результаты этого параграфа получены совместно с Ю.А.Ведь и поэтому стиль изложения материала в духе Ю.А.Ведь сохранен, т.е. излагаются аналогично, как в главе 1 настоящей работы.

Изучается асимптотическая эквивалентность интегро-дифференциальных систем

$$x'(t)=[A+B(t)]x(t)+\int_{t_0}^{t}[K(t-\tau)+Q(t,\tau)]x(\tau)d\tau,\ t\geq t_0, \tag{10.1}$$

$$y'(t)=Ay(t)+\int_{t_0}^{t}K(t-\tau)y(\tau)d\tau,\ t\geq t_0, \tag{10.2}$$

$$x'(t)=Ax(t)+\int_{t_0}^{t}K(t-\tau)y(\tau)d\tau+$$

$$+f(t)+F(t,x(t),\int_{t_0}^{t}H(t,\tau,x(\tau))d\tau,\ \ t\geq t_0 \tag{10.3}$$

$$y'(t)=Ay(t)+\int_{t_0}^{t}K(t-\tau)y(\tau)d\tau+f(t),\quad t\geq t_0, \tag{10.4}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - $n\times 1$ векторные функции; A - постоянная $n\times n$ матрица; $K(t)$ - $n\times n$ матричная функция, непрерывная при $t\geq 0$; $B(t)$ и $Q(t,\tau)$ - n×n матричные функции, непрерывные при $t\geq t_0$ и $t\geq\tau\geq t_0$; $f(t)$ - $n\times 1$ векторная функция, непрерывная при $t\geq t_0$; $F(t,x,\vartheta)$ и $H(t,\tau,x)$ - $n\times 1$ и $p\times 1$, соответственно, векторные функции, непрерывные в области $D=\{t_0\leq t<\infty,\ t_0\leq\tau\leq t<\infty,\ \|x\|<\infty,\ \|\vartheta\|<\infty\}$ и удовлетворяющие в D условию Липшица

$\|F(t,x_1,\vartheta_1)\|-\|F(t,x_2,\vartheta_2\|\leq g(t)\|x_1-x_2\|+g_1(t)\|\vartheta_1-\vartheta_2\|$,

$\|H(t,\tau,x_1)-H(t,\tau,x_2)\|\leq h(t,\tau)\|x_1-x_2\|$

с неотрицательными непрерывными функциями $g(t), g_1(t)$ и $h(t,\tau)$ при $t\geq t_0$ и $t\geq\tau\geq t_0$.

Под $\|x\|$ для $n\times 1$ вектора $x=(x_1,\ldots,x_n)$ и $\|A\|$ для $n\times n$ матрицы $A=(a_{ik})$ понимается

$\|x\|=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$, $\|A\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$,

или

$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\|A\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|$,

или

$\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|A\|=\gamma^{\frac{1}{2}}$,

где γ - наибольшее собственное значение матрицы A^*A (A^* - транспонированная матрица для матрицы A). Также часто встречающиеся способы задания нормы вектора и матрицы приведены, например, в [63, с.11-12, 142-143; 64, с.10].

В случае третьего способа задания нормы матрицы имеет место оценка

$\|A\|\leq(\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Каждое решение систем (10.1), (10.2) (10.3), (10.4) с любыми фиксированными начальными данными Коши в точке t_0 однозначно определено и непрерывно дифференцируемо на полуинтервале $J=[t,\infty)$, что следует из результатов § 1 главы 1 настоящей работы.

Системы (10.1) и (10.2) или (10.3) и (10.4) называются асимптотические эквивалентными, если между их решениями $x(t)$ и $y(t)$ можно установить взаимное соответствие такое, что

$$\lim_{t\to\infty}[x(t)-y(t)]=0. \tag{0}$$

Асимптотическая эквивалентность между системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и системами линейных дифференциальных уравнений изучалась в работах [28,65- 70].

В работах [71-74] изучена асимптотическая эквивалентность между системами операторно-дифференциальных уравнений и невозмущенными системами дифференциальных уравнений. В [71, 72] невозмущенная система является линейной и нелинейной, а в [73,74] - линейная.

В монографии [64, с.48-50] изучалась асимптотическая эквивалентность линейных однородных функционально-дифференциальных уравнений с взаимно однозначным соответствием между их решениями.

Изучение асимптотической эквивалентности систем (10.1), (10.2) и систем (10.3), (10.4) проводится методом интегральных соотношений, оценок и применением теоремы Банаха о существовании обратного оператора (для систем (10.1), (10.2)) построением специальных последовательных приближений, как в § 1 главы 1 настоящей работы (для систем (10.3), (10.4)).

В предположении, что все решения системы (10.2) стремятся к конечным предельным векторам при $t\to\infty$, устанавливаются достаточные условия, при выполнении которых каждому решению $x(t)$ системы (10.1) соответствует решение $y(t)$ системы (10.2) такое, что имеет место соотношение (0), $y(t)$ единственно, ненулевому решению системы (10.1) соответствует ненулевое решение системы (10.2), каждому решению $y(t)$ системы (10.2) соответствует решение $x(t)$ системы (10.1) такое, что имеет место соотношение (0), ненулевому решению системы (10.2) соответствует ненулевое решение системы (10.1), $x(t)$ в соотношении (0) единственно.

Показывается существенность каждого условия.

В теореме Левинсона [74;75, с. 159] об асимптотической эквивалентности соответствующих дифференциальных систем

$$x'(t) = [A + B(t)]x(t),\ t \geq t_0, \tag{10.1^0}$$

$$y'(t) = Ay(t), \tag{10.2^0}$$

получающихся из (10.1), (10.2) при $K(t) \equiv Q(t,\tau) \equiv 0$, требуется ограниченность всех решений системы (10.2^0) на полуинтервале J и условие

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty\ . \tag{A^0}$$

Показывается, что в формулировке теоремы Левинсона, приведенной в [75, с.159] имеется неточность, а именно не имеет места однозначность взаимного соответствия между решениями дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0).

Показывается, что предположение о стремлении всех решений системы (10.2) к конечным предельным векторам при $t \to \infty$, вообще говоря, нельзя заменить предположением об ограниченность всех решений системы (10.2) на полуинтервале J. Таким образом, выявлено, что теорема Левинсона об асимптотической эквивалентности линейных однородных дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0) не имеет места для интегро-дифференциальных систем (10.1) и (10.2).

Выявлена также другая характерная особенность интегро-дифференциальных систем (10.1) и (10.2) по сравнению с дифференциальными системами (10.1^0) и (10.2^0) по их асимптотической эквивалентности.

В предположении, что все решения системы (10.4) стремятся к конечным предельным векторам при $t \to \infty$, устанавливаются достаточные условия асимптотической эквивалентности систем (10.3) и (10.4) с взаимно однозначным соответствием между их решениями.

Асимптотическая эквивалентность соответствующих дифференциальных систем

$$x'(t) = Ax(t) + f(t) + F\big(t, x(t)\big), t \geq t_0, \tag{10.3^0}$$

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), t \geq t_0, \tag{10.4^0}$$

получающихся из (10.3), (10.4) при $K(t) \equiv 0$, $F(t, x, \vartheta) \equiv F(t, x)$, установлена в работе [15], где на $F(t, x)$ вместо условия Липшица наложено условие $\|F(t, x)\| \leq g(t)\|x\|$ и требуется ограниченность всех решений системы (10.4^0) на полуинтервале J и $\int_{t_0}^{\infty} g(t)dt < \infty$.

Линейная возмущенная система

Обозначим через $X(t)$ и $Y(t)$ фундаментальные матрицы, единичные при $t = t_0$, соответственно систем (10.1) и (10.2). Такие матрицы существуют и единственны на J в силу однозначной разрешимости на J задачи Коши с любыми фиксированными начальными данными в точке t_0 для систем (10.1) и (10.2).

Лемма 10.1. Если все решения системы (10.2) ограничены на полуинтервале J, то для фундаментальной матрицы $X(t)$ справедлива оценка

$$\|X(t)\| \leq Y_0 M(t),\ t \in J, \tag{10.5}$$

где

$Y_0 = \sup_J \|Y(t)\| < \infty$,

$M(t) \equiv \exp\{Y_0 \int_{t_0}^{t} [\|B(s)\| + \int_{t_0}^{s} \|Q(s, \tau)\| \exp(-Y_0 \int_{\tau}^{s} \|B(\eta)\| d\eta) d\tau] ds\}$.

Доказательство. Из тождества

$$X(t) \equiv Y(t) + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t - s + t_0) \left[B(s)X(s) + \int\limits_{t_0}^{s} Q(s, \tau)X(\tau)d\tau \right] ds, t \in J, \tag{10.6}$$

получаем

$$||X(t)|| \leq Y_0 + Y_0 \int\limits_{t_0}^{t} [\|B(s)\| \|X(s)\| + \int\limits_{t_0}^{s} \|Q(s, \tau)\| \|X(\tau)\| d\tau]\, ds, \quad t \in J. \tag{10.7}$$

Применяя к неравенству (10.7) лемму 2.1 [3], имеем (10.5).

Теорема 10.1. Пусть

1) все решения системы (10.2) стремятся к конечным предельным векторам при $t \to \infty$;

2) $\int_{t_0}^{\infty}[\|B(t)\| + \int_{t_0}^{t}\|Q(t,\tau)\|d\tau]dt < \infty$. (A)

Тогда каждому решению $x(t)$ системы (10.1) соответствует решение $y(t)$ системы (10.2) такое, что имеет место соотношение (0).

Пусть, кроме того,

3) $\det \mathrm{P} \quad \neq 0$,

где $\mathrm{P} = \lim_{t\to\infty} Y(t)$ - конечная постоянная $n \times n$ матрица.

Тогда в соотношении (0) $y(t)$ единственно.

