НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ Ж. БАЛАСАГЫНА

На правах рукописи
УДК 517.9

ДЖЭЭНБАЕВА ГУЛГААКЫ АБДЫКААРОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Байзаков А.Б.

Бишкек – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ, ПРИНЯТЫЕ В ДАННОЙ РАБОТЕ

1. Обозначения

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство, а его точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (по умолчанию – векторы-столбцы): $R_+ := [0, +\infty)$;

$\|x\|$ – норма вектора $x = (x_1, \ldots x_n)$: $\|x\|_0 = \max\limits_k |x_k|$;

$\{x \in X : P(x)\}$ – или более кратко $\{x : P(x)\}$ – множество всех точек x, для которых выполнено логическое условие $P(x)$;

$C^{\alpha,\beta,\ldots}(\Omega \to \Lambda)$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими

производными порядка α по первой переменной, β по второй переменной, …; где Ω и Λ – области в евклидовых пространствах R^n и R^k соответственно;

$\overline{C}^{\alpha,\beta,\ldots}(\Omega \to \Lambda)$ – пространство функций, ограниченных и непрерывных вместе с производными до соответствующего порядка;

M – верхняя грань класса ограниченных функций на неограниченных областях;

$Lip\left(L|_u, K|_v, \ldots\right)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом L, по переменной v с коэффициентом $K, \ldots$; для функций одной переменной индекс будем опускать (коэффициенты могут быть и функциями других переменных);

Для заданных функций нескольких переменных нижний индекс будет обозначать частную производную по соответствующему аргументу: $\psi_{\xi_k}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \dfrac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{\partial \xi_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

ДУ – дифференциальное уравнение;

ИУВ – интегральное уравнение Вольтерра;

ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение;

ИДУВ – интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра;

ДУ в ЧП – дифференциальное уравнение в частных производных;

ИДУ в ЧП – интегро-дифференциальное уравнение в частных производных;

Нумерация теорем, уравнений и соотношений, исключая Введение, производится по главам и разделам в виде *(l.m.n)*, где l – номер главы, m – номер раздела и n – номер теоремы, уравнения или соотношения в данном разделе. Для подразделов также используется вышеуказанная нумерация.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Асимптотические и аналитические методы занимают важное место в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что задачи, рассматриваемые в теории дифференциальных уравнений, в подавляющем большинстве не имеют явного решения в виду сложной зависимости от числовых и функциональных параметров, входящих в эти задачи. Однако правильное описание решения или нахождение приближенного решения можно существенно упростить, если известно, что некоторые из параметров очень малы, либо, наоборот, велики. Для решения таких задач привлекаются асимптотические и аналитические методы. Для доказательства существования и единственности ДУ часто применяются методы преобразования решений.

Обзор литературы показал, что методы преобразования решений широко применяются в аналитической и качественной теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Из обзора имеющихся работ следует, что некоторые актуальные вопросы асимптотической и аналитической теории нелинейных ИУВ и ДУ в ЧП, все еще остаются до сих пор мало исследованными или вообще не исследованными. Среди различных задач, несомненно, актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы: асимптотической и аналитической структуры решений в ИУВ, ИДУВ вблизи регулярной и иррегулярной особых точек; разрешимость и структура решений задачи Коши ДУ в ЧП.

Цель и задачи исследования. Настоящая диссертационная работа продолжает исследования В.Вольтерра, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова, Я.Горна, Э.И.Грудо, Я.В.Быкова, М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Т.М.Иманалиева, К.К.Какишева, А.Б.Байзакова, А.Асанова и посвящена дальнейшей разработке и исследованию разрешимости и структуры решений дифференциальных и интегральных уравнений методом преобразования решений.

Задачи исследования:

- Выявить достаточные условия разрешимости задачи Коши и построить структуры решений новых типов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Найти достаточные условия существования решений начальной задачи для новых типов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
- Найти условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.
- Определить влияние полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Построить асимптотическую структуру решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Методика исследований. В работе использованы методы эквивалентного преобразования интегральных уравнений, аналитической теории дифференциальных уравнений, теории функций и функционального анализа: принцип сжимающих отображений.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие положения:

- Найденные методом преобразования решений достаточные условия разрешимости задачи Коши и построенные структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Выявленные методом преобразования решений условия существования решений начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
- Найденные условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.

- Определение характера влияния полюсов свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Построение асимптотической структуры решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Теоретическая и практическая ценность. Настоящая работа носит в основном теоретический характер. Результаты ее могут быть использованы при дальнейших исследованиях по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, уравнений математической физики и при разработке спецкурсов для студентов математических специальностей Вузов КР: КНУ им. Ж. Баласагына, КРСУ им. Б.Ельцина, БГУ им. К.Карасаева.

Связь работы с научно-исследовательскими проектами: Данная работа выполнена в рамках проектов по Институту математики НАН КР: «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов и компьютерного моделирования для изучения динамических и управляемых систем, обратных и оптимизационных экономических задач и геофизических процессов”. (2015-2017), № госрегистрации 0007125; «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов в теории равномерных топологических и кинематических пространств, динамических систем, оптимизационных экономических задач, математическом моделировании» (2018-2020), № госрегистрации 0007664.

Результаты работы включены в заключительные и промежуточные отчеты по этим проектам.

Апробация результатов. Результаты настоящей диссертации доложены и обсуждены на следующих семинарах: Института математики НАН КР (руководитель - академик А.А.Борубаев) и на следующих конференциях: Международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании», Казахстан, Актобе, 2015; Международной научной конференции “III Борубаевские чтения”, посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР, Бишкек, 2019.

Публикации. По результатам исследований соискателем опубликованы 8 статей: [21-28], в том числе 2 за рубежом. Также опубликованы 4 тезиса докладов [29-31, 82].

Личный вклад соискателя. В диссертационной работе постановка задачи принадлежит руководителю А.Б. Байзакову, а соискателю – вывод основных соотношений, схема метода и их использование.

В статьях, совместных с научным руководителем, постановка задач принадлежит научному руководителю, а полученные результаты - соискателю. В статье [22] соавтору принадлежит обсуждение результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов, списка литературы, содержащего 96 наименований. Объем текста 87 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертации. Приведены необходимые сведения и определения, обзор литературы по теме диссертации и вспомогательные результаты из аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена описанию объекта и предмета исследования, использованных методов для решения поставленных задач.

В третьей главе приводятся результаты собственных исследований соискателя и их обсуждение.

В разделе 3.1 применяется аналитический метод к исследованию разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

$$u_{ttx}(t,x)+\alpha u_{tx}(t,x)+\beta u_{tt}(t,x)+\alpha\beta u_t(t,x)+(\alpha+1)u_x(t,x)+\beta(\alpha+1)u(t,x)= \tag{3.1.1}$$

$$=f(t,x,u(t,x))+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds,\ (t,x)\in D=[0,T]\times R,$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in R,\ u_t(0,x)=\psi(x), x\in R, \qquad (3.1.2)\text{- }(3.1.3)$$

где α, β - некоторые положительные постоянные, $f(t,x,u)\in C([0,T]\times R\times R)$, $K(t,x,s,u)\in C([0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R)$ - известные функции; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными, входящими в (3.1.1).

Решение задачи Коши (3.1.1)-(3.1.3) ищем в виде

$$u(t,x) = c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds \qquad (3.1.4)$$

где $c(t,x)$ - известная непрерывная функция, причем $c(0,x)=\varphi(x)$, $c_t(0,x)=\psi(x)$, $Q(t,x)$ - новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

Доказана

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть 1) в D функции $c(t,x),\ c(0,x)=\varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными, входящими в (3.1.1), в областях $[0,T]\times R\times R,\ [0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R$ функции $f(t,x,u)$, $K(t,s,x,u)$ ограничены $\|f(t,x,u)\|\le M_1 = const$; $\|K(t,s,x,u)\|\le M_2 = const$ и удовлетворяют условиям Липшица: $\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\le L\|u_2-u_1\|$, $\|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\le N\|u_2-u_1\|$,) 3) $\dfrac{L+NT}{\alpha\beta}\le\dfrac{1}{2}$.

Тогда в D задача (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3) имеет ограниченное решение.

В 3.2 рассмотрена задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

$$\begin{aligned}
&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ +\\
&+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\
&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=\\
&f(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,s,x,\mathrm{y},u(s,x,\mathrm{y}))ds,
\end{aligned} \qquad (3.2.1)$$

$(t,x,y)\in D_2=[0,T]\times R^2$, с начальными условиями

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),\ (x,y)\in R^2,\ \ u_t(0,x,y)=\psi(x,y),\ (x,y)\in R^2, \qquad (3.2.2)\text{-}(3.2.3)$$

где $\alpha,\beta,\ \gamma$ - положительные постоянные. Решение этой задачи ищем в виде

$$\begin{aligned}
&u(t,x,y)=c(t,x,y)+\\
&+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds,
\end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

где $c(t,x,y)$ - известная функция такая, что $c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$, $Q(t,x,y)$ - новая искомая функция.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Если $f(t,x,y,u)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L|_u)$,

$K(t,s,\mathrm{x},\mathrm{y},u)\in\overline{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$, $\dfrac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T$.

Тогда задача Коши (3.2.1)-(3.2.3) имеет решение $u(t,x,y)\in\overline{C}^{(2,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, которое представимо в виде (3.2.4).

В 3.3 рассмотрена задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных с параметром

$$\varepsilon\left[u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)\right]+$$
$$+A(t,x,y,\varepsilon)u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u\left(t,x,y\right),\varepsilon\right)+\int_0^t K\left(t,s,x,y,u\left(s,x,y\right),\varepsilon\right)ds, \qquad (3.3.1)$$

где $t\in\left[0,T\right]$, $\left(x,y\right)\in R\times R$, с начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi\left(x,y\right). \qquad (3.3.2)$$

Решение задачи Коши (3.3.1)-(3.3.2) ищем в виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds\,. \qquad (3.3.3)$$

где $Q(t,x,y)$– неизвестная функция, подлежащая определению.

ТЕОРЕМА 3.3.1.. Пусть $A(t,x,y,\varepsilon)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\right)$,

$f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right)$,

$K(t,s,x,y,u,\varepsilon)\in\bar{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\varphi(x,y)\in\bar{C}^1\left(R\times R\right)$.

Тогда $\exists\,T_0>0$, такое, что задача Коши (3.3.1), (3.3.2) имеет решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, представляемое в виде (3.3.3).

Далее, рассмотрена задача Коши для нелинейной системы уравнений

$$\varepsilon^3u_{txy}+\varepsilon\left(u_t+u_x+u_y\right)+A(t,x,y)u=f(t,x,y,u),\ t\in\left[0,1\right],\ (x,y)\in R\times R\,, \qquad (3.3.9)$$

с начальным условием (3.3.2). Ее решение ищем в виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds, \qquad (3.3.10)$$

где $Q(t,x,y)$ – неизвестная функция, α,β,γ - некоторые положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 3.3.2**.** Пусть $f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L\big|_u\right)$.

Тогда $\exists T_0>0$, такое, что задача Коши (3.3.9), (3.3.2) имеет единственное решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, которое представимо в виде (3.3.10).

В 3.4 рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка с параметром

$$\varepsilon^3u_{ttx}+\alpha\varepsilon^2u_{tx}+\beta\varepsilon^2u_{tt}+\alpha\beta\varepsilon u_t+\left(\alpha+1\right)\varepsilon u_x+\beta\left(\alpha+1\right)u=f(t,x,u(t,x))+$$
$$+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds \qquad (3.4.1)$$

$(t,x)\in D$, с начальными условиями (3.1.2)- (3.1.3), где $\alpha,\ \beta$ - некоторые положительные постоянные, $f(t,x,u)\,, K(t,x,s.u)$ - известные непрерывные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)$ - заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными, входящими в (3.4.1). Решение этой задачи ищем в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \qquad (3.4.4)$$

где $c(t,x)$ - известная непрерывная функция, причем $c(o,x)=\varphi(x)\,, c_t(o,x)=\psi(x)\,,$ $Q(t,x)$ - новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

ТЕОРЕМА 3.4.1**.** Пусть 1) в D функции $c(t,x),\ c(0,x)=\varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными входящими в (3.4.1); 2) в соответствующих областях функции $f(t,x,u)\,, K(t,s,x,u)$ непрерывны; $\|f(t,x,u)\|\le M_1=const\,;\|K(t,s,x,u)\|\le M_2=const\,;$ удовлетворяют условиям Липшица: $\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\le L\|u_2-u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\le L_1\|u_2-u_1\|,$
3) $\frac{L+L_1T}{\alpha\beta}\le\frac{1}{2}$.

Тогда задача (3.4.1)-(3.1.2)-(3.1.3) имеет ограниченное решение.

В 3.5. рассмотрена задача Коши (3.1.2)-(3.1.3) для уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2L[u]}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x}+(\alpha^2+1)L[u]=f\left(t,x,u,u_t,u_x\right)+\int_0^t K\left(t,s,u\left(s,x\right)\right)ds, \qquad (3.5.1)$$

где $L[u]=u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u, t\in\left[0,T\right],\ x\in R,\ \alpha,p\in R_+$

Ищем решение в виде

$$u\left(t,x\right)=c\left(t,x\right)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu \qquad (3.5.4)$$

ТЕОРЕМА 3.5.1**.** Пусть $f(t,x,u,u_t,u_x)\in\overline{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right),$ $K(t,s,x,u)\in\overline{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\varphi(x)\in\overline{C}^2\left(R\right),\psi(x)\in\overline{C}^2\left(R\right)$

Тогда $\forall T_0>0$, такое, что задача Коши (3.5.1)-(3.1.2)-(3.1.3) имеет решение $u(t,x)\in\overline{C}^{(2,2)}\left([0,T_0]\times R\right)$, представляемое в виде (3.5.4). Кроме того, все производные, входящие в уравнение (3.5.1), равномерно ограничены.

В 3.6. изучаются вопросы существования периодических решений интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u(t)=\int\limits_0^t K(t,s)u(s)ds+f(t), \qquad (3.6.1),$$

где $K(t,s)$ – квадратная матричная функция; а $f(t)$ – вектор-функция, определенные и непрерывные соответственно в областях ($-\infty<$ s, t $<\infty$), ($-\infty< t<\infty$), причем

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s), \quad f(t+\omega)=f(t), \qquad (3.6.2)$$

В силу непериодичности оператора Вольтерра, возникает проблема выделения такого класса ИУВ, для которых существуют периодические решения.

ТЕОРЕМА 3.6.1**.** Наряду с *u(t)* будет решением ИУВ (3.6.1), (3.6.2) и функция *u(t+ω)* в том, и только в том случае, когда для *u(t)* выполняется тождество

$$\int\limits_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds=0 \qquad (3.6.4)$$

Построены примеры.

Далее, рассмотрено векторно-матричное нелинейное ИУВ с периодическими коэффициентами

$$u(t)=\int\limits_0^t K(t,s)u(s)ds+F(t,u), t\in(-\infty,\infty), \qquad (3.6.12)$$

где $K(t,s)$ - непрерывная $n\times n$-матричная функция, n-мерная вектор функция $F(t,u)$ определена и непрерывна в области $-\infty\le t\le\infty, \|u\|\le R,$ причём

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s), F(t+\omega,u)=F(t,u) \qquad (3.6.13)$$

Пусть $u=u_\omega(t), t\in[0,\omega]$ - решение периодической краевой задачи $u(0)=u(\omega)$ для интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13). Обозначим $u=\widetilde{u}_\omega(t)$ - периодическое продолжение $u_\omega(t)$ на всю ось. Доказано, что эта функция будет решением интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13) тогда и только тогда, когда. $\int\limits_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds=0$

В 3.7 рассмотрен вопрос о влиянии полюса свободного члена и ядра на решение интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ).

Сначала рассмотрено линейное ИУВ первого рода

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in [0,T], \tag{3.7.1}$$

ТЕОРЕМА 3.7.1. Пусть 1) в области $l = \{0 \le s \le t \le T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по t.

2) $K(0,0) \neq 0$, и функция $f(t)$ имеет в начале координат особенность типа полюс порядка q , т.е. $f(t) = f_1(t) / t^q, f_1(t) \neq 0$. Тогда интегральное уравнение (3.7.1) имеет обобщенное решение вида $u(t) = 2\delta(t) + x(t),$ где $\delta(t)$ - дельта-функция типа Дирака, α некоторая постоянная, а $x(t)$ определяется из уравнения вида $t^q x(t) + \int_0^t N(t,s)x(s)ds = F(t) - N(t,0)F(0) / N(0,0)$,

Построены примеры.

В 3.8 рассмотрена линейная система вида

$$t^q u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds, \tag{3.8.1}$$

$q > 1 -$ целое число, где $K(t,s) - n \times n$-матричная функция, голоморфная в окрестности точки $t = s = 0$. Пусть λ_j $-$собственные значения $K(0,0)$, $j = 1..n$. Рассмотрен ранее не изученный случай, когда $\lambda_j, j = 1..n^-$принимают кратные значения и $Re\,\lambda_j > 0$.

ТЕОРЕМА 3.8.1. Пусть $K(0,0)$ имеет кратные собственные значения λ_{rj} и выполняется условие $Re\lambda_{rj} > 0, j = 1..r$. Тогда уравнение (3.8.1) в каждом достаточно узком подсекторе $S^* \in S$ (сектор с вершиной в начале координат, содержащий вещественную полуось) имеет матричное решение вида $u(t) = \hat{u}(t)e^{\hat{A}(t)}$, где $\tilde{A}(t)$ $-$диагональная матрица, диагональные элементы которой являются диагональными матрицами порядка $r_j, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$ с диагональными элементами, имеющими разложение относительно p $-$положительное целое, $\hat{u}(t)$ обладает асимптотическим свойством разложения по степеням $t^{1/P}$.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В Главе I проводится анализ основных этапов в развитии научной мысли по теме диссертации. В этой главе приводятся результаты, используемые в данной работе. Приведены краткое резюме о необходимости выбора и концепции проведения тематику исследований в области асимптотической и аналитической теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

1.1. Обзор работ по разрешимости начальной задачи дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, учитывающие возможность явление последействия, протекающих в пространстве и во времени играют важную роль в моделировании естественно-технических процессов. Кроме того, известно, что проблема разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных все еще остаются актуальной задачей. Академиком Иманалиевым М.И. и его учениками [38-40] найдены достаточные условия разрешимости и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. В этих работах предложен новый метод построения решений классической задачи Коши для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Основой нового аналитического метода является преобразование решений исходной задачи Коши для ИДУВ в нахождение решений нелинейного интегрального уравнения Вольтерра II рода. Далее применяется известный принцип сжимающих отображений. Отметим, что в этом методе нередко дается интегральный представление искомых решений. Этот метод был применен многими авторами при исследовании проблемы разрешимости для операторных уравнений, например, Айтбаев К., Кыдыралиев Т.

Известно, что при интегрировании уравнений в частных производных не всегда удается найти общее решение данных уравнений. Поэтому, обычно ищется только те решения, в котором они удовлетворяет некоторым, заранее поставленным дополнительным условиям. Такая ситуация возникает, например, для ИДУ в ЧП, когда ищутся решения, удовлетворяющий заранее заданным начальным условиям.

Известно, что существуют различные методы для исследования разрешимости нелинейных ДУ в ЧП. Например: известный метод характеристик, метод Галеркина, метод дополнительного аргумента, предложенный академиком М. Иманалиевым и его учениками.

Исследовать разрешимость задачи Коши для ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП можно провести и методом преобразования решений [38, 39].