Пусть выполняются условия 1), 2) и

4) $q = Y_0 \int_{t_0}^{\infty}\left[\|B(t)M(t)\| + \int_{t_0}^{t}\|Q(t,\tau)\|M(\tau)d\tau\right]dt < 1.$ (q)

Тогда любому ненулевому решению системы (10.1) соответствует в соотношении (0) ненулевое решение системы (10.2). Каждому решению $y(t)$ системы (10.2) соответствует решение $x(t)$ системы (10.1) такое, что имеет место соотношение (0). При этом любому ненулевому решению системы (10.2) соответствует ненулевое решение системы (10.1). Пусть, кроме того, выполняется условие 3). Тогда в соотношении (0) $x(t)$ единственно.

Доказательство. Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ системы (10.1) имеем

$$x(t) = Y(t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)[B(s)x(s) +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)x(\tau)d\tau]ds, \qquad t \in J. \tag{10.8}$$

Для произвольно фиксированного решения $\mathrm{y(t)}$ системы (10.2) имеем

$$\mathrm{y(t) = Y(t)y(t_0),\ t \in J.} \tag{10.9}$$

Из (10.8) и (10.9) получаем

$$\mathrm{x(t) - y(t) = Y(t)[x(t_0) - y(t_0)]+}$$
$$+\int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)[B(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)x(\tau)d\tau]ds,\ t \in J. \qquad (10.10)$$

Из условия 1) следует, что все решения системы (10.2) ограничены на полуинтервале J. В силу ограниченности всех решений системы (10.2) на J и условия (A) на основании следствия 6 [76, с.136] все решения системы (10.1) ограничены на J. Используя ограниченность на J всех решений системы (10.1) и условие (A), имеем

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\| B(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)d\tau \right\| ds < \infty. \qquad (10.11)$$

В силу условия 1) и соотношения (10.11) из (10.10) получаем

$$\lim_{t\to\infty}[x(t) - y(t)] =$$
$$= P\{x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \left[B(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)x(\tau)\,d\tau\right] ds\} = 0 \qquad (10.12)$$

Из (10.12) вытекает, что для любых решений $x(t)$ и $y(t)$ соответственно систем (10.1) и (10.2) соотношение (0) имеет место тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$P\{x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \left[B(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)\,x(\tau)d\tau\right] ds\} = 0. \qquad (10.13)$$

Соотношение (10.13) определяет зависимость между всеми решениями $x(t)$ и $y(t)$ соответственно систем (10.1) и (10.2), для которых имеет место соотношение (0).

В случае $\mathrm{P} = 0$ соотношение (10.13) и, значит, соотношение (0) выполняется для любых решений $x(t)$ и $y(t)$ соответственно систем (10.1) и (10.2).

Пусть $P \neq 0$.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ системы (10.1) положим

$$y(t_0) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \left[B(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)x(\tau)d\tau\right] ds. \qquad (10.14)$$

Тогда для соответствующего решения $y(t)$ системы (10.2) справедливо соотношение (0). В силу условия 3) соотношение (10.14) однозначно определяется из (10.13). Следовательно, $y(t)$ в соотношении (0) единственно.

При выполнении условия 3) соотношение (10.14) определяет зависимость между всеми решениями $x(t)$ и $y(t)$ соответственно систем (10.1) и (10.2), для которых имеет место соотношение (0).

Используя

$$x(t) = X(t)x(t_0) \tag{10.15}$$

запишем (10.14) в виде

$$(I - P_0)x(t_0) = y(t_0), \tag{10.16}$$

где I - единичная $n \times n$ матрица,

$$P_0 = \int_{t_0}^{\infty} [B(s)X(s) + \int_{t_0}^{s} Q(s,\tau)X(\tau)d\tau]ds$$

- конечная постоянная $n \times n$ матрица.

Если существует обратная матрица $(I + P_0)^{-1}$, то для $x(t) \not\equiv 0$ на J и, значит, $x(t_0) \neq 0$ из (10.16) вытекает, что $y(t_0) \neq 0$. Следовательно, $y(t) \not\equiv 0$ на J. Согласно теореме Банаха [77, с.156], существование обратной матрицы $(I + P_0)^{-1}$ обеспечивается соотношением

$$\|P_0\| < 1. \tag{10.17}$$

В силу оценки (10.5) и условия (q) справедливо (10.17).

Пусть теперь произвольно задан начальный вектор $y(t_0)$ решения $y(t)$ системы (10.2). Тогда в силу существования обратной матрицы $(I + P_0)^{-1}$ из (10.16) однозначно определяется $x(t_0)$ в зависимости от $y(t_0)$. Поэтому для решения $x(t)$ системы (10.1) с начальным вектором

$$x(t_0) = (I + P_0)^{-1}y(t_0) \tag{10.18}$$

имеет место соотношение (0), решению $y(t) \not\equiv 0$ на J системы (10.2) соответствует решение $x(t) \not\equiv 0$ на J системы (10.1). Учитывая условие 3), заключаем, что $x(t)$ в соотношении (0) единственно.

Следствие 10.1. Если выполняются условия 1), 2), и 4) теоремы 10.1, то системы (10.1) и (10.2) асимптотически эквивалентны. Если, кроме того, выполняется условие 3) теоремы 10.1, то соответствие между решениями систем (10.1) и (10.2) в соотношении (0) является взаимно однозначным.

Следствие 10.2. Если все решения системы (10.2) стремятся к нулю при $t \to \infty$ и выполняется условие (А), то все решения системы (10.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Замечание 10.1. В монографии [64, с.48-50] устанавливается сразу асимптотическая эквивалентность с взаимно однозначным соответствием линейных однородных функционально-дифференциальных уравнений, в частности, систем (10.1) и (10.2), без детализации, которая дана в теореме 10.1. При этом вместо условия (q) фигурирует условие

$$\det P_1 \neq 0,$$

Где $P_1 = \lim_{t\to\infty} X(t)$ - конечная постоянная $n \times n$ матрица.

Показывается существенность условий типа $\det P \neq 0$ и $det\, P_1 \neq 0$ для рассматриваемых функционально-дифференциальных уравнений на примерах нагруженных дифференциальных уравнений.

В силу условий 1), 2) теоремы 10.1 имеет место соотношение

$$P_1 = P(I + P_0),$$

что вытекает из (10.6).

Следовательно, $\det P_1 = \det P \det(I + P_0)$.

Замечание 10.2. Справедливо соотношение

$$Y_0[||B(t)||M(t) + \int_{t_0}^{t} \|Q(t,\tau)\| M(\tau)d\tau] \leq M'(t), t \in J. \qquad (10.19)$$

Следовательно, условие (q) будет выполняться, если

$$q^0 = Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [\|B(s)\| + \int_{t_0}^{s} \|Q(s,\tau)\| \exp\left(-Y_0 \int_{\tau}^{s} \|B(\eta)d\eta\|\right)d\tau]ds < \ln\, 2. \quad (q^0)$$

Условие (q) будет нарушаться, если

$$q' = Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [\|B(s)\| + \int_{t_0}^{s} \|Q(s,\tau)\| d\tau \geq 1. \qquad (q')$$

В самом деле, обозначая левую часть неравенства (10.19) через $R(t)$ получаем

$$R(t) = Y_0\{\|B(t)\|M(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \|Q(t,\tau)\|M(\tau)\exp\left[-Y_0\int\limits_{t_0}^{\tau}\|B(\eta)\|d\eta\right] *$$

$* \exp\,[Y_0 \int_{t_0}^{\tau}\|B(\eta)\|d\eta]d\tau\} \leq Y_0\{\|B(t)\|M(t) + M(t)\exp\left[-Y_0\int_{t_0}^{\tau}\|B(\eta)\|d\eta\right] *$

$* \int_{t_0}^{\tau}\|Q(t,\tau)\|\exp\left[Y_0\int_{t_0}^{\tau}\|B(\eta)\|d\eta\right]d\tau = Y_0 M(t)\,\{\|B(t)\| +$

$+ \int_{t_0}^{t}\|Q(t,\tau)\| exp\,[-Y_0\int_{\tau}^{t}\|B(\eta)\|d\eta]d\tau\} = M'(t),\, t \in J.$

Отсюда следует (10.19). Из (10.19) имеем

$$q = \exp(q^0) - 1.$$

Следовательно, из (q^0) вытекает (q). Так как $M(t) \geq 1$, $t \in J$, то из (q') вытекает, что нарушается условие (q).

Пример 10.1. Для систем интегро-дифференциальных уравнений

$x_i'(t) = -x_i(t) + \int\limits_0^t e^{\tau - t}\, x_i(\tau)d\tau +$

$+ \int_0^t (-1)^{i+1}e^{-2t}\sum_{j=1}^{2} x_j(\tau)d\tau \quad (i = 1{,}2), t \geq 0,$ (10.20)

$y_i'(t) = -y_i(t) + \int_0^t e^{\tau-t}\, y_i(\tau)d\tau\ (i = 1{,}2), t \geq 0,$ (10.21)

выполняются все условия теоремы 10.1, в данном случае $\det P = \frac{1}{4} \neq 0$,

$q^0 = \frac{1}{2} < \ln 2$, и для них справедливы все утверждения теоремы 10.1;

общее решение систем (10.20) и (10.21) имеет соответственно вид

$x_i(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})x_i(0) + \frac{(-1)^{i+1}}{8}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-4t} + t^2 e^{-2t}\right) *$

$* \,(x_1(0) + x_2(0))\ (i = 1{,}2),$

$y_i(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})y_i(0)\ (i = 1{,}2).$

Замечание 10.3. Условие 1) теоремы 10.1, вообще говоря, нельзя заменить условием ограниченности всех решений системы (10.2) на полуинтервале J.

В самом деле, для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$x_i'(t) = -\int_0^t x_i(\tau)d\tau + \int_0^t (-1)^i e^{-2t} \sum_{j=1}^2 x_j(\tau)d\tau \ \ (i = 1,2),\ t \geq 0, \quad (10.22)$$

система интегро-дифференциальных уравнений

$$y_i'(t) = -\int_0^t y_i(\tau)d\tau \ (i = 1,2),\ t \geq 0, \quad (10.23)$$

имеет общее решение

$$y_i(t) = y_i(0)\cos t \ \ (i = 1,2),$$

которое ограничено при $t \geq 0$, и выполняются условия (A) и (q^0) $(q^0 = \frac{1}{2})$, значит, (q). Однако для решений $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$: $x_i(t) = x_i(0)\cos t +$

$$+\frac{(-1)^i}{8}(\cos t + \sin t - e^{-2t}\cos t - 3e^{-2t}\sin t)(x_1(0) + x_2(0)) \quad (i = 1,2)$$

системы (10.22) с $x_1(0) + x_2(0) \neq 0$ (соответственно для решений) $y(t) =$ $= (y_1(t), y_2(t))$ системы (10.23) с $y_1(0) + y_2(0) \neq 0$) система (10.23) (соответственно система (10.22)) не имеет решений $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ (соответственно $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$), для которых существует предел (0).

Замечание 1.4. При нарушении условия (A) относительно интегрального члена все ненулевые решения интегро-дифференциальной системы (10.1) могут стремиться по норме к бесконечности при $t \to \infty$, только для нулевых решений интегро-дифференциальных систем (10.1) и (10.2) может иметь место соотношение (0).

В самом деле, для интегро-дифференциальных систем $x_i'(t) = -(1 -$ $-\frac{5}{2}e^{-t})x_i(t) - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-t}\right)x_{3-i}(t) + \int_0^t [(e^{\tau-t} + \frac{3}{2}e^{t-2\tau} - e^{t-3\tau} + e^{2t-3\tau}) *$ $* x_i(\tau) + \left(e^{\tau-t} + \frac{3}{2}e^{t-2\tau} - e^{t-3\tau} - e^{2t-3\tau}\right)x_{3-i}(\tau)]d\tau \quad (i = 1,2)\ t \geq 0,$ (10.24)

$$y_i'(t) = -[y_1(t) + y_2(t)] + \int_0^t e^{\tau-t}[y_1(\tau) + y_2(\tau)]d\tau \ (i = 1,2),\ t \geq 0, \quad (10.25)$$

выполняются условия 1) и 3) теоремы 1.1, общее решение системы (1.25) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0(1 + 2e^{-3t}) + (-1)^i c_2^0 \quad (i = 1,2),$$

где c_1^0, c_2^0 - произвольные постоянные, $\det P = \frac{1}{3} \neq 0$, но нарушается условие (A) относительное интегральных членов, здесь $\|B(t)\| \equiv 3e^{-t}$, $\|Q(t,\tau)\| \geq\geq e^{t-2\tau}$, $t \geq \tau \geq 0$, и все ненулевые решения

$$x_i(t) = c_1e^t + (-1)^i c_2 e^{2t} \ (i = 1,2),$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные, системы (10.24) стремятся по норме к бесконечности при $t \to \infty$; только для нулевых решений систем (10.24) и (10.25) имеет место соотношение (0).

Отметим, что для соответствующих дифференциальных систем

$$x_i'(t) = \ -\left(1 - \frac{5}{2}e^{-t}\right)x_i(t) - (1 - \frac{1}{2}e^{-t})x_{3-i}(t) \ (i = 1,2),\ t \geq 0, \qquad (10.24^0)$$

$$y_i'(t) = -[y_1(t) + y_2(t)] \ (i = 1,2), \qquad (10.25^0)$$

выполняются соответствующие условия 1), 2) теоремы 10.1 и, значит условия теоремы Левинсона, общее решение системы (10.25^0) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0 e^{-2t} + (-1)^i c_2^0 \ (i = 1,2)$$

(c_1^0, c_2^0 - произвольные постоянные). Каждому решению $x_i(t) = c_1 \exp(-2t - 3e^{-t}) + (-1)^i c_2 \exp(-2e^{-t})$ $(i = 1,2)$ (c_1, c_2 $-$ произвольные постоянные) системы (10.24^0) (соответственно каждому решению системы (10.25^0) соответствует однопараметрическое семейство решений

$$y_i(t) = c_1^0 e^{-2t} + (-1)^i \mathrm{c}_2 \ (i = 1,2)$$

(c_1^0 - параметр) системы (10.25^0) (соответственно

$$x_i(t) = c_1 \exp(-2t - 3e^{-t}) + (-1)^i c_2^0 \exp(-2e^{-t}) \ (i = 1,2)$$

(c_1 - параметр) системы (10.24^0)) таких, что имеет место соотношение (0). В данном случае $\det \mathrm{P} = 0$.

На примерах дифференциальных систем (10.24^0) и (10.25^0) показано, что в формулировке теоремы Левинсона, приведенной в [74, с.159], имеется неточность, а именно не имеет места однозначность взаимного соответствия между решениями дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0).

Замечание 10.5. Для дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0) можно обеспечить справедливость соответствующего условия (q) посредством выбора достаточно большого t_0.

В самом деле, имеем

$$q = \int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| Y_0 \exp\{Y_0 \int_{t_0}^{t} \|B(s)\| ds\} dt = \exp\{Y_0 \int_{t_0}^{\infty} \|B(s)\| ds\} - 1.$$

Следовательно, соответствующее условие (q) эквивалентно условию $\int_{t_0}^{\infty} \|B(s)\| ds < Y_0^{-1} \ln 2$, что можно обеспечить в силу соответствующего условия (A) посредством выбора достаточно большого t_0.

Замечание 10.6. При нарушении условия (q) любому ненулевому решению $x(t)$ интегро-дифференциальной системы (10.1) может соответствовать в соотношении (0) только нулевое решение $y(t) \equiv 0$ интегро-дифференциальной системы (10.2), любому ненулевому решению $y(t)$ интегро-дифференциальной системы (10.2) может не соответствовать решений $x(t)$ интегро-дифференциальной системы (10.1), удовлетворяющих соотношению (0).

В самом деле, для интегро-дифференциальных систем

$$x_i'(t) = -\frac{1}{2}(1 + 2e^{-2t})x_i(t) + \frac{1}{2}(1 - 2e^{-2t})x_{3-i}(t) + \int\limits_0^t [(e^{-2(t-\tau)} -$$

$$-2\mathrm{e}^{-2t} - e^{-t})x_i(\tau) - (e^{-2(t-\tau)} + 2e^{-2t} -$$

$$-e^{-t})x_{3-i}(\tau)]d\tau \;\; (i = 1,2), \;\; t \geq 0, \qquad (10.26)$$

$$y_i'(t) = -\frac{1}{2}[y_i(t) - y_{3-i}(t)] +$$

$$+\int_0^t e^{-2(t-\tau)}[y_i(\tau) - y_{3-i}(\tau)]d\tau \qquad (i = 1,2), \;\; t \geq 0, \qquad (10.27)$$

выполняются условия 1)-3) теоремы 10.1, общее решение системы (10.27) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0 + (-1)^i(2 + e^{-3t})c_2^0 \;\; (i = 1,2),$$

где c_1^0, c_2^0 - произвольные постоянные, $\det \mathrm{P} = \frac{2}{3} \neq 0$, но нарушается условие (q), здесь $q' = \frac{11}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 > 1$, и каждому решению

$$x_i(t) = c_1 e^{-2t} + (-1)^i c_2 e^{-t} \; (i = 1,2),$$

где, $c_{1,}\, c_2$ - произвольные постоянные, системы (10.26) соответствует только нулевое решение $y_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2)$ системы (10.27) для которого имеет место соотношение (0); любому ненулевому решению системы (10.27) не соответствует решение системы (10.26), удовлетворяющее соотношению (0).

Для соответствующих дифференциальных систем

$$x_i'(t) = -\frac{1}{2}\,(1+2e^{-2t})x_i(t) + \frac{1}{2}(1-2e^{-2t})x_{3-i}(t)\ (i=1{,}2),\ t \geq 0, \qquad (10.26^0)$$

$$y_i'(t) = -\frac{1}{2}\,[y_i(t) - y_{3-i}(t)]\ (i=1{,}2), \qquad (10.27^0)$$

выполняются соответствующие условия 1), 2) теоремы 10.1 и, значит, условия теоремы Левинсона, но нарушается соответствующее условие 3) теоремы 10.1, общее решение системы (10.27^0) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0 + (-1)^i c_2^0 e^{-t}\ \ (i=1{,}2)$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные), $\det \mathrm{P} = 0$, и каждому решению

$$x_i\ (t) = c_1\ \exp(e^{-2t}) + (-1)^i c_2\ e^{-t}\ \ (i=1{,}2),$$

$c_{1,}\ c_2$ - произвольные постоянные, системы (10.26^0) (соответственно каждому решению системы (10.27^0)) соответствует однопараметрическое семейство решений

$$y_i(t) = (-1)^i c_2^0 e^{-t} + \mathrm{c}_1\ (i=1{,}2)$$

(c_2^0 - параметр) системы (10.27^0) соответственно

$$x_i\ (t) = (-1)^i c_2\ e^{-t} + c_1^0 \exp(e^{-2t})\ \ (i=1{,}2)$$

(c_2 - параметр) системы (10.26^0)) таких, что имеет место соотношение (0).

Для интегро-дифференциальных систем

$$x_i'(t) = \frac{1}{2}(3-2e^{-t}-4e^{-2t})x_i(t) - \frac{1}{2}(1+2e^{-t}-4e^{-2t})x_{3-i}(t) -$$

$$-\int_0^t \left[e^{-2(t-\tau)} + 4e^{-4(t-\tau)}\right)x_i(\tau) +$$

$$+\left(e^{-2(t-\tau)} - 4e^{-4(t-\tau)}\right)x_{3-i}(\tau)]d\tau\ (i=1{,}2), \qquad t \geq 0, \qquad (10.28)$$

$$y_i'(t) = \frac{3}{2}y_i(t) - \frac{1}{2}y_{3-i}(t) - \int_0^t [(e^{-2(t-\tau)} + 4e^{-4(t-\tau)})y_i(\tau) + (e^{-2(t-\tau)} -$$

$$-4e^{-4(t-\tau)})y_{3-i}(\tau)]d\tau\ (i=1{,}2),\ t \geq 0 \qquad (10.29)$$

выполняются условия 1), 2), 3) теоремы 10.1, общее решение системы (10.29) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0(2-e^{-t}) + (-1)^i c_2^0(2-e^{-2t})\ (i=1{,}2),$$

где c_1^0, c_2^0 - произвольные постоянные, $\det P = 4 \neq 0$, но нарушается (q), здесь $q' = 5$, и каждому решению

$$x_i(t) = c_1 e^{-t} + (-1)^i c_2 e^{-2t} \ (i = 1,2),$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные, системы (10.28) соответствует только нулевое решение $y_i(t) \equiv 0 \ (i = 1,2)$ системы (10.29), для которого имеет место соотношение (0); любому ненулевому решению системы (10.29) не соответствует решение системы (10.28), удовлетворяющее соотношению (0).