1.1.1. В [38] рассмотрено ДУ в ЧП шестого порядка:

$$\frac{\partial^4 L[u]}{\partial x^2\partial y^2}+2\alpha\frac{\partial^3 L[u]}{\partial x\partial y^2}+2\beta\frac{\partial^3 L[u]}{\partial x^2\partial y}+\left(\alpha^2+1\right)\frac{\partial^2 L[u]}{\partial y^2}+\left(\beta^2+1\right)\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2}+$$

$$+4\alpha\beta\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x\partial y}+2\left(\alpha^2+1\right)\beta\frac{\partial L[u]}{\partial y}+2\alpha\left(\beta^2+1\right)\beta\frac{\partial L[u]}{\partial x}+\left(\alpha^2+1\right)\left(\beta^2+1\right)L[u]=$$

$$=f\big(t,x,y,u(t,x,y),u_t(t,x,y),u_x(t,x,y),u_y(t,x,y)\big) \qquad (1.1.1)$$

с начальными данными

$$u(0,x,y)=\varphi_1(x,y),\ \ u_t(0,x,y)=\varphi_2(x,y) \qquad (1.1.2)$$

где $L[u]=u_{tt}(t,x,y)+2pu_t(t,x,y)+\left(p^2+1\right)u(t,x,y)$,

где α,β,p ─некоторые положительные постоянные,

$f\left(t,x,y,u,\nu,\mu,\omega\right)\in\overline{C}\left(D\times R\times R\times R\times R\times R\right)$;

$\varphi_i(x,y)\in\overline{C}^{(1,1)}\left(R\times R\right),\ (i=1,2)$.

Решение задачи (1.1.1)-(1.1.2) ищется в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(x-s)-\beta(y-\gamma)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(y-\gamma)\sin(t-\nu)Q(\nu,s,\gamma)d\gamma ds d\nu,$$

где $c(t,x,y)$ - известная функция, при этом

$$c(0,x,y)=\varphi_1(x,y),\ \ c_t(0,x,y)=\varphi_2(x,y),$$

а $Q(t,x,y)$ - новая неизвестная функция, подлежащая определению.

Далее, исследование задачи (1.1.1), (1.1.2) методом преобразования решений сводится к исследованию эквивалентного нелинейного ИУВ, к которой, для определения неизвестной функции $Q(t,x,y)$ применяется топологический принцип.

1.1.2. В работе [39] метод преобразования решений был применен для сингулярно-возмущенных ДУ второго порядка с точкой поворота

$$\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \quad (0 \le x \le 1) \tag{1.1.3}$$

с начальными условиями:

$$y(0) = b_1, \quad y'(0) = b_2 \tag{1.1.4}$$

где $b_i - const > 0,\ a(x),\ b(x),\ f(x) \in C[0,1]$, причем $a(x_k) = 0,\ (k = \overline{1,N}),\ 0 < x_k < 1,\ x_k$ - заданные точки.

Используется преобразование вида

$$y = b_1 + b_2 x + \int_0^x \int_0^s e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-s)+\frac{\beta\nu}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} Q(\nu)\, d\nu\, ds,$$

где $Q(x)$ - новая неизвестная функция, α, β - некоторые положительные постоянные. Далее, исследование задачи (1.1.3), (1.1.4) приводится к линейному ИУВ второго рода. Применяя топологический метод - принцип сжимающих отображений, находится однозначно функция $Q(x)$. Тем самым получено интегральное представление искомых решений.

1.2. Обзор работ по теории интегральных систем с особыми точками

Ряд важных задач теории упругости [18], распространение волн в средах с памятью [54], теории динамических нестационарных управляемых систем с последействием [56] приводят к ИУВ и ИДУВ с особыми точками. Впервые интегральные уравнения с особыми точками рассматривали Т.Лалеско [91], В.Вольтерра [95].

Аналитическая структура решений ИУВ в окрестности регулярных особых точек были рассмотрена немецким ученым Горном [88-89]. Затем они были продолжены Т.Сато [92], Т.Такесада [94] и Э.И.Грудо [19-20], Я.В.Быковым [15], Н.А.Магницким [55-56], Н.В.Донской, П.С.Панковым [33], А.Б.Байзаковым [7].

Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками типа Лайтхилла и начальные задачи для них были изучены К.А.Алымкуловым и его учениками [2, 74, 75]. Кроме того, им был предложен метод построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач.

Японский математик Т.Такесада в [94] исследовал линейную систему ИУВ с регулярной особой точкой

$$tu(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t), f(0) = 0, \tag{1.2.1}$$

с голоморфными правыми частями *f(t)* и ядром *K(t,s)* в окрестности начала координат. При выполнении некоторых условий на собственные значения матрицы *K(0,0)*, им найдено структура решений в виде сходящихся обобщенных рядов. Однородная система ИУВ типа (1.2.1) изучена в [12], когда функции, определяющие уравнение (1.2.1), непрерывны и удовлетворяет условиям гладкости и выполнены некоторые условия, накладываемые на ядро.

Проблемы регуляризации и единственности решений систем линейных и нелинейных ИУВ третьего рода рассмотрены в работах М.Иманалиева, А.Асанова [3]. Кроме того, рассмотрены регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. В [11] К.Б. Бараталиевым построены основы спектральной теории и разработаны методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

В работах [19,20] Э.И.Грудо построил решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в виде сходящихся рядов.

В работах [13], [60] рассмотрены интегральные уравнения типа Вольтерра с произвольной неподвижной особенностью. Линейные интегральные уравнения типа Вольтерра, когда ядро и правая часть аналитические функции, а также случай, когда полюсы свободного члена и особенности ядра влияют на структуру решения, подробно рассматривались Л.Н. Сретенским [62].

Н.А. Магницкий показал, что основные результаты аналитической теории дифференциальных уравнений, которые были изложены в работах [55, 56], успешно могут быть перенесены для исследования широких классов линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Здесь распространены такие понятия, как регулярная особая точка, иррегулярная особая точка и для интегральных уравнений типа Вольтерра.

Известно, что особую роль в теории обыкновенных дифференциальных уравнений играют асимптотические разложения решений в виде рядов. Важность асимптотического разложения решений с особыми точками в теории интегральных уравнений типа Вольтерра показаны в работах [17, 94].

Отметим, что теория периодических решений интегро-дифференциальных уравнений существенно отличается от соответствующей теории дифференциальных уравнений. Это как раз тот аспект теории ИУДВ, который не получается путем прямого перенесения результатов из известной дифференциальной теории. В части периодических решений наиболее изученным является случай интегро-дифференциальных уравнений с фредгольмовым аппаратом [5]. В связи с непериодичностью интегрального оператора Вольтерра, ИДУВ в отношении периодических решений оказались менее изученными. Трудности в проблеме периодических решений в вольтерровом случае, заставило многих авторов вместо периодических решений, рассматривать решения мало отличающиеся от периодических при больших значениях независимой переменной.

1.3. Заключение по Главе 1

В главе I приведены краткий анализ основных этапов в развитии аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений, и приводятся некоторые результаты, используемые в работе, которые заимствованы из других источников. Тем не менее, многие актуальные вопросы теории нелинейных ИУВ и ИДУВ, все еще остаются не исследованными. Среди различных задач, несомненно, актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы асимптотической и аналитической структуры решений нелинейных ИУВ и ИДУВ вблизи регулярных особых точек. Именно такие проблемы изучаются в данной работе. Кроме того, проблема разрешимости начальных задач новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП и построение интегральных структур решений все еще остается актуальной проблемой в теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В силу того, что интегральный оператор Вольтерра не всегда переводит в периодическую функцию в периодическую функцию, нахождение условий существования периодических решений краевой задачи интегральных уравнений Вольтерра – актуальная задача.

В настоящей работе будут использованы метод преобразования решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, методы аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений, методы функционального анализа.

ГЛАВА 2. МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Объект, предмет и задачи исследования

Объект исследования. Объектом исследования являются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (скалярные и системы уравнений) и интегральные уравнения Вольтерра. Рассматриваются проблемы разрешимости начальной задачи, существования периодических решений и влияния полюсов свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, построение асимптотической структуры решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Предмет исследования. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (скалярные и системы уравнений) и интегральные уравнения Вольтерра. Настоящая диссертационная работа продолжает исследования В.Вольтерра, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова, Я.Горна, Э.И.Грудо, Я.В.Быкова, М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Т.М.Иманалиева, К.К.Какишева, А.Б.Байзакова, А.Асанова и посвящена дальнейшей разработке и исследованию разрешимости и структуры решений дифференциальных и интегральных уравнений методом преобразования решений.

Важнейшие задачи исследования:

- Выявить достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Разрешить проблему существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром
- Найти условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.

- Определить влияние полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Построить асимптотическую структуру решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

2.2. Методы исследования

Во многих задачах аналитической и асимптотической теории дифференциальных, интегральных уравнений применяется метод преобразования решений. Так, в работе Н.П.Еругина [34], глава VIII посвящена методу преобразования решений, позволяющему проинтегрировать заданное дифференциальное уравнение или исследовать свойства его решений.

В связи с этим приведем следующее определение, введенное в работе [5]. Пусть Ω - некоторое множество, операторы A и K отображают его в себя. Рассмотрим уравнение

$$Ax = b \tag{2.2.1}$$

где b - фиксированный элемент из Ω, и преобразование

$$x = Ky\,. \tag{2.2.2}$$

Из (2.2.1), (2.2.2) непосредственно имеем

$$AKy = b\,. \tag{2.2.3}$$

Отсюда, если существует обратный оператор $(AK)^{-1}$, то получим

$$y = (AK)^{-1}b\,, \tag{2.2.4}$$

и из (2.2.4), (2.2.2) имеем решение уравнения (2.2.1) в виде

$$x = K(AK)^{-1}b\,. \tag{2.2.5}$$

Определение 2.2.1. Оператор K будем называть оператором преобразования решений оператора A.

Замечание 2.2.1. Необходимо выбрать оператор K так, что получить более упрощенное новое операторное уравнение (2.2.3), к которому можно было бы применить один из следующих методов:

- топологические методы доказательства существования решений, например, принцип сжимающих отображений;
- методы разложения решений, например, методы разложения решений в степенные ряды (первый метод Ляпунова).
- непосредственно произвести различные, в том числе асимптотические оценки, используя предположения относительно операторов A и K и элемента b, при стремлении независимой переменной к некоторому предельному значению.

Замечание 2.2.2. Отметим, что определение 2.2.1 включает в себя и методы интегральных преобразований $y = Fx$, преобразования Фурье (Лапласа), если подставить (2.2.2) в виде

$y = Fx$ где $F = K^{-1}$,

т.е. заранее предположить существование обратного оператора K^{-1}, тогда как в (2.2.4) предполагается существование обратного оператора $(AK)^{-1}$.