Для соответствующих дифференциальных систем

$$x_i'(t) = \frac{1}{2}(3 - 2e^{-t} - 4e^{-2t})x_i(t) -$$

$$-\frac{1}{2}(1 + 2e^{-t} - 4e^{-2t})x_{3-i}(t) \ (i = 1,2), t \geq 0, \qquad (9.28^0)$$

$$y_i'(t) = \frac{3}{2}y_i(t) - \frac{1}{2}y_{3-i}(t) \qquad (9.29^0)$$

выполняется условие (A^0), но нарушается условие ограниченности всех решений системы (9.29^0) и на [0,∞), общее решение системы (9.29^0) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0 e^t + (-1)^i c_2^0 e^{2t} \ (i = 1,2)$$

(c_1^0, c_2^0 - произвольные постоянные), и соотношеное (0) имеет место только для нулевых решений систем (10.28^0) и (10.29^0); общее решение системы (10.28^0) имеет вид

$$x_i(t) = c_1 \exp(t + 2e^{-t}) + (-1)^i c_2 \exp(2t + 2e^{-2t}) \ (i = 1,2)$$

(c_1, c_2 - произвольные постоянные).

Таким образом, в смысле соответствия между ненулевыми решениями $x(t)$ и $y(t)$, для которых имеет место соотношение (0), интегро-дифференциальные системы (10.1) и (10.2) ведут себя, вообще говоря, отлично от соответствующих дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0). Именно при выполнении условия, что все решения системы (10.2) (соответственно системы (10.2^0)) стремятся к конечным предельным векторам при $t \to \infty$, и условия (A) (соответственно условия (A^0)), обеспечивающих соответствие каждому решению $x(t)$ системы (10.1) (соответственно системы (10.1^0)) решения y(t) системы (10.2) (соответственно системы (10.2^0)) такого, что имеет место соотношение (0), между любыми ненулевыми решениями $x(t)$ и $y(t)$ дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0) можно установить взаимное соответствие такое, что имеет место соотношение (0), а между ненулевыми решениями $x(t)$ и $y(t)$ интегро-дифференциальных систем (10.1) и (10.2) такого соответствия может не быть, т.е. любому ненулевому решению $x(t)$ интегро-дифференциальной систем (10.1) может соответствовать в соотношении (0) только нулевое решение $y(t) \equiv 0$ интегро-дифференциальной системы (10.2), любому ненулевому решению $y(t)$ интегро-дифференциальной системы (10.2) может не соответствовать решений $x(t)$ интегро-дифференциальной системы (10.1), удовлетворяющее соотношение (0).

На примерах дифференциальных систем (10.24^0), (10.25^0) и (10.26^0), (10.27^0) показана существенность соответствующего условия 3) теоремы 10.1 для дифференциальных систем (10.1^0) и (10.2^0). На примере дифференциальных систем (10.28^0), (10.29^0) показана существенность условия ограниченности всех решений дифференциальной системы (10.2^0) в теореме Левинсона.

Замечание 10.7. При нарушении условия 3) теоремы 10.1 интегро-дифференциальные системы (10.1) и (10.2) могут быть асимптотически эквивалентными без взаимно однозначного соответствия между их решениями.

В самом деле, для интегро-дифференциальных систем

$$x_i'(t) = \frac{1}{4(t+1)^3} x_i(t) - \frac{1}{4(t+1)^3} x_{3-i}(t) + \int_0^t \{[-\frac{1}{2} e^{2(\tau-t)} + \qquad (10.30)$$

$$+ \frac{2\tau^2+5\tau+2}{8(t+1)^3(\tau+1)^2}] x_i(\tau) - [\frac{1}{2} e^{2(\tau-t)} + \frac{2\tau^2+5\tau+2}{8(t+1)^3(\tau+1)^2}] x_{3-i}(\tau)\} d\tau \ (i = 1,2),\ t \geq 0,$$

$$y_i'(t) = -\int_0^t \frac{1}{2} e^{2(\tau-t)} [y_1(\tau) + y_2(\tau)] d\tau \ (i = 1,2),\ t \geq 0, \qquad (10.31)$$

выполняются условия 1), 2), 4) теоремы 10.1, но нарушается условие 3) теоремы 10.1, общее решение системы (10.31) имеет вид

$$y_i(t) = c_1^0 (t+1) e^{-t} + (-1)^i c_2^0 \ (i = 1,2),$$

где c_1^0, c_2^0 - произвольные постоянные, $q^0 < \frac{25}{48} < \ln 2$, $\det \mathrm{P} \quad = 0$, и каждому решению

$$x_i(t) = c_1(t+1)\mathrm{e}^{-t} + (-1)^i c_2 \exp(-\frac{1}{2(t+1)})\ (i = 1{,}2),$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные, системы (10.30) (соответственно каждому решению системы (10.31)) соответствует однопараметрическое семейство решений

$$y_i(t) = c_1^0(t+1)e^{-t} + (-1)^i c_2\ (i = 1{,}2)$$

(c_1^0 - параметр) системы (10.31)) (соответственно

$$x_i(t) = c_1(t+1)\mathrm{e}^{-t} + (-1)^i c_2^0 \exp(-\frac{1}{2(t+1)})\ (i = 1{,}2),$$

(c_1 - параметр) системы (10.30)) таких, что имеет место соотношение (0).

Для соответствующих дифференциальных систем

$$x_i'(t) = \frac{1}{4(t+1)^3} x_i(t) - \frac{1}{4(t+1)^3} x_{3-i}(t)\ (i = 1{,}2),\ t \geq 0, \qquad (9.30^0)$$

$$y_i'(t) = 0\ (i = 1{,}2) \qquad (9.31^0)$$

выполняются условия теоремы Левинсона и, кроме того, выполняется соответствующее условие 3) теоремы 10.1, $\det P = 1 \neq 0$, и системы (9.30^0) и (9.31^0) асимптотически эквивалентны с взаимно однозначным соответствием между их решениями.

Слабо нелинейная возмущенная система

Введем обозначения:

$$F_0(t) \equiv F(t, 0, \int_{t_0}^{t} H(t,\tau,0)d\tau,\ G(t,\tau) \equiv g_1(t)h(t,\tau),$$

$$F(t;x) \equiv F(t, x(t), \int_{t_0}^{t} H\big(t,\tau,x(\tau)\big)d\tau.$$

Лемма 10.2. Если

1) все решения системы (10.4) ограничены на полуинтервале J;
2) $\int_{t_0}^{\infty}[g(t) + \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)\, d\tau]dt < \infty, \qquad (A_1)$
3) $\int_{t_0}^{\infty}\|F_0(t)\|dt < \infty, \qquad (B_1)$

то все решения системы (10.3) ограничены на полуинтервале J, для любого решения $x(t)$ системы (10.3) имеет место оценка

$$\|x(t)\| \leq NM_1(t), t \in J, \tag{10.32}$$

где

$$N = \sup_J \left\| y_0(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)F_0(s)ds \right\| < \infty,$$

$$y_0(t) \equiv Y(t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)f(s)ds$$

- решение системы (10.4),

$$M_1(t) \equiv \exp\{Y_0 \int_{t_0}^{t} [g(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau) \exp\left(-Y_0 \int_{t}^{s} g(\eta)d\eta\right) d\tau]ds\}.$$

Доказательство. В случае $f(t) \equiv 0$ это предложение вытекает их [1, с.145; 66] без множителя

$$\exp(-Y_0 \int_{\tau}^{s} g(\eta)\, d\eta)$$

в функции $M_1(t)$. Имеем

$$x(t) = y_0(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)F(s;x)ds, t \in J. \tag{10.33}$$

В силу условия 1) из структуры общего решения неоднородной системы (10.4) следует, что все решения соответствующей однородной системы (10.2) ограничены на полуинтервале J. Из (10.33) получаем

$$\|x(t)\| \leq N + Y_0 \int_{t_0}^{t} [g(s)\|x(s)\| + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\|x(\tau)\|d\tau]ds, \quad t \in J. \tag{10.34}$$

Применяя к неравенству (10.34) лемму 2.1 [15], имеем (10.32). В силу условий 1) и (A_1) функция $M_1(t)$ ограничена на J. Следовательно, из (10.32) вытекает, что $x(t)$ ограничено на J.

Из (10.32) вытекает оценка

$$\|x(t)\| \leq [Y_0\|x(t_0)\| + f_0 + Y_0F_1]M_1(t), \quad t \in J, \tag{10.35}$$

где

$$f_0 = \sup_J \left\| \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)f(s)ds \right\| < \infty, F_1 = \int_{t_0}^{\infty} \|F_0(s)\|ds < \infty.$$

Теорема 10.2. Пусть

1) все решения системы (10.4) стремятся к конечным предельным векторам при $t \to \infty$;
2) выполняются условия (A_1) и (B_1).

Тогда каждому решению $x(t)$ системы (10.3) соответствует решение $y(t)$ системы (10.4) такое, что имеет место соотношение (0).

Пусть, кроме того,

3) выполняется условие 3) теоремы 10.1

Тогда в соотношении (0) $y(t)$ единственно.