Пример 2.2.1. Рассмотрим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ax \equiv \frac{dx(t)}{dt} - \Lambda x(t) = f(t),\ x(t_0) = x_0$$

$\Lambda = n \times n$ – матрица, и рассмотрим другое уравнение

$$x = e^{\Lambda t} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds \equiv Kx .$$

Очевидно, $AKx = \Lambda e^{\Lambda t} x_0 + f(t) + \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds - \Lambda e^{\Lambda t} x_0 - \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds \equiv f(t)$,

т.е. в данном случае A и K - взаимно обратные операторы.

Пример 2.2.2. Пусть

$$x'(t) = f(t, x(t));\ x(t_0) = x_0; \tag{2.2.6}$$

$$Ax(t) \equiv x'(t) - f(t, x(t)) = 0 ,$$

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \equiv Kx \,.$$

Очевидно, A и K – взаимно обратные операторы. Используя топологический метод – принцип сжимающих отображений, можно доказать существование единственного решения задачи Коши (2.2.6).

Пример 2.2.3. Рассмотрим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ax \equiv \frac{dx(t)}{dt} - \Lambda x(t) = f(t), \ x(t_0) = x_0$$

$\Lambda = n \times n$ – матрица, и рассмотрим другое уравнение

$$x = e^{\Lambda t} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds \equiv Kx \,.$$

Очевидно, $AKx = \Lambda e^{\Lambda t} x_0 + f(t) + \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds - \Lambda e^{\Lambda t} x_0 - \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds \equiv f(t)$,

т.е. в данном случае A и K взаимно обратные операторы.

Пример 2.2.4. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Lambda(t)x(t) \,, \ t \in [0, \infty); \tag{2.2.7}$$

При изучении свойств характеристических показателей решений линейной системы (2.2.7) используется оператор преобразования

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Lambda(s)x(s)ds \equiv Kx \,. \tag{2.2.8}$$

И далее используя оценки норм к (2.2.8) и лемму Гронуолла-Беллмана, доказывается ограниченность характеристических показателей системы (2.2.8).

Пример 2.2.5. Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon), \ x(t_0) = x_0 \,, \ t \in [0, T], \tag{2.2.9}$$

решение которой обозначим $x(t, \varepsilon)$.

Пусть решение $x = x_0(t)$ – задачи Коши при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), 0), \ x\big|_{t=0} = x_0$$

существует и единственно на $[0, T]$.

Решение задачи Коши (2.2.9) ищется в виде

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... + \varepsilon^{N-1} x_{N-1}(t) + R_n(t,\varepsilon) \equiv Kx .$$

Далее доказывается оценка для остаточного члена

$$|R_N(t,\varepsilon)| \le c_N \varepsilon^n$$

и для определения функций $x_n(t), \ n \ge 1$, получаются линейные уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0) x_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x_0(t), 0), \ \ x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0, 0) x_n + F_n(t, x_0, ..., x_{n-1}), \ \ x_n(0) = 0 ,$$

где F_n - известные функции.

Решение каждой из задач существует и единственно при $t \in [0, T]$, все функции $x_n(t) \in C^\infty(0,T)$, и все они при $n \ge 1$ могут быть вычислены в квадратурах.

Пример 2.2.6. Рассмотрим

$$(t-a)\frac{du(t)}{dt} = H(t)u(t) + \int_a^t N(t,s)u(s)ds , \qquad (2.2.10)$$

где $H(t), N(t,s)$ - голоморфные в области $G_R^a = \{|t-a| < \rho, \ |s-a| < \rho\}$ операторы.

Найдено аналитическое выражение решений уравнения (2.2.10), используя преобразование вида: $u(t) = (t-a)^\beta \varphi(t) \equiv K\varphi$, где $\varphi(t)$ - голоморфная функция в $|t-a| < \rho$.

В предположении непрерывности коэффициентов и ядра уравнение (2.2.10) рассмотрено в работе [5]. В этом случае для нахождения решения уравнения (2.2.10) также используется метод преобразования решений в виде

$$u(t)=t^{\beta}\left(c+\int\limits_0^t y(s)ds\right)\equiv Ky. \qquad (2.2.11)$$

При использовании преобразования решений (2.2.11) относительно неизвестной переменной $y(t)$ получается система уравнений, для которой применяется принцип сжимающих отображений.

Пример 2.2.7. Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=\varphi_k(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)),\ k=1,2,...,n \qquad (2.2.12)$$

в окрестности точки $x=(x_1,...,x_n)\equiv 0$, предполагая, что функции φ_i аналитичны в этой окрестности и $\varphi_i(0)=0$.

Если

а) все элементарные делители матрицы Якоби: $\left(\dfrac{\partial\varphi_k(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right)$ простые;

б) между корнями $\lambda_1,...,\lambda_n$ этой матрицы и мультииндекса p не существует линейного соотношения

$$<p,\lambda>=0;$$

в) собственные значения λ_j матрицы Якоби расположены по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат;

тогда существуют сходящиеся в некоторой окрестности начала координат ряды

$$x_k=\xi_k(y_1,y_2,...,y_n),\ \xi_k(0)=0,\ k=1,...,n$$

с помощью которых система (2.2.12) может быть приведена к простой системе

$$\frac{dy_k}{dt}=\lambda_k y_k,\quad k=1,...,n.$$

2.3. Заключение к Главе 2

В главе 2 описан многократно используемый в данной работе метод исследования, т.е. операторных уравнений, которые имеют практические применения в асимптотической и аналитической теории диффренциальных и интегральных уравнений. В примерах 2.2.1. - 2.2.7 нами показаны различные возможности применения метода преобразования решений к различным задачам теории диффренциальных уравнений.

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. О разрешимости начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

Целью настоящего раздела является применение вышеуказанного аналитического метода к исследованию разрешимости задачи Коши для следующего интегро-дифференциального уравнения в частных производных:

$$u_{ttx}(t,x)+\alpha u_{tx}(t,x)+\beta u_{tt}(t,x)+\alpha\beta u_t(t,x)+(\alpha+1)u_x(t,x)+\beta(\alpha+1)u(t,x)= \tag{3.1.1}$$

$$=f(t,x,u(t,x))+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds,\ (t,x)\in D=[0,T]\times R,$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in R, \tag{3.1.2}$$

$$u_t(0,x)=\psi(x), x\in R, \tag{3.1.3}$$

где $\alpha,\ \beta$ - некоторые положительные постоянные, $f(t,x,u)\in C([0,T]\times R\times R)$, $K(t,x,s,u)\in C([0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R)$ - известные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)$ - заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными, входящими в (3.1.1).

Решение задачи Коши (3.1.1)-(3.1.3) ищем в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \tag{3.1.4}$$

где $c(t,x)$ - известная непрерывная функция, причем

$c(0,x)=\varphi(x)$,

$c_t(0,x)=\psi(x)$,

$Q(t,x)$ - новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

Для определения функции $Q(t,x)$ необходимо подставить (3.1.4) в (3.1.1). С этой целью из (3.1.4) последовательно находим нижеследующие соотношения

$$u_t(t,x) = c_t - \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \cos(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds$$

Учитывая (3.1.4), отсюда имеем

$$u_t = c_t - \alpha\left(u-c\right) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \cos(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds\,. \qquad (3.1.5)$$

$$u_{tt} + \alpha u_t = c_{tt}(t,x) + \alpha c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} Q\left(t,\rho\right) d\rho - \alpha\left(u-c\right) -$$

$$-\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds =$$

$$= c_{tt} + \alpha c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} Q(t,\rho) d\rho - (\alpha+1)\left(u-s\right) \quad . \qquad (3.1.6)$$

Отсюда, дифференцируя обе части, получим

$$u_{ttx} + \alpha u_{tx} = c_{ttx} + \alpha c_{tx} + Q(t,x) -$$

$$-\beta\left[u_{tt} + \alpha u_t + (\alpha+1)(u-c) - c_{tt} - \alpha c_t\right] - (\alpha+1)\left(u_x - c_x\right). \qquad (3.1.7)$$

Отсюда имеем

$$u_{ttx} + \alpha u_{tx} + \beta u_{tt} + \alpha\beta u_t + \left(\alpha+1\right) u_x + \beta\left(\alpha+1\right) u =$$

$$= c_{ttx} + \alpha c_{tx} + \beta c_{tt} + \alpha\beta c_t + \left(\alpha+1\right) c_x + \beta\left(\alpha+1\right) c + Q(t,x)\,. \qquad (3.1.8)$$

Заменяя левую часть уравнения (3.1.1) соотношением (3.1.8), имеем

$$\begin{gathered} Q(t,x) = f\left(t,x,c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds\right) + \\ + \int_0^t K(t,s,x,c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds) ds + H(t,c) = AQ \end{gathered}, \qquad (3.1.9)$$

где

$$H(t,c) \equiv c_{ttx} + \alpha c_{tx} + \beta c_{tt} + \alpha\beta c_t + \left(\alpha+1\right) c_x + \beta\left(\alpha+1\right) c\,. \qquad (3.1.10)$$

Существование решения нелинейного интегрального уравнения (3.1.9) будем доказывать по принципу сжимающих отображений.

Предположим:

1) При всех $\{t \geq 0, \ -\infty < x < \infty\}$ функция $H(t,c)$ непрерывна и ограничена

$\|H(t,c)\| \leq M_0 = const$;

2) в областях своего определения функции $f(t,x,u)$, $K(t,s,x,u)$ ограничены

$$\|f(t,x,u)\| \leq M_1 = const; \qquad \|K(t,s,x,u)\| \leq M_2 = const \tag{3.1.11}$$

и удовлетворяют условиям Липшица по аргументу u:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \leq L\|u_2 - u_1\|, \qquad \|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \leq N\|u_2 - u_1\| \tag{3.1.12}$$

где L, N - некоторые положительные постоянные.

Правую часть (3.1.9) рассмотрим как оператор $A[Q]$, действующий на функцию $Q(t,x)$.

Имеем $\|A[Q]\| \leq \|f(t,x,u) + H(t,c)\| + \|K(t,s,x,u)\| T \leq M$, где $M = M_0 + M_1 = const$.

Учитывая (3.1.9), (3.1.11)-(3.1.12) оценим разность

$$\|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \leq \left\| f\left(t,x,c + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q_1(t,s) d\rho ds \right) - \right.$$

$$\left. - f\left(t,x,c + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q_2(t,s) d\rho ds \right) \right\| +$$

$$\left\| \int_0^t K\left(\tau,x,c + \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(\tau-s) Q_1(\tau,s) d\rho ds \right) - \right.$$

$$\left. - \int_0^t K\left(\tau,x,c + \int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(\tau-s) Q_2(\tau,s) d\rho ds \right) \right\| \leq$$

$$\leq (L + NT) \left\{ \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) \|Q_1(t,s) - Q_2(t,s)\| d\rho ds \right\} \leq$$

$$\leq (L + NT) \frac{1}{\alpha\beta} \|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \leq \frac{1}{2} \|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\|,$$

где α, β - такие, что выполняется

$$\frac{L + NT}{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2}.$$

По принципу сжимающих отображений, отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение (3.1.9) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение $Q(t,x)$.

Далее докажем ограниченность решений задачи Коши (3.1.1)-(3.1.3). Из (3.1.4) в D имеем неравенство

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} |\sin(t-s)| \|Q(s,\rho)\| d\rho ds \le c_0 + \frac{M}{\alpha\beta} = M_{00} = const.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть 1) в D функции $c(t,x),\ c(0,x)=\varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными, входящими в (3.1.1)

2) в областях $[0,T]\times R\times R, [0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R$ функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ ограничены $\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const$; $\|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const$

и удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2 - u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \le N\|u_2 - u_1\|,$$

3) $\dfrac{L+NT}{\alpha\beta} \le \dfrac{1}{2}$.

Тогда в D нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (3.1.1) с начальными данными (3.1.2)-(3.1.3) имеет ограниченное решение.

3.2. Разрешимость и структура решений начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

В данном разделе исследована разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и найдено интегральное представление искомых решений.

Рассмотрим задачу Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ +$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \qquad (3.2.1)$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\alpha^2\gamma\, u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y)\right)+\int_0^t K(t,s,x,\mathrm{y},u(s,x,\mathrm{y}))ds,$$

$(t,x,y)\in D_2=[0,T]\times R^2$,

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),(x,y)\in R^2, \qquad (3.2.2)$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y),(x,y)\in R^2, \qquad (3.2.3)$$

где $\alpha,\beta,\ \gamma$ - положительные постоянные.

Решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) будем искать в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds, \qquad (3.2.4)$$

где $c(t,x,y)$ - известная функция такая, что

$c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y), Q(t,x,y)$ - новая искомая функция.

Предположение (Т).

Пусть $f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L|_u\right)$,

$K(t,s,\mathrm{x},\mathrm{y},u)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_1|_u\right)$

$$\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T.$$

Обозначим

$$H(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\ c_{ty}(t,x,y)\ +$$
$$+\ \alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+\gamma c_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha c_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+2\alpha\beta\gamma c_t(t,x,y)\ +\alpha^2\, c_x\gamma(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma c(t,x,y).$$

В силу подбора $c(t,x,y)$ можно считать, что

$$\max_{[0,T]\times R\times R}\left\|H(t,x,y)\right\|<+\infty.$$

Подставляем (3.2.4) в (3.2.1). Из (3.2.4) производная по t дает:

$$u_t(t,x,y)=c_t(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds-$$

$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds\,,$$

Отсюда, в силу (3.2.4)

$$\begin{gathered}u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)=\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)+\\+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds.\end{gathered}\tag{3.2.5}$$

Производная обеих частей (3.2.5) по t дает:

$$\begin{gathered}u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+\\+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu-\\-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds.\end{gathered}\tag{3.2.6}$$

Из (3.2.6), учитывая (3.2.5), имеем

$$\begin{gathered}u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+\alpha^2c(t,x,y)+\\+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu.\end{gathered}\tag{3.2.7}$$

Производная обеих частей (3.2.7) по x дает:

$$\begin{gathered}u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2c_x(t,x,y)+\\+\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu.\end{gathered}$$

Отсюда с учетом (3.2.7) имеем

$$\begin{gathered}u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+2\alpha\beta u_t(t,x,y)+\alpha^2u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=\\c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2c_x(t,x,y)+\beta c_{tt}(t,x,y)+\\+2\alpha\beta c_t(t,x,y)+\alpha^2\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.\end{gathered}\tag{3.2.8}$$

Дифференцируя (3.2.8) по y, получаем:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+ \qquad (3.2.9)$$
$$+2\alpha\beta c_{ty}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

Далее, умножив (3.2.8) на γ, затем, складывая с (3.2.9) почленно, получаем

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \qquad (3.2.11)$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).$$

Из (3.2.11), в силу уравнения (3.2.1), (3.2.4) для определения неизвестной функции $Q(t,x,y)$ получаем нелинейное интегральное уравнение

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds\right]+$$
$$+\int_0^t K(t,s,x,\mathrm{y},c(s,x,y)+\int_0^s\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sin(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, d\tau)ds-H(t,x,y)\equiv PQ,$$

(3.2.12)

Уравнение (3.2.12) будем решать применением принципа сжимающих отображений. Пусть

$$Q=\left\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in C\left([0,T_0]\times R\times R\right)\cap\left\|Q(t,x,y)\right\|\le h\right\}.$$

Тогда из уравнения (3.2.11) будем иметь $\|PQ\|\le M+N+KT_0$,

где $M\equiv\max f(t,x,y,u),\ N\equiv\max\left\|H(t,x,y)\right\|,\mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,y,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$$M+N+KT_0\le h, \qquad (3.2.13)$$

то, оператор $PQ:Q\to Q$.

Покажем теперь, что оператор PQ является оператором сжатия. Из (3.2.11), используя Предположение (Т), имеем

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le(L+L_1\,\mathrm{t})\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu\, d\mu\, ds\times\|Q_1-Q_2\|\le$$

$$\leq \frac{(L + L_1 T_0)}{\alpha\beta\gamma}\left\| Q_1 - Q_2 \right\|. \qquad (3.2.14)$$

В выше приведенной оценке были использованы следующие неравенства

$$\int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} d\nu d\mu ds \leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)} \left(\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)} d\nu \right) d\mu \right] ds \leq$$

$$\leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)} \left(\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma y} \cdot e^{\gamma\nu} \Big|_{\nu=-\infty}^{y} \right) d\mu \right] ds \leq \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Выберем константы $\alpha, \beta, \gamma \in R_+ \, u \, T_0$ так, чтобы выполнялось неравенство вида $\frac{(L + L_1 T_0)}{\alpha\beta\gamma} < 1$. Тогда в силу предположения (T) из (3.2.14) следует, что PQ есть оператор сжатия на множестве Q. По принципу сжимающих отображений следует, что система нелинейных интегральных уравнений (3.2.12) имеет единственное непрерывное решение $Q(t, x, y) \in Q$. Подставив найденную функцию в (3.2.4), получим решение задачи Коши (3.2.1)-(3.2.3).

Исследуем теперь дифференциальные свойства решения задачи Коши (3.2.1)-(3.2.3). Для всех $Q(t,x,y) \in Q$ из равенства (3.2.4) следует неравенство

$$\left\| u(t,x,y) \right\| \leq \left\| c(t,x,y) \right\| + \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x \sin \int_{-\infty}^y (t-s) e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} Q(s,\mu,\nu) d\nu d\mu ds \right\| \leq$$

$$\leq C_0 + \frac{T_0 h}{\alpha\beta\gamma} = M_0 = const \cdot$$

Из (3.2.5) имеем

$$\left\| u_t(t,x,y) + \alpha u(t,x,y) \right\| \leq \left\| \alpha c(t,x,y) + c_t(t,x,y) \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} Q(s,\mu,\nu) d\nu d\mu ds \right\| \leq C_1 + \frac{h}{\alpha\beta\gamma} = M_1 = const.$$

Аналогично, из (3.2.7)-(3.2.9) можно доказать, что все производные входящие в уравнение (3.2.1), равномерно ограничены.

Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть выполнено Предположение (T). Тогда задача Коши (3.2.1)-(3.2.3) имеет решение $u(t,x,y)\in \overline{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$, которое представимо в виде (3.2.4).

Замечание. Если в уравнении (3.2.1) $K(t,s,x,y,u)\equiv 0$ и окажется линейным, т.е. правая часть не зависит от u и имеет вид $f(t,x,y)$, то решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) можно найти в квадратурах

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\left[f(s,\mu,\nu)-H(s,\mu,\nu)\right]d\nu d\mu ds.$$

Это утверждение следует из (3.2.12), (3.2.4).

3.3. О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром

3.3.1. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных с параметром

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left[u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)\right]+\\&+A(t,x,y,\varepsilon)u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u\left(t,x,y\right),\varepsilon\right)+\int_0^t K\left(t,s,x,y,u\left(s,x,y\right),\varepsilon\right)ds,\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где $t\in[0,T]$, $(x,y)\in R\times R$, с начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y). \tag{3.3.2}$$

Предположение А. Пусть

$$A(t,x,y,\varepsilon)\in\overline{C}\left([0,T]\times R\times R\right),\qquad f(t,x,y,u)\in\overline{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right),$$

$$K(t,s,x,y,u,\varepsilon)\in\overline{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\varphi(x,y)\in\overline{C}^1\left(R\times R\right).$$

Ясно, что из (3.3.2) имеем $\|A(t,x)\|\le M_A=const$.

Решение задачи Коши (3.3.1)-(3.3.2) ищем в виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds\,. \tag{3.3.3}$$

где $Q(t,x,y)$– неизвестная функция, подлежащая определению; $\alpha,\beta \in R_{+}$ и их значения будут определяться позже.