Пусть выполняются условия 1), 2) и

4) $q_1 = Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [g(t) M_1(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, \tau) M_1(\tau) d\tau] dt < 1$. $\quad (q_1)$

Тогда любому решению $x(t)$ системы (10.3) с ненулевым начальным вектором $x(t_0)$, для которого

$$\|x(t_0)\| > (1 - q_1)^{-1} [F_2 + q_1 (F_1 + f_0 Y_0^{-1})], \qquad (C_1)$$

где

$$F_2 = \left\| \int_{t_0}^{\infty} F_0(s) ds \right\| < \infty,$$

соответствует в соотношении (0) решение $y(t)$ системы (10.4) с ненулевым начальным вектором $y(t_0)$. Каждому решению $y(t)$ системы (10.4) соответствует решение $x(t)$ системы (10.3) такое, что имеет место соотношение (0). Пусть, кроме того, выполняется условие 3). Тогда в соотношении (0) $x(t)$ единственно.

Доказательство. В силу условия 1) все решения системы (10.4) ограничены на полуинтервале J, из структуры общего решения неоднородной системы (10.4) следует, что все решения соответствующей однородной системы (10.2) стремятся к конечным предельным векторам при $t \to \infty$ и, значит, ограничены на J. Поступая аналогично, как при доказательстве теоремы 10.1, с использованием леммы 10.2 получаем справедливость первых двух частей данной теоремы. При этом в случае $P \neq$ О начальный вектор $y(t_0)$ решения $y(t)$ системы (10.4), для которого имеет место соотношение (0), определяется следующим образом:

$$y(t_0) = x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} F(s;x)ds, \qquad (10.36)$$

где $x(t)$ - произвольно фиксированное решение системы (10.3) причем $y(t_0)$ определяется однозначно при выполнении условия 3).

При выполнении условия 3) соотношения (10.36) определяет зависимость между всеми решениями $x(t)$ и $y(t)$ соответственно систем (10.3) и (10.4), для которых имеет место соотношение (0).

Из (10.36), учитывая соотношения $x(t_0) \neq 0$, (10.35), (q_1) и (C_1), получаем $\|y(t_0)\| \geq \|x(t_0)\| - \left\|\int_{t_0}^{\infty} F(s;x)ds\right\| \geq \|x(t_0)\| - F_2 - \int_{t_0}^{\infty}\|F(s;x) -$ $-F_0(s)\|ds \geq (1-q_1)\|x(t_0)\| - [F_2 + q_1(F_1 + f_0 Y_0^{-1})] > 0.$ (10.37)

Из (10.37) вытекает, что $y(t_0) \neq 0$.

Пусть теперь произвольно задан начальный вектор $y(t_0)$ решения $y(t)$ системы (10.4). Тогда в силу условий 1) и 2) соотношение (10.36) определяет решение $x(t)$ системы (10.3), для которого имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) $x(t)$ единственно. Таким образом, нужно установить существование в классе $C^1[t_0,\infty)$ $n \times 1$ векторных функций, определенных и непрерывно дифференцируемых на полуинтервале J, решения $x(t)$ системы (10.3), удовлетворяющего соотношению (10.36), и при дополнительном выполнении условия 3) единственность такого решения $x(t)$. Так как в классе $C^1[t_0,\infty)$ системы (10.3) с начальным вектором $x(t_0)$ эквивалента системе интегральных уравнений (10.33), то, подставляя $x(t_0)$ из (10.36) в систему интегральных уравнений (10.33), получаем, что в классе $C^1[t_0,\infty)$ задача (10.3), (0) эквивалента системе интегральных уравнений

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)F(s;x)ds - \int_{t_0}^{\infty} Y(t)F(s;x)ds,\ t \geq t_0, \qquad (10.38)$$

где $y(t) = Y(t)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)f(s)ds$ - произвольно фиксированное решение системы (10.4).

Решение задачи (10.3), (0) в классе $C^1[t_0,\infty)$ ограничено на полуинтервале J. Итак, достаточно доказать существование непрерывно дифференцируемого и ограниченного на J решения системы интегральных уравнений (10.38) и при дополнительном выполнении условия 3) единственность такого решения.

Методом построения специальных последовательных приближений докажем, что система интегральных уравнений (10.38) имеет единственное решение в классе $\mathrm{O}[t_0,\infty)$ $n\times 1$ векторных функций, непрерывных и ограниченных на полуинтервале J.

Всякое решение $x(t)$ в классе $\mathrm{O}[t_0,\infty)$ системы интегральных уравнений (10.38) принадлежит классу $C^1[t_0,\infty)$.

Для системы (10.38) построим последовательные приближения:

$x_0(t)=0,\ t\in J,$

$$x_m(t)=y(t)+\int_{t_0}^{t}Y(t-s+t_0)F(s;x_m)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{\infty}Y(t)F(s;x_{m-1})ds\ \ (m=1,2,\dots),\ t\in J. \qquad (10.39)$$

Для каждого натурального числа m соотношение (10.39) представляет собой систему интегральных уравнений типа Вольтерра, если

$$\left\|\int_{t_0}^{\infty}F(s;x_{m-1})ds\right\|<\infty\ (m=1,2,\dots). \qquad (10.40)$$

Используя ограниченность на J всех решений системы (10.4) и условие 2), покажем, что система интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\varphi(t)=y(t)+\int_{t_0}^{t}Y(t-s+t_0)F(s;\varphi)ds+\psi(t),\ t\geq t_0, \qquad (10.41)$$

где $\psi(t)$ - $n\times 1$ векторная функция, непрерывная и ограниченная на полуинтервале J, имеем единственное решение в классе $\mathrm{O}[t_0,\infty)$. Для системы (10.41) построим последовательные приближения Пикара:

$\varphi_0(t)=0,\ t\in J,$

$$\varphi_m(t)=y(t)+\int_{t_0}^{t}Y(t-s+t_0)F(s;\varphi_{m-1})ds+$$

$$+\psi(t)\quad (m=1,2,\dots),\ t\in J. \qquad (10.42)$$

Методом полной математической индукции получаем, что $\varphi_m(t) \in \mathrm{O}[t_0, \infty)$ $(m = 1,2, \dots)$. Из (10.42) имеем

$$\|z_1(t)\| \le \mathrm{c},\ t \in J. \tag{10.43}$$

$$\|z_m(t)\| \le Y_0 \int_{t_0}^{t} [g(s)\|z_{m-1}(s)\| +$$

$$+\int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\|z_{m-1}(\tau)\|d\tau]ds\ (m = 1,2, \dots),\ \ t \in J, \tag{10.44}$$

где

$z_m(t) \equiv\ \varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)\ (m = 1,2, \dots)$

$$c = \sup_J \left\| y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t - s + t_0)F_0(s)ds + \psi(t) \right\| < \infty.$$

Предположим, что для натурального числа m

$$\|z_m(t)\| \le c\,\frac{(Q(t))^{m-1}}{(m-1)!},\ t \in J,$$

где

$$Q(t) \equiv Y_0 \int_{t_0}^{t} [g(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)d\tau]ds.$$

Тогда из (10.44) получаем

$$\|z_{m+1}(t)\| \le \frac{c}{(m-1)!} Y_0 \int_{t_0}^{t} [g(s)\big(Q(s)\big)^{m-1} + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\big(Q(\tau)\big)^{m-1} d\tau]ds \le$$

$$\le \frac{c}{(m-1)!} Y_0 \int_{t_0}^{t} \big(Q(s)\big)^{m-1} [g(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)d\tau]ds = \frac{c}{(m-1)!} \int_{t_0}^{s} \big(Q(s)\big)^{m-1} Q'(s)ds =$$

$$= c\,\frac{(Q(t))^m}{m!},\ t \in J.$$

Следовательно, на основании метода полной математической индукции справедлива оценка

$$\|z_m(t)\| \le c\,\frac{(Q(t))^{m-1}}{(m-1)!} \quad (m = 1,2, \dots),\ t \epsilon J. \tag{10.45}$$

Так как

$$sup_J\, Q(t) < \infty, \quad (10.46)$$

то из (10.45) вытекает, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m(t) \quad (10.47)$$

сходится абсолютно и равномерно на полуинтервале J. Сумма, скажем φ(t) ряда (10.47) непрерывно на J. В силу (10.45) получаем

$$\|\varphi(t)\| \le \sum_{m=1}^{\infty}\|z_m(t)\| \le c\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(Q(t)\right)^{m-1}}{(m-1)!} = c\exp\left(Q(t)\right),\, t \in J. \quad (10.48)$$

В силу (10.46) из (10.48) следует, что векторная функция $\varphi(t)$ ограничена на J. Переходя в (10.42) к пределу при $m \to \infty$ получаем, что $\varphi(t)$ является решением системы интегральных уравнений (10.41). Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - любые два решения системы интегральных уравнений (10.41) в классе $O[t_0, \infty)$. Тогда получаем

$$\|z(t)\| \le Y_0\int_{t_0}^{t}[g(s)\|z(s)\| + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\|z(\tau)\|d\tau]ds,\, t \in J, \quad (10.49)$$

где $z(t) \equiv \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$.

Согласно следствию 1 [1, с.122], из (10.49) вытекает, что $z(t) \equiv 0$ и, значит, $\varphi_2(t) \equiv \varphi_1(t)$ на J.

Соотношение (10.40) при $m = 1$ выполняется. Предположим, что соотношение (10.40) выполняется при $m = p$. Тогда соотношения (939) при $m = p$ представляет собой систему интегральных уравнений вида (10.41). Поэтому система (10.39) при $m = p$ имеет единственное решение $x_p(t)$ в классе $O[t_0, \infty)$. Следовательно, соотношение (10.40) при $m = p + 1$ выполняется. Таким образом, по индукции заключаем, что соотношения (10.40) выполняются, и, значит, соотношения (10.39) представляют собой системы интегральных уравнений вида (10.41). Поэтому система (10.39) имеют единственные решения $x_m(t)$ $(m = 1,2, \dots)$ в классе $O[t_0, \infty)$.