Последовательно дифференцируя по t и x, y соотношение (3.3.3), имеем

$$u_t(t,x,y) = -[\varphi'_x(x-t,y-t) + \varphi'_y(x-t,y-t)] + \frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) - \frac{\alpha}{\varepsilon}(u-\varphi) -$$

$$-\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon}s}\frac{1}{\varepsilon}[Q_x(s,x-t+s,y-t+s) + Q_y(s,x-t+s,y-t+s)]ds$$

$$u_x(t,x,y) = -\varphi'_x(x-t,y-t) + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q_x(s,x-t+s,y-t+s)ds,$$

$$u_y(t,x,y) = -\varphi'_y(x-t,y-t) + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q_y(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Тогда $u_t(t,x) + u_x(t,x,y) + u_y(t,x,y) = \frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) - \frac{\alpha}{\varepsilon}u + \frac{\alpha}{\varepsilon}\varphi(x-t,y-t).$

Умножая обе части последнего уравнения на ε, имеем

$$\varepsilon(u_t + u_x + u_y) + \alpha u(t,x,y) = e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) + \alpha\varphi(x-t,y-t). \qquad (3.3.4)$$

Учитывая (3.3.3), вычислим соотношение

$$\left[A(t,x,y,\varepsilon) - \alpha\right]u = \left[A(t,x,y,\varepsilon) - \alpha\right]\varphi(x-t,y-t) + \left[A(t,x,y,\varepsilon) - \alpha\right]*$$

$$*\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q\ (s,x-t+s,y-t+s)ds. \qquad (3.3.5)$$

Складывая почленно соотношения (3.3.4) и (3.3.5), получим

$$\varepsilon(u_t + u_x + u_y) + A(t,x,y,\varepsilon)u = f(t,x,\text{y},u) + \int_0^t K\left(t,s,x,y,u,\varepsilon\right)ds = e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) +$$

$$+\alpha\varphi(x-t,y-t) + A(t,x,y,\varepsilon)\varphi(x-t,y-t) - \alpha\varphi(x-t,y-t) +$$

$$+\left[A(t,x,y) - E\right]\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Отсюда, учитывая (3.3.3), имеем

$$Q(t,x,y) = e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left\{f(t,x,\text{y},[*])ds +\right.$$

$$+\int_0^t K\big(t,s,x,y,[*],\varepsilon\big)ds - A(t,x,y,\varepsilon)\varphi(x-t,y-t)\big\} -$$
$$-\big[A(t,x,y,\varepsilon)-E\big]\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\beta)}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds \equiv PQ, \qquad (3.3.6)$$

где [*] обозначает правую часть соотношения (3.3.3). Уравнение (3.3.6) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, относительно неизвестной функции $Q(t,x,y)$. Правую часть обозначим, как оператор PQ.

Интегральное уравнение (3.3.6) будем решать, применяя принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим шар $Q=\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in C\big([0,T_0]\times R\times R\big)\cap\|Q(t,x,y)\|\le h\}$.

Отметим, что величины $T_0\le T$ и h будут определены ниже.

Пусть

$$\left\|\{f(t,x,y,[*])ds+\int_0^t K\big(t,s,x,y,[*],\varepsilon\big)ds - A(t,x,y,\varepsilon)\varphi(x-t,y-t)\}\right\|\le M.$$

Из (3.3.6) в силу Предположения А имеем

$$\|PQ\|\le e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}M+(M_A+n)\frac{2}{\alpha+\beta}h.$$

Предположим, что α,β такие, что

$$\frac{2(M_A+n)}{\alpha+\beta}<1 . \qquad (3.3.7)$$

Будем считать $T_0\le T$ и h такими, что $e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}M+(M_A+n)\frac{2}{\alpha+\beta}h\le h.$ Тогда оператор $PQ:Q\to Q$.

Покажем теперь, что оператор P является оператором сжатия. Из (3.3.6), используя Предположение А, получаем

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le\left\|e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left[f(t,x,\varphi(x-t,y-t)+e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}\int_0^t e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}Q_1(s,x-t+s,y-t+s)ds)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-f(t,x,\varphi(x-t,y-t)+e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}\int_0^t e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}Q_2(s,x-t+s,y-t+s)ds)\right]\right\|+$$

$$\left\| e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}} \left[\int_0^t K(t,s,x,y,\varphi(x-s,y-s) + e^{\frac{\beta s}{\varepsilon}} \int_0^s e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(s-\tau)} \frac{1}{\varepsilon} Q_1(s,x-s+\tau,y-s+\tau)d\tau) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\int_0^t K(t,s,x,y,\varphi(x-s,y-s) + e^{\frac{\beta s}{\varepsilon}} \int_0^s e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(s-\tau)} \frac{1}{\varepsilon} Q_2(s,x-s+\tau,y-s+\tau)d\tau) \right] \right\| +$$

$$+\left\| [A(t)-E]\int_0^t e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(t-s)} \frac{1}{\varepsilon}[Q_1(s,x-t+s,y-t+s) - Q_2(s,x-t+s,y-t+s)]ds \right\| \le$$

$$\le \frac{2(L_1+L_2T+M_A+n)}{\alpha+\beta}\|Q_1-Q_2\|. \tag{3.3.8}$$

Потребуем, чтобы было $\frac{2(L_1+L_2T+M_A+n)}{\alpha+\beta}<1$. Тогда, очевидно, выполняется и соотношение (3.3.7), поскольку $L_1, L_2 \in R_+$.

Тогда из (3.3.8), (3.3.7) следует, что PQ есть оператор сжатия на множестве Q. По принципу сжимающих отображений уравнение (3.3.6) имеет единственное решение $Q(t,x,y) \in Q$. Подставив найденную функцию в (3.3.3), получим решение задачи Коши (3.3.1), (3.3.2).

Теперь сформулируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 3.3.1**.** Пусть выполнено Предположение А. Тогда $\exists\, T_0 > 0$, такое, что задача Коши (3.3.1), (3.3.2) имеет решение

$u(t,x,y) \in \overline{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, представляемое в виде (3.3.3).

3.3.2. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения

$$\varepsilon^3 u_{txy} + \varepsilon\left(u_t + u_x + u_y\right) + A(t,x,y)u = f(t,x,y,u),\ t\in\left[0,1\right],\ (x,y)\in R\times R, \tag{3.3.9}$$

с начальным условием (3.3.2), где функции $A(t,x,y), f(t,x,y,u)$ такие же, как в пункте 3.3.1. Решение задачи Коши (3.3.9), (3.3.2) будем искать в виде

$$u(t,x,y) = \varphi(x,y) + \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu} \frac{1}{\varepsilon^3} Q(s,\mu,\nu)\,d\mu d\nu ds, \tag{3.3.10}$$

где $Q(t,x,y)$ – неизвестная функция, α,β,γ - некоторые положительные постоянные, которые будут определяться позже.

Из (3.3.10) находим частные производные первого и второго порядка функции $u(t,x,y)$, т.е.

$$u_t = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu, \qquad (3.3.11)$$

$$u_x = \varphi_x'(x,y) + \int_0^t\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,x,\nu)dsd\nu, \qquad (3.3.12)$$

$$u_y = \varphi_y'(x,y) + \int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,y)dsd\mu$$

$$u_{tx} = \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,x,\nu)\mathrm{d}\nu\,. \qquad (3.3.13)$$

$$u_{txy} = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,x,y).$$

Тогда из (3.3.9), учитывая (3.3.11)–(3.3.13), имеем

$$\varepsilon^3 u_{txy} + \varepsilon\left(u_t+u_x+u_y\right) + A(t,x,y)u \equiv e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}y+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\alpha}{\varepsilon}t}Q(t,x,y) + \varepsilon\varphi_x'(x,y) +$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,x,\nu)dsd\nu + \varepsilon\varphi_y'(x,y) + \int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,\mu,y)dsd\mu +$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu + A(t,x,y)\varphi(x,y) + A(t,x,y)\cdot$$

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds =$$

$$= f\left(t,x,\varphi(x,y) + \int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds\right) \qquad (3.3.14)$$

Из (3.3.14) имеем

$$Q(t,x,y)=e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\left[-A(t,x,y)\varphi(x,y)-\varepsilon\varphi'_x(x,y)-\varepsilon\varphi'_y(x,y)\right]+$$

$$+e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}f(t,x,y,\varphi(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds)+$$

$$+e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}[-\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu-$$

$$-\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,x,\nu)dsd\nu-\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,\mu,y)dsd\mu-$$

$$-A(t,x,y)\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds]\equiv P(Q). \qquad (3.3.15)$$

К нелинейному интегральному уравнению (3.3.15) применим принцип сжимающих отображений.

Условие (С). Предположим, что

$$f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L|_u\right).$$

Пусть

$$\Omega=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\right)\cup\|u\|\le h\right\},$$

причем величина h будет определяться ниже.

Имеем

$$\|PQ\|\le e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\left[\|A(t,x,y)\|\|\varphi(x,y)\|+\varepsilon\|\varphi'_x(x,y)\|\right]+$$

$$e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\left\|f(t,x,y,\varphi(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds)\right\|+$$

$$+e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}[\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Q(s,x,\nu)\|dsd\nu+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Q(s,\mu,y)\|dsd\mu+$$

$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Q(t,\mu,\nu)\|d\mu d\nu+\|A(t,x,y)\|\times$$

$$\times\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}\|Q(s,\mu,\nu)\|d\mu d\nu ds]\le e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\bar{M}_f+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)\times$$

$$\times\|Q\|\le\bar{M}_f+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)\|Q\|.$$

где $\bar{M}_f=M_f+\|A(t,x,y)\|\|\varphi(x,y)\|+\varepsilon\|\varphi'_x(x,y)\|+\varepsilon\|\varphi'_y(x,y)\|$.

Выберем α,β,γ и h так, чтобы

$$\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}<1,$$

$$\bar{M}_f+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)h\le h.$$

Тогда оператор PQ переводит множество Ω в себя.

Покажем теперь, что оператор PQ является оператором сжатия. Из (3.3.15), используя условие (C), получаем

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma})\|Q_1-Q_2\|. \qquad (3.3.16)$$

Тогда из (3.3.16) следует, что PQ есть оператор сжатия на множестве Ω. По принципу сжимающих отображений уравнение (3.3.15) имеет единственное решение $Q(t,x,y)\in\Omega$. Подставив найденную функцию $Q(t,x,y)$ в (3.3.10), получим решение задачи Коши (3.3.9), (3.3.2).

ТЕОРЕМА 3.3.2. Пусть выполнены условия (C). Тогда $\exists T_0>0$, такое, что задача Коши (3.3.9), (3.3.2) имеет единственное решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, которое представимо в виде (3.3.10).

3.4. О разрешимости начальной задачи для сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка

$$\varepsilon^3 u_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 u_{tx} + \beta\varepsilon^2 u_{tt} + \alpha\beta\varepsilon u_t + (\alpha+1)\varepsilon u_x + \beta(\alpha+1)u = f(t,x,u(t,x)) + \\ +\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds \qquad (3.4.1)$$

(t,x) $\in$ *D*,

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x), x \in R, \qquad (3.4.2)$$

$$u_t(0,x) = \psi(x), x \in R, \qquad (3.4.3)$$

где α, β - некоторые положительные постоянные, $f(t,x,u)$, $K(t,x,s.u)$ - известные непрерывные функции; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными, входящими в (3.4.1).

Решение задачи Коши (3.4.1)-(3.4.3) ищем в виде

$$u(t,x) = c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \qquad (3.4.4)$$

где $c(t,x)$ - известная непрерывная функция, причем

$$c(0,x) = \varphi(x),$$

$$c_t(0,x) = \psi(x),$$

$Q(t,x)$ - новая неизвестная функция, которую необходимо определить.
Для определения функции $Q(t,x)$ необходимо подставить (3.4.4) в (3.4.1).

С этой целью из (3.4.4) последовательно находим нижеследующие соотношения

$$u_t(t,x) = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds + \\ +\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} \cos\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds$$

Учитывая (3.4.4), отсюда имеем

$$u_t = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon}(u-c) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} \cos\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds. \qquad (3.4.5)$$

$$u_{tt}+\frac{\alpha}{\varepsilon}u_t=c_{tt}(t,x)+\frac{\alpha}{\varepsilon}c_t+\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,\rho)d\rho-\frac{\alpha}{\varepsilon^2}(u-c)-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds=$$

$$=c_{tt}+\frac{\alpha}{\varepsilon}c_t+\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,\rho)d\rho-\frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u-s). \qquad (3.4.6)$$

Отсюда, дифференцируя обе части, получим

$$u_{ttx}+\frac{\alpha}{\varepsilon}u_{tx}=c_{ttx}+\frac{\alpha}{\varepsilon}c_{tx}+\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,x)-$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\left[u_{tt}+\frac{\alpha}{\varepsilon}u_t+\frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u-c)-c_{tt}-\frac{\alpha}{\varepsilon}c_t\right]-\frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u_x-c_x). \qquad (3.4.7)$$

Умножая обе части (3.4.7) на ε^3, имеем

$$\varepsilon^3u_{ttx}+\alpha\varepsilon^2u_{tx}+\beta\varepsilon^2u_{tt}+\alpha\beta\varepsilon u_t+(\alpha+1)\varepsilon u_x+\beta(\alpha+1)u=$$

$$=\varepsilon^3c_{ttx}+\alpha\varepsilon^2c_{tx}+\beta\varepsilon^2c_{tt}+\alpha\beta\varepsilon c_t+(\alpha+1)\varepsilon c_x+\beta(\alpha+1)c+Q(t,x). \qquad (3.4.8)$$

Заменяя левую часть уравнения (3.4.1) соотношением (3.4.8), имеем

$$Q(t,x)=f\left(t,x,c+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds\right)+$$
$$+\int\limits_0^t K(t,\tau,x,c+\int\limits_0^\tau\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(\tau-s)Q(s,\rho)d\rho ds)d\tau-H(t,\varepsilon,c)\equiv AQ, \qquad (3.4.9)$$

где

$$H(t,\varepsilon,c)\equiv\varepsilon^3c_{ttx}+\alpha\varepsilon^2c_{tx}+\beta\varepsilon^2c_{tt}+\alpha\beta\varepsilon\, c_t+(\alpha+1)\varepsilon\, c_x+\beta(\alpha+1)c. \qquad (3.4.10)$$

Нелинейное интегральное уравнение (3.4.9) будем решать, применяя принцип сжимающих отображений.

Предположим:

1) В области D функция $H(t,\varepsilon,c)$ непрерывна и ограничена

$\|H(t,\varepsilon,c)\|\le M_0=const$;

2) в области $D\times R$ функция $f(t,x,u)$ непрерывна и ограничена

$$\|f(t,x,u)\|\le M_1=const; \qquad \|K(t,s,x,u)\|\le M_2=const \qquad (3.4.11)$$

Кроме того в этой области функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу u:

$$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\le L\|u_2-u_1\|,$$

$$\|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\le L_1\|u_2-u_1\| \qquad (3.4.12)$$

где L, L_1 - некоторые положительные постоянные.

Правую часть (3.4.9) рассмотрим как оператор $A[Q]$ действующий на функцию $Q(t,x)$.

Имеем

$$\|A[Q]\|\le\left\|f(t,x,u)+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds-H(t,\varepsilon,c)\right\|\le M\ ,$$

где $M=M_0+M_1=const$.

Учитывая (3.4.9), (3.4.11)-(3.4.12) оценим разность

$$\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\|\le\left\|f\left(t,x,c+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q_1(t,s)d\rho ds\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(t,x,c+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q_2(t,s)d\rho ds\right)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t K(t,\tau,x,c+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(\tau-s)Q_1(s,\rho)d\rho ds)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^t K(t,\tau,x,c+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(\tau-s)Q_2(s,\rho)d\rho ds)d\tau\right\|\le$$

$$\le\frac{L+L_1T}{\alpha\beta}\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\|\le\frac{1}{2}\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\|,$$

где $\alpha,\ \beta$ - такие, что выполняется

$$\frac{L+L_1T}{\alpha\beta}\le\frac{1}{2}.$$

По принципу сжимающих отображений, отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение (3.4.9) при всех $\{t\ge 0,\ -\infty<x<\infty\}$ имеет единственное непрерывное и ограниченное решение $Q(t,x)$.

Далее докажем ограниченность решений задачи Коши (3.4.1)-(3.4.3). Из (3.4.4) в области D имеем неравенство

$$\|u(t,x)\|\le\|c(t,x)\|+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)\right|\|Q(s,\rho)\|d\rho ds\le c_0+\frac{M}{\alpha\beta}=M_{00}=const.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть 1) в области D функции $c(t,x),\ c(0,x)=\varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными, входящими в (3.4.1)

2) в соответствующих областях функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ непрерывны и ограничены

$\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const$; $\|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const$

Кроме того, в этих областях функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2-u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\| \le L_1\|u_2-u_1\|,$$

3) $\dfrac{L+L_1T}{\alpha\beta} \le \dfrac{1}{2}$.

Тогда в области D сингулярно-возмущенное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (3.4.1) с начальными данными (3.4.2)-(3.4.3) имеет ограниченное решение.

3.5. О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x} + (\alpha^2+1)L[u] = f\left(t,x,u,u_t,u_x\right) + \int_0^t K\left(t,s,u\left(s,x\right)\right)ds, \qquad (3.5.1)$$

где $L[u]=u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u, t\in\left[0,T\right],\ x\in R,\ \alpha,p\in R_+$ с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi\left(x\right), \qquad (3.5.2)$$

$$u_t(0,x)=\psi(x). \qquad (3.5.3)$$

Предположение А. Пусть

$$f(t,x,u,u_t,u_x)\in\overline{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1|_u\right),$$

$$K(t,s,x,u)\in\overline{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2|_u\right), \varphi(x)\in\overline{C}^2\left(R\right), \psi(x)\in\overline{C}^2\left(R\right)$$

Решение задачи Коши (3.5.1)-(3.5.3) ищем в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+ \\ +\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu \quad (3.5.4)$$

Мы будем следовать методу, предложенному в [1-2].

Будем находить частные производные искомой функции из соотношения (3.5.4). Имеем

$$u_t(t,x)=c_t(t,x)+ \\ -p\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu+ \\ \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu=$$

$$=c_t(t,x)-p[u(t,x)-c(t,x)]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu.$$

Отсюда

$$u_t+pu=c_t+pc+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu.$$

Далее, имеем

$$u_{tt}+pu_t=c_{tt}+pc_t+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds- \\ -p[u_t+pu-(c_t+pc)]+(u-c).$$

Отсюда

$$L[u]\equiv u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u=c_{tt}+pc_t+(p^2+1)c+ \\ +\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds; \quad (3.5.5)$$

$$L[u]=L[c]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds.$$

Кроме того

$$\frac{dL[u]}{dx}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[L[u]-L[c]]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)\,ds. \quad (3.5.6)$$

Из (3.5.6) находим производные по x

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[\frac{dL[u]}{dx}-\frac{dL[c]}{dx}]-\alpha\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)\,ds-$$
$$-\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds+Q(t,x).$$

Из последнего с учетом (3.5.5), (3.5.6) находим

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[u]}{dx}+(\alpha^2+1)L[u]=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+ \quad (3.5.7)$$
$$+(\alpha^2+1)L[c]+Q(t,x).$$

Обозначим

$$H(t,x,c)=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+(\alpha^2+1)L[c].$$

Из (3.5.1) и (3.5.7) вытекает нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $Q(t,x)$ вида:

$$Q(t,x)=f(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu,$$
$$c_t(t,x)-p[u(t,x)-c(t,x)]+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu,$$
$$c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu) \quad (3.5.8)$$
$$+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu\right)d\tau+$$
$$+H(t,x,c)\equiv A[Q].$$

Для решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (3.5.8) дополнительно, допустим некоторые ограничения относительно функции $H(t,x,c)$:

В области D функция $H(t,x,c)$ непрерывна и ограничена

$$\|H(t,x,c)\|\le M_0=const.$$

Уравнение (3.5.8) будем решать с помощью принципа сжимающих отображений. Правую часть уравнения (3.5.8) рассмотрим, как оператор *A[Q],* действующий на функцию $Q(t,x)$.

Определим множество

$$Q=\left\{u(t,x):u(t,x)\in\overline{C}^{(2,2)}\left([0,T]\cap R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$$

Величины T, h определяются позже.