Из (10.39) имеем

$$\|u_m(t)\| \le c_m + Y_0 \int_{t_0}^{t} [g(s)\|u_m(s)\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\|u_m(\tau)\| d\tau] ds \ \ (m = 1,2,\dots), \qquad t \in J, \qquad (10.50)$$

где

$$u_m(t) \equiv x_m(t) - x_{m-1}(t) \qquad (m = 1,2,\dots),$$

$$c_1 = \sup_J \left\| y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t-s+t_0)F_0(s)ds - \int_{t_0}^{\infty} Y(t)F_0(s)ds \right\| < \infty,$$

$$c_m = Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [g(s)\|u_{m-1}(s)\| + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\|u_{m-1}(\tau)\| \, d\tau] ds < \infty \ (m = 2,\dots).$$

Применяя к неравенству (10.50) лемму 2.1 [15], получаем

$$\|u_1(t)\| \le c_1 M_1(t), \ t \in J, \qquad (10.51)$$

$$\|u_m(t)\| \le Y_0 M_1(t) \int_{t_0}^{\infty} [g(s)\|u_{m-1}(s)\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)\|u_{m-1}(\tau)\| d\tau] ds \ \ (m = 2,\dots), \ t \in J. \qquad (10.52)$$

Из (10.51), (10.52) имеем

$$U_1(t) \le c_1, \ t \in J, \qquad (10.53)$$

$$U_m(t) \le Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [g(s)M_1(s)U_{m-1}(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)M_1(\tau) *$$

$$* \, U_{m-1}(\tau)d\tau] ds \ (m = 2,\dots), \ t \epsilon J, \qquad (10.54)$$

где

$$U_m(t) \equiv \left(M_1(t)\right)^{-1} \|u_m(t)\| \ (m = 1,2,\dots).$$

Из (10.53), (10.54) получаем

$$R_1 \le c_1, \ \ R_m \le q_1 R_{m-1} \ \ (m = 1,2,\dots), \qquad (10.55)$$

где

$$R_m = \sup_J U_m(t) < \infty \ (m = 1,2,\dots).$$

Из (10.55) имеем

$$R_m \leq c_1 q_1^{m-1} \ (m = 1,2,\dots). \tag{10.56}$$

Из (10.56) получаем

$$u_m(t) \leq c_1 M_1(t) q_1^{m-1} \ (m = 1,2,\dots),\ t \in J. \tag{10.57}$$

Так как функция $M_1(t)$ ограничена на J, то из (10.57) в силу условия (q_1) вытекает, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \tag{10.58}$$

сходится абсолютно и равномерно на полуинтервале J. Сумма, скажем, $x(t)$ ряда (10.58) принадлежит классу $O[t_0, \infty)$. Перехода в (10.39) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $x(t)$ является решением системы интегральных уравнений (10.38).

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ -любые два решения системы интегральных уравнений (10.38) в классе $O[t_0, \infty)$. Тогда получаем

$$u(t) \leq c_0 + Y_0 \int_{t_0}^{t} \left[g(s)u(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)u(\tau)d\tau \right] ds,\ t \in J, \tag{10.59}$$

где

$$u(t) \equiv \left| |x_1(t) - x_2(t)| \right| \ ,$$

$$c_0 \equiv Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [g(s)u(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)u(\tau)d\tau] ds < \infty.$$

Применяя к неравенству (10.59) лемму 2.1 [15], получаем

$$U(t) \leq Y_0 \int_{t_0}^{\infty} [g(s)M_1(s)\, U(s) + \int_{t_0}^{s} G(s,\tau)M_1(\tau)U(\tau)d\tau] ds,\ t \in J, \tag{10.60}$$

где $U(t) \equiv \left(M_1(t)\right)^{-1} u(t)$.

Из (10.60) имеем

$$R \leq q_1 R, \tag{10.61}$$

где $R = \sup_J U(t) < \infty$.

Так как $q_1 < 1$, то из (10.61) следует, что $R = 0$. Следовательно, $u(t) \equiv 0$ и, значит, $x_2(t) \equiv x_1(t)$ на J.

Следствие 10.3. Если выполняется условия 1), 2) и 4) теоремы 10.2, то системы (10.3) и (10.4) асимптотически эквивалентны. Если, кроме того, выполняется условие 3) теоремы 10.1, то соответствие между решениями систем (10.3) и (10.4) в соотношении (0) является взаимно однозначным.

Следствие 10.4. Если все решения системы (10.4) стремятся к нулю при $t \to \infty$ и выполняются условия (A_1), (B_1), то все решения системы (10.3) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Следствие 10.5. Если выполняются условие 1) теоремы 10.1 и условия 2), 4) теоремы 10.2, то каждому решению $x(t)$ системы (10.3) при $f(t) \equiv 0$ с ненулевым начальным вектором $x(t_0)$, для которого

$$\|x(t_0)\| > (1 - q_1)^{-1}(F_2 + q_1 F_1), \qquad (\mathrm{C}_1^0)$$

соответствует ненулевое решение $y(t)$ системы (10.2) такое, что имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $y(t)$ единственно.

В самом деле, из теоремы 10.2 при $f(t) \equiv 0$ вытекает, что $y(t_0) \neq 0$. Следовательно, $y(t) \not\equiv 0$ на J.

Следствие 10.6. Если выполняются условие 1) теоремы 10.1,

$f(t) \equiv F_0(t) \equiv 0$ и условия (A_1), (q_1), то любому ненулевому решению $x(t)$ системы (10.3) соответствует ненулевое решение $y(t)$ системы (10.2) такое, что имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $y(t)$ единственно.

В данном случае соотношение (C_1^0) выполняется автоматически для любого $x(t_0) \neq 0$.

Замечание 10.8. Если выполняются условие 1) теоремы 10.1, $f(t) \equiv F_0(t) \equiv 0$ и условия (A_1), (q_1), то любому ненулевому решению $y(t)$ системы (10.2) соответствует ненулевое решение $x(t)$ системы (10.3) такое, что имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $x(t)$ единственно.

Это вытекает из разрешимости системы интегральных уравнений (10.38).

Замечание 10.9. Справедливо соотношение

$$Y_0\left[g(t)M_1(t)+\int_{t_0}^{t}G(t,\tau)M_1(\tau)d\tau\right]\leq M_1'(t),\quad t\epsilon J. \tag{10.62}$$

Следовательно, условие (q_1) будет выполняться, если

$$q_1^0=Y_0\int_{t_0}^{\infty}\left[g(s)+\int_{t_0}^{s}G\,(s,\tau)\exp\left(-Y_0\int_{\tau}^{s}g(\eta)d\eta\right)d\tau\right]ds\leq ln2. \quad (q_1^0)$$

Условие (q_1) будет нарушаться, если

$$q_1'=Y_0\int_{t_0}^{\infty}\left[g(s)+\int_{t_0}^{s}G\,(s,\tau)d\tau\right]ds\geq 1. \quad (q_1')$$

Это замечание устанавливается аналогично замечанию 10.2.

Замечание 1.10. Для дифференциальных систем (10.3^0) и (10.4^0) можно обеспечить справедливость соответствующего условия (q_1) посредством выбора достаточно большого t_0.

В самом деле, имеем

$$q_1=\int_{t_0}^{\infty}g(t)Y_0\exp\{Y_0\int_{t_0}^{t}g(s)ds\}dt=\exp\{Y_0\int_{t_0}^{\infty}g(s)ds\}dt-1.$$

Следовательно, соответствующее условие (q_1) эквивалентно условию

$$\int_{t_0}^{\infty}g(s)ds<Y_0^{-1}\ln 2,$$

что можно обеспечить в силу соответствующего условия (A_1) посредством выбора достаточного большого t_0.

Теорема 10.3. Пусть выполняются условия 1), 2), 4) теоремы 10.2 и

$$F_2-(f_0Y_0^{-1}+F_1)q_1>0. \quad (F)$$

Тогда каждому решению $x(t)$ системы (10.3) с начальным вектором $x(t_0)$, для которого

$$\|x(t_0)\|<(1+q_1)^{-1}[F_2-(f_0Y_0^{-1}+F_1)q_1], \quad (C_2)$$

соответствует решение $y(t)$ системы (10.4) с ненулевым начальным вектором $y(t_0)$ такое, что имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $y(t)$ единственно.

Доказательство. Учитывая соотношения (10.35), (q_1), (F) и (C_2), из (10.36) получаем

$$\|y(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^{\infty} F_0(s)ds + x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} [F(s;x) - F_0(s)]ds \right\| \geq$$

$$\geq \; F_2 - \|x(t_0)\| - \int_{t_0}^{\infty} \|F(s;x) - F_0(s)\|ds \geq F_2 - (f_0 Y_0^{-1} + F_1)q_1 -$$

$$-\|x(t_0)\|(1 + q_1) > 0. \qquad (10.63)$$

Из (10.63) вытекает, что $y(t_0) \neq 0$.

Следствие 10.7. Если выполняются условия 1), 2), 4) теоремы 10.2 и условие (F), то решению $x(t)$ системы (10.3) с нулевым начальным вектором $x(t_0) = 0$ соответствует решение $y(t)$ системы (10.4) с ненулевым начальным вектором $y(t_0)$ такое, что имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $y(t)$ единственно.

В данном случае соотношение (C_2) выполняется автоматически.

Следствие 10.8. Если выполняются условия 1) теоремы 10.1, условия 2), 4) теоремы 10.2 и

$$F_2 - F_1 q_1 > 0, \qquad (F_0)$$

то каждому решению $x(t)$ системы (10.3) при $f(t) \equiv 0$ с начальным вектором $x(t_0)$, для которого

$$\|x(t_0)\| < (1 + q_1)^{-1}(F_2 - F_1 q_1), \qquad (C_2^0)$$

соответствует ненулевое решение $y(t)$ системы (10.2) такое, что имеет место соотношение (0), причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $y(t)$ единственно.

Это предложение вытекает из теоремы 10.3 при $f(t) \equiv 0$.

Следствие 10.9. Если выполняются условие 1) теоремы 10.1, условия 2), 4) теоремы 10.2 и условие (F_0), то решению $x(t)$ системы (10.3) при $f(t) \equiv 0$ с нулевым начальным вектором $x(t_0) = 0$ соответствует ненулевое решение $y(t)$ системы (10.2) такое, что имеет место соотношение (0) причем при дополнительном выполнении условия 3) теоремы 10.1 $y(t)$ единственно.

Данное предположение вытекает из следствия 10.7 при $f(t) \equiv 0$.

Замечание 1.11. Если использовать только второй способ задания нормы вектора и матрицы, то в случае, когда компоненты векторной функции $F_0(t)$, не равные тождественно нулю, неотрицательные или неположительные на полуинтервале J, условие (F_0) совпадает с условием (q_1).

В этом случае $F_2 = F_1 > 0$.

Отметим, что параграф 1 этой главы написан на основании статьи [78]; параграф 2 – статьи [79]; параграф 3 –статьи [80]; параграф 4 – статьи [81]; параграф 5 –статьи [82]; параграф 5 –статьи [54]; параграф 7 –статьи [52]; параграф 8 –статьи [83]; параграф 9 –статьи [84]; параграф 10 –статьи [85-87].

О ПЕРСПЕКТИВЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

В связи с теоретической и практической необходимостью исследования по общей и качественной теории интегро-дифференциальных уравнений будут продолжены.

Хотелось бы решить следующие задачи.

Задача 1. Было бы неплохо изучить аналоги исследований главы 1 для интегро-дифференциальных включений.

Задача 2. Необходимо распространить нестандартные замены неизвестной функции и ее производных, которые были применены в главе 2, на системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра высоких порядков. Это значительно облегчило бы исследования по асимптотическим свойствам решений и их производных для систем интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков типа Вольтерра на полуоси.

Задача 3. Исследовать асимптотические свойства (АС) решений операторных интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков типа Вольтерра на полуоси в пространстве Гильберта развитием нестандартного метода сведения к системе.

Задача 4. Исследовать АС решений интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков типа Вольтерра-Стилтьеса на полуоси развитием нестандартного метода сведения к системе.

Литература

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование: Пер.с фр. – М.: Наука,1976. – 288 с.

2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: Пер. с англ. и доп. М.К.Керимова – М.: Наука,1982. – 304 с.

3. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 328 с.

4. Иманалиев М. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем – Фрунзе: Илим, 1974. –352 с.

5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

6. Gripenberg G. Volterra integral and functional equations [Текст] / G. Gripenberg, S.- O. Londen, O. Staffans. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 701 p.

7. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений – М.: Наука,1991. –280 с.

8. Lakshmikantham V., Rao M.R.M. Theory of integro-differential equations. – Amsterdam: OPA, 1995. – 384 p.

9. Боташов А.И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнеий Вольтерра. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 87 с.

10. Дауылбаев М.К. Сингулярно-возмущенные интегро-дифференциальные уравнения. – Алматы: Изд-во Казак университетi, 1999. – 170 с.

11. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

12. Burton T.A. Volterra Integral and Differential Equations: Second edition – New York a.o.: Elsevier, 2005. –VIII+367 p.

13. Байзаков А.Б. Особые точки интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2007. – 134 .

14. Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. – New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2012. – 520 p.

15. Ведь Ю.А. Об одном методе изучения задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1971. – Вып.8. – С. 99-135.

16. Ведь Ю.А. Достаточные признаки отсутствия точек у интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып.3. – С. 123-135.

17. Ведь Ю.А., Искандаров С., Абылкасымов К.А. О корректности на полуоси начальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений вольтерро-фредгольмова типа //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 90-102.

18. Ведь Ю.А. Начальная задача для интегро - дифференциальных систем вольтеррова типа с запаздывающим аргументом и асимптотические свойства ее решений //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып.17. – С. 94-108.

19. Ведь Ю.А., Баялиева С.С. Об одной предельной задаче для систем интегро-дифференциальных уравнений второго порядка вольтеррова типа //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 117-125.

20. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с анг. – М., ИИЛ, 1958. – 475 с.

21. Ведь Ю.А. Начальная и предельные задача для интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным промежутком интегрирования //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Изд-во АН Киргиз.ССР, 1962. – Вып.2. – С. 239-252.

22. Константинов М.М., Байнов Д.Д. Существование и единственность решений некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений //Mathematica. – 1976. – T.18 (41), N 1. – P.7-13.

23. Ведь Ю.А., Китаева Л.Н. О стремлении к конечным пределам решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып.3. – С. 137-142.

24. Ведь Ю.А., Китаева Л.Н. Критерии существования асимптот у решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1967. – Вып.7. – С. 114-117.

25. Ведь Ю.А., Самудинов И. Об однозначной разрешимости двух типов предельных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып.3. – С. 143-159.

26. Самудинов И. Предельная задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений.- Деп. № 2141-78.

27. Ведь Ю.А. Об асимптотических кривых интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Изд-во АН Киргиз ССР, 1962. – Вып. 2. – С. 181-190.

28. Ведь Ю.А. О возмущениях линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып. 3. – С. 93-121.

29. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. / Под ред. В.М. Алексеева. – М.:Мир, 1970. –720 с.

30. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт. физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.

31. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник КРСУ. – 2001. – Т.1, №2. – С.46-53.

32. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек:Илим, 2002. – 216 с.

33. Ведь Ю.А., Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68-103.

34. Искандаров С. Об асимптотическом поведении решений одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно второй производной // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985. – Вып. 18. – С. 166-168.

35. Искандаров С. О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров // Там же. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 31–35.

36. Ражапов Г. Об устойчивости свойства ограниченности решений линейных однородных дифференциальных уравнений в пространствах $L^p(t_0,\infty)$ (p=1,2) // Мат-лы XIII науч. конф. проф.− препод. Состава физ.− мат. фак-та (секц. Математики) / Киргиз. гос. ун-т.− Фрунзе: Мектеп,1965.− С.72 − 74.

37. Искандаров С. Об асимптотических представлениях и свойствах решений и их первых и вторых производных одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-диффферрнц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1991. – Вып.23. – с. 15 − 21.

38. Халилов А.Т. Об асимптотических свойствах слабо нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-диффферрнц. уравнениям. − Бишкек: Илим, 1997.− Вып.26.− с. 81 − 85.

39. Пахырев З., Искандаров С. Об асимптотическом поведении решений и их первых производных слабо нелинейной вольтерровой системы интегро-дифференциального уравнений // Исслед. по интегро-диффферрнц. уравнениям. − Бишкек: Илим, 1991.− Вып.23.− с. 22 − 26.

40. Искандаров С., Шабданов Д.Н. О методе частичного срезывания для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-диффферрнц. уравнениям. − Бишкек: Илим, 2007.− Вып.36.− с. 63 − 67.

41. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Исслед. по интегро-диффферрнц. уравнениям. − Бишкек: Илим, 2004.− Вып.33.− с. 67 − 71.

42. Искандаров С., Халилов А.Т. Об оценках и асимптотических свойствах решений и их первых и вторых производных линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра //Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер.матем., мех.,информатика. – Алматы, 2004. – № 1 (40). – С.67-75.

43. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.

44. Искандаров С., Халилов А.Т. Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып.32. – С. 57 – 62.

45. Искандаров С. Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.34. – С. 37–43.

46. Искандаров С. Об одном нестандартном методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Там же. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 36–40.

47. Искандаров С. О новом варианте метода нестандартного сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Там же. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып.37. – С. 24–29.

48. Искандаров С. О некоторых методах для вольтерровых уравнений на полуоси //Весенняя Воронежская мат. школа «Понтрягинские чтения - V», Во-ронеж, апр.1994г.:Тез.докл. – Воронеж:ВГУ,1994. – С. 63.

49. Искандаров С. Об устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 37. – С. 30-43.

50. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964. – 480 с.

51. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 432 с.

52. Искандаров С. О нестандартном методе сведения к системе для устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения седьмого порядка // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.41. – С. 36-45.

53. Искандаров С. Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып.17. – С. 161-165.

54. Искандаров С. Об экспоненциальной устойчивости линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып.39. – С. 13-18.

55. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.

56. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 140 с.

57. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования. Сер. теоретические основы технической кибернетики. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

58. Березанский Л.М. Признаки экспоненциальной устойчивости линейных интегродифференциальных уравнений // Функционально-дифференц. уравнения: Межвуз. сб. науч.тр. – Пермь:Пермск.политехн.ин-т,1988. – С.66-69.

59. Искандаров С. Метод матричных весовых и срезывающих функций в асимптотической теории вольтерровых систем на полуоси // Вестн. КГНУ. Сер. естественно-техн. науки. – 1995. – Вып. 1,Ч.1. – С. 163-171.

60. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений //Мат.анализ.-Казань:Изд-во Казанск.ун-та,1978. – С.103-107.

61. Искандаров С. Об одной оценке решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка в критическом случае на полуоси // Дифференциальные уравнения. – М., 2016. – Т. 52, № 8. – С. 1069–1074.

62. Levin J.J. Nonlinear Volterra Equation Not of Convolution Type //J.different.equat. – 1968. – Vol.4. – P.176-186.

63. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.

64. Тышкевич В.А. Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 80 с.

65. Ражапов Г. Об асимптотических свойствах решений одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-диффенц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим. 1967. – Вып.4. – С.118 -128.

66. Ведь Ю.А., Ражапов Г. Оценки, ограниченность, стремление к нулю и устойчивость решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений //Исслед. по интегро-диффенц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим. 1968. – Вып.5. – С.141 -145.

67. Ведь Ю.А., Баялиева С.С. Об асимптотических соотношениях между решениями линейных однородных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т.6, №2. – С.335-342.

68. Talpaluru P. Some results concerning the asymptotic equivalence of integro-differential equations //Fn. Sti. Univ. Iasi. Sec. 1a. – 1973. – T.19, N 1. – P.117 - 131.

69. Ведь Ю.А. Асимптотические оценки решений нелинейных уравнений с последствием //VII. Int. Konf. nichlineare Schwing., Berlin, 1975, Bd.1,2; Abh. Akad. Wiss. DDR, 1977.

70. Pachpatte B.G. On the stability and asymptotic behavior of solutions of integro-differential equations in Banach spaces //J. Math. Anal. Appl. – 1976. – Vol. 53, N. 3. – P.604 - 617.

71. Basti M., Lalli B.S. Asymptotic behavior of perturbed nonlinear systems //Atti Acad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. – 1976. Vol.60, N 5. – P.600 - 610.

72. Lalli B.S. Asymptotic behavior of perturbed systems //Abh. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math. Naturwiss. Techn. –1977. – N 4. – P.11-15.

73. Rao V.S.H., Rao K.K. On a nonlinear differential-integral equation for ecological problems // Bull. Austral. Math. Soc. – 1978. – Vol.19, N 3. – P.363-369.

74. Levinson N. The asymptotic behavior of system of linear differential equations //Amer. J.Math. – 1946. – T.68, N1. – P. 1-6.

75. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости //М.: Наука, 1967. – 472 с.

76. Brauer F. Nnlinear differential equations with forcing terms //Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – T.15, N 5. – P. 758 -765.

77. Люстерник Л.А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

78. Искандаров С. Об асимптотическим представлении решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка //Исслед. по интегро - дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып.47. – С.34-38.

79. Искандаров С. О влиянии интегральных возмущений типа Вольтерра на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2017. – № 5. – С. 110-115.

80. Искандаров, С, Бокобаева З. Б.Об оценках решений и их первых производных линейного вольтеррова неявного интегро- дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Института математики НАН Кыргызской Республики. – 2018. – № 1. – С. 49-55.

81. Искандаров С. Нестандартный метод сведения к системе для устойчивости и стабилизируемости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. – Вып.40. – С.40-48.

82. Искандаров С. Об одном методе исследования асимптотических свойств решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып.38. – С.25-30.

83. Искандаров С. Нестандартный метод сведения к системе и устойчивость решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения восьмого порядка //Исслед. по интегро-дифференциального. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 43. – С.13-42.

84. Искандаров С. Оценка и асимптотические свойства решений вольтерровой системы линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений в критическом случае // Докл. НАН КР. – Бишкек: Илим, 2017. – № 1. – С.15-22.

85. Ведь Ю.А., Искандаров С. О характерных особенностях интегро-дифференциальных систем типа Вольтерра //Изв. АН Киргиз. ССР. – 1980. – №3. – С.30-34.

86. Искандаров С. Асимптотическая эквивалентность систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1979. – С.76-84.

87. Искандаров С. Асимптотическая эквивалентность систем линейных и слабо нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1981. – Вып. 14. – С.119-148.

(22.01.1932 – 31.03.2007)

Краткие сведения о Юрии Александровиче Ведь

22 января 2022 года исполнилось 90 лет со дня рождения хорошо известного в странах СНГ и в дальнем зарубежье математика Юрия Александровича Ведь. Он родился в г. Осипенко Запорожской области Украины на берегу Азовского моря в семье служащего.

Его отец, Ведь Александр Павлович, в начале войны, будучи главным инженером, организовывал эвакуацию завода сельскохозяйственного машиностроения им. М.В. Фрунзе в Кыргызстан. С тех пор жизнь Ведь Ю. А. была неразрывно связана с нашей республикой.

Юрий Александрович Ведь окончил с отличием Киргизский государственный университет по специальности «математика».

Ведь Ю.А. работает в Институте математики республиканской Академии наук с ноября 1960 года в должности младшего, старшего научного сотрудника, а с 1967 года – заведующего лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений. В 1962 г. он защитил кандидатскую диссертацию, в 1963 году ему присвоено ученое звание старшего научного сотрудника по специальности «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Ведь Ю.А. был опытным научным работником и научным руководителем. Он разработал новые методы и получил ряд существенно новых научных результатов по вопросам корректности и асимптотического поведения решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их дискретных аналогов. Он заложил основу принципиально нового научного направления в области интегро-дифференциальных и суммарно-разностных уравнений по выявлению влияния возмущений на решения невозмущенных уравнений. Совместно с М. Иманалиевым впервые в мировой литературе им была решена проблема влияния интегральных возмущений в теории устойчивости дифференциальных уравнений, и разработаны новые оригинальные методы исследований. Он также совместно с М. Иманалиевым заложил основы нового метода исследования уравнений в частных производных – метода дополнительного аргумента.

Ю.А.Ведь является основателем ряда новых научных направлений в теории интегро-дифференциальных уравнений:

- по исследованию задач с условиями на бесконечности;
- по распространению идей метода Зейделя к разрешимости начальных и краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами. В результате был разработан метод специальных последовательных приближений;
- совместно с М.И.Иманалиевым заложил основы метода дополнительного аргумента - эффективного метода исследования корректности и других свойств решений начальных и краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Он в своих работах существенно развил такие качественные методы, как метод весовых функций, метод сравнения, метод интегральных неравенств для уравнений с последействием.

У Юрия Александровича солидный список публикаций научных работ. Более 210 печатных научных работ им опубликованы в республиканских, всесоюзных и международных изданиях, в том числе в таких солидных журналах, как «Доклады Российской АН», «Дифференциальные уравнения», «Сибирский математический журнал», «Известия вузов. Математика» и в научных сборниках ГДР, Польши, Венгрии, Болгарии, Латвии, стран СНГ.

Следует отметить, что большинство его статей объемные и написаны со строгими доказательствами предлагаемых новых положений, так что их можно использовать в качестве учебных пособий для специальных курсов студентам – математикам, магистрантам, аспирантам, соискателям и докторантам. Во многих работах приведены тонкие иллюстративные примеры и примеры на существенность налагаемых условий.

Результаты проведенных исследований были представлены на различных научных конференциях, в частности, на 4-ом Всесоюзном математическом съезде в г. Ленинград в 1961 г., на 6-ой, 7-ой и 9-ой международных конференциях по нелинейным колебаниям в Польше в г. Познань в 1972 г., в ГДР в г. Берлин в 1975 г. и в г. Киев в 1981 г., на Коллоквиуме по дифференциальным уравнениям в Венгрии в г. Кестхей в 1974 г.

Ю.А. Ведь внес значительный вклад в развитие математической науки и подготовку научных кадров в нашей республике. Под его научным руководством подготовлены 7 кандидатов физико-математических наук (Китаева Л.Н., Ражапов Г., Головина В.Г., Баялиева С.С., Пахыров З., Искандаров С., Каптагаев Э.С.). Один из его учеников С. Искандаров стал доктором физико-математических наук (научный консультант М. Иманалиев) и профессором математики.

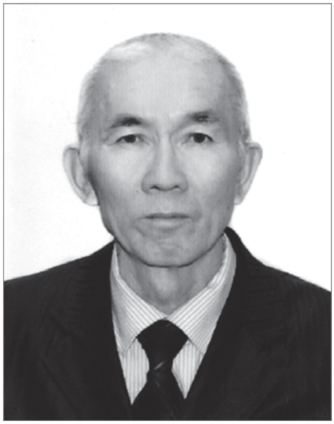
Много сил им отдано становлению кыргызской математической школы по интегро-дифференциальным уравнениям, которая достаточно широко известна в мировой математической науке. Он был очень требователен к себе и это качество передал своим ученикам.

Ю.А. Ведь был бессменным членом редколлегии периодического научного сборника «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям», он прилагал много усилий к качеству подготовки и своевременному выпуску этого сборника. Многие выпуски этого сборника увидели свет исключительно благодаря Юрию Александровичу.

За заслуги в развитии науки и в связи с 25-летием Республиканской Академии наук Ведь Ю.А. в 1979 г. награжден Грамотой Верховного Совета Киргизской ССР. В 1988 г. он был награжден медалью «Ветеран труда».

Сотрудники Института математики НАН Кыргызской Республики и многие математики КР горды тем, что работали рядом с таким одаренным математиком как Юрий Александрович, учились у него, сохраняют о нем добрую память. Заложенные идеи и разработанные методы в его работах продолжают развиваться в трудах его учеников и в научных исследованиях многих математических школ стран СНГ и дальнего зарубежья.

Краткие сведения
о Самандаре Искандарове



Искандаров Самандар, 1951 г. рождения.

В 1974 г. с отличием окончил механико-математический факультет Киргизского гос. университета им. 50-летия СССР.

С августа 1973 г. по август 1975 г. служил в рядах Советской Армии на должности начальника связи танкового батальона в в/части 16871 в Приморском крае (Дальний восток) Российской Федерации.

С октября 1975 г. по настоящее время непрерывно работает (сначала в Институте физики и математики АН Киргизской ССР, потом в Институте теоретической и прикладной математики НАН КР, ныне в Институте математики НАН КР) в стенах Республиканской Академии наук Кыргызстана. Начал работать ст. инженером ИФМ АН Кирг. ССР, затем стал м.н.с., с.н.с., вед.н.с., после Юрия Александровича работает зав. лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений.

20 марта 1989 г. в Институте математики и механики АН Азербайджанской ССР защитил кандидатскую диссертацию (научный руководитель - к.ф.-м.н., с.н.с. Ведь Юрий Александрович).

29 сентября 2003 г. в Институте математики НАН КР защитил докторскую диссертацию (научный консультант - академик НАН КР, чл.-корр. РАН Иманалиев Мурзабек Иманалиевич).

С 2015 г. профессор математики.

Имеет более 350 опубликованных работ, в том числе: 2 учебника (Алгебра-9, Алгебра и начала анализа-11) для средних общеобразовательных школ КР на кыргызском языке (соавторы - М.И. Иманалиев, А.Асанов, К. Жусупов) и 2 монографии (одна в соавторстве с З.А. Жапаровой, 2022).

Награжден Почетными грамотами КР и Жогорку Кенеша КР, лауреат Государственной премии КР в области науки и техники.

E-mail: mrmacintosh@list.ru

Научное издание

Ведь Юрий Александрович
Искандаров Самандар

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ И КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подписано к печати 15.06.2023.
Формат 60×84 1/16. Печать офсетная.
Объем 14,5 п.л. Тираж 200 экз

Отпечатано в типографии «Айат»
г. Бишкек, ул. Ташкентская, 60.