Из уравнения (3.5.8) имеем $\|AQ\| \le M_1 + M_0 + KT_0$,

где $M_1 \equiv \max f(t,x,u,u_t,u_x,)$, $M_0 \equiv \max\left\|H(t,x,c)\right\|$, $\mathrm{K} \equiv \max \mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$M_1 + M_0 + KT_0 \le h$,

то, оператор $AQ: Q \to Q$. Теперь оценим разность

$$\|A[Q_1(t,x)] - A[Q_2(t,x)]\| \le \Big\| f(t,x,c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\sin(t-\nu) Q_1(\nu,s)\, ds d\nu,$$

$$c_t(t,x) - p[u(t,x) - c(t,x)] + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\cos(t-\nu) Q_1(\nu,s)\, ds d\nu,$$

$$c_x(t,x) - \alpha[u-c] + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \cos(x-s)\sin(t-\nu) Q_1(\nu,s)\, ds d\nu)$$

$$+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x) + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)} \sin(x-s)\sin(\tau-\nu) Q_1(\nu,s)\, ds d\nu \right) d\tau -$$

$$-f(t,x,c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\sin(t-\nu) Q_2(\nu,s)\, ds d\nu,$$

$$c_t(t,x) - p[u(t,x) - c(t,x)] + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\cos(t-\nu) Q_2(\nu,s)\, ds d\nu,$$

$$c_x(t,x) - \alpha[u-c] + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \cos(x-s)\sin(t-\nu) Q_2(\nu,s)\, ds d\nu)$$

$$+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x) + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)} \sin(x-s)\sin(\tau-\nu) Q_2(\nu,s)\, ds d\nu \right) d\tau \Big\| \le$$

$$\le [\frac{3L_1}{\alpha p} + \frac{L_2}{\alpha p}] \|Q_1(\nu,s) - Q_2(\nu,s)\|.$$

Выберем $\alpha, p \in R_+$ так, что

$$\frac{3L_1}{\alpha p} + \frac{L_2}{\alpha p} < 1.$$

Отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода (3.5.8) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение

Q(t,x).

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений начальной задачи (3.5.1)-(3.5.3).

В области D из равенства (3.5.4) вытекает неравенство:

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| +$$
$$+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} |\sin(x-s)\sin(t-\nu)| \|Q(\nu,s)\| ds d\nu \le$$
$$\le C_0 + \frac{h}{\alpha p} = h_1 = const.$$

При проведении вышеприведенной оценки было учтено, что $|\sin\alpha| \le 1, |\sin\beta| \le 1.$

Аналогичные оценки можно получить и для всех производных, входящих в уравнение (3.5.1).

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 3.5.1. Пусть выполнены предположения (А). Тогда $\forall T_0 > 0$, такое, что задача Коши (3.5.1)-(3.5.2) имеет решение $u(t,x) \in \overline{C}^{(2,2)}([0,T_0] \times R)$, представляемое в виде (3.5.4). Кроме того все производные, входящие в уравнение (3.5.1), равномерно ограничены.

3.6. О периодических решениях краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра

3.6.1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра (ИУВ) второго рода

$$u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad (3.6.1),$$

где $K(t,s)$ – квадратная матричная функция; а $f(t)$ – вектор-функция, определенные и непрерывные соответственно в областях $-\infty <$ s, t $< \infty$, $-\infty < t < \infty$, причем

$$K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s), \quad f(t+\omega) = f(t), \qquad (3.6.2)$$

вопросы существования периодических решений.

Как известно, для систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t+\omega) = A(t) \tag{3.6.3}$$

если $x(t)$ – решение, то функция $x(t+\omega)$ тоже является ее решением. Этот факт лежит в основе методов исследования проблемы периодических решений систем вида (3.6.3). Для ИУВ (3.6.1) такое явление не имеет места, так как интегральный оператор Вольтерра не всегда отображает периодический вектор в периодический [5, с. 57], т.е. в случае ИУВ не для всякого решения $u(t)$ будет его решением и функция $u(t+\omega)$. В силу не периодичности оператора Вольтерра очень важна проблема выделения такого класса ИУВ, для которых существуют периодические решения.

ТЕОРЕМА 3.6.1**.** Наряду с $u(t)$ будет решением ИУВ (3.6.1), (3.6.2) и функция $u(t+\omega)$ в том, и только в том случае, когда для $u(t)$ выполняется тождество

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega, s)u(s)ds = 0 \tag{3.6.4}$$

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условия (3.6.4) теоремы. Пусть $u(t)$ - некоторое ω-периодическое решение (3.6.1), т.е.

$$u(t+\omega) = u(t). \tag{3.6.5}$$

Отсюда в силу (3.6.1) имеем

$$\int_0^{t+\omega} K(t+\omega, s)u(s)ds + f(t+\omega) = \int_0^{t} K(t,\ s)u(s)ds + f(t).$$

Далее, учитывая (3.6.2) и преобразуя интеграл с левой стороны, получим

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega, s)u(s)ds + \int_{\omega}^{t+\omega} K(t+\omega, s)u(s)ds = \int_0^{t} K(t,s)u(s)ds.$$

Сделаем замену во втором интеграле левой стороны равенства: $s = \tau + \omega$. Находим пределы интегрирования:

При $s=\omega, \tau=0$ и при $s=t+\omega, \tau=t$

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+\int_0^{t} K(t+\omega,\tau+\omega)u(\tau+\omega)ds=\int_0^{t} K(t,s)u(s)ds.$$

Из последнего равенства в силу (3.6.2), (3.6.5) имеем (3.6.4).

2) Докажем теперь достаточность условий (3.6.4). Предположим, что выполнено (3.6.4) и пусть *u(t)* – решение (3.6.1). Тогда в силу (3.6.2), (3.6.4) имеем

$$u(t+\omega)=\int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+f(t+\omega)=$$

$$=\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+\int_{\omega}^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds+f(t)=$$

$$=\int_0^{t} K(t+\omega,\tau+\omega)u(\tau+\omega)d\tau+f(t)=\int_0^{t} K(t,\tau)u(\tau+\omega)d\tau+f(t).$$

Последнее соотношение показывает, что функция *u(t)* также является решением уравнения (3.6.1). Что и требовалось доказать.

Замечание 1. В силу произвольности t в (3.6.4) в слагаемом $t+\omega$ можно опустить ω, но по соображениям дальнейших удобств мы сохраняем такую форму.

Условие (3.6.4) представляет собой неявное ограничение на ядро *K(t,s)*.

Замечание 2. Теорема остается справедливой и для ИУВ первого рода

$$\int_0^{t} K(t,s)u(s)ds=f(s) \qquad (3.6.6)$$

при выполнении условий (3.6.2).

Следуя методике, приведенной в [3], покажем справедливость замечания 2. Пусть *u(t)* – некоторое периодическое решение (3.6.6). Известно, что для любого $t \geq 0$ найдется неотрицательное целое число n и величина $\theta \in [0,\omega]$, что (*) $t = \theta + n\omega, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \omega$.

Поэтому, заменяя в полученном тождестве (3.6.6) t *на* $\theta + n\omega$ и учитывая (3.6.2), получим

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta + n\omega, s)u(s)ds = f(\theta). \tag{3.6.7}$$

Так как, во-первых,

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta + n\omega, s)u(s)ds = \left[\int_0^{n\omega} + \int_{n\omega}^{\theta+n\omega}\right] K(\theta + n\omega, s)u(s)ds =$$

$$= \int_0^{n\omega} K(\theta + n\omega, s)u(s)ds + \int_0^{\theta} K(\theta + \delta)u(\delta)d\delta.$$

где в последнем переходе второй интервал преобразован с помощью подстановки $s = \delta + n\omega$ и использованы периодичность ядра и решения; во-вторых, тождество (3.4.7) верно и при $n=0$, то

$$\int_0^{n\omega} K(\Theta + n\omega, s)u(s)ds = 0, \quad \forall n \geq 1. \tag{3.6.8}$$

В свою очередь, так как

$$\int_\omega^{n\omega} K(\theta + n\omega, s)u(s)ds = \int_0^{(n-1)\omega} K(\theta + (n-1)\omega, s)u(s)ds = 0, \tag{3.6.9}$$

где сначала проведено преобразование $s = \delta + \omega$ и использовано свойство ядра $K(t,s)$ из (3.6.2), а затем учтено, что соотношение (3.6.8) в силу произвольности n верно и для $n-1$. Имеем

$$\int_0^{n\omega} K(\theta + n\omega, s)u(s)ds = \left[\int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{n\omega}\right] K(\theta + n\omega, s)u(s)ds = 0.$$

Отсюда, учитывая (3.6.9), имеем

$$\int_0^{\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds=0,$$

или, так как $t=\theta+n\omega$, отсюда имеем (3.6.4).

Таким образом, для существования ω–периодического решения ИУВ второго (первого) рода с периодическим ядром и свободным членом, необходимо и достаточно выполнения условия (3.6.4). Необходимость этого условия, видимо, впервые была обнаружена Г.Вахабовым [4], при исследовании интегро-дифференциальных систем. Условие (3.6.4) было использовано в [3, 4] при обосновании метода построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пример 3.6.1. Для ИУВ второго рода

$$u(t)+\int_0^t \sin s\, u(s)ds=\cos t+2\sin^2 t \qquad (3.6.10)$$

выполнены все условия (3.6.2), где $\omega=2\pi$. Уравнение (3.6.10) имеет решение $u(t)=\cos t,$ период которого $\omega=2\pi$. Условие (3.6.4) в данном случае запишется в виде $\int_0^{2\pi}\cos s\sin s ds=0$, и оно выполнено (ортогональность функций $\sin t,\quad \cos t$ на $[0,2\pi]$).

Пример 3.6.2. Для ИУВ первого рода

$$\int_0^t (t-s)u(s)ds=t-\sin t \qquad (3.6.11)$$

также выполнены условия (3.6.2), где $\omega=2\pi$. Уравнение (3.6.11) имеет решение $u(t)=\sin t,$, период которого $\omega=2\pi$. В силу замечания 1, для $\forall t$ проверим выполнение условия (3.6.4):

$$\int_0^{2\pi}(t-s)\cos ds=-(t-s)\sin s\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin s\,ds=\cos s\Big|_0^{2\pi}=0.$$

II. Рассмотрим векторно-матричное нелинейное ИУВ с периодическими коэффициентами

$$u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + F(t,u), t \in (-\infty, \infty), \qquad (3.6.12)$$

где $K(t,s)$ непрерывная $n{\times}n$-матричная функция, n-мерная вектор функция $F(t,u)$ определена и непрерывна в области $t \in R, \|u\| \le U_0$, причём

$$K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s), F(t+\omega, u) = F(t,u) \qquad (3.6.13)$$

Пусть $u = u_\omega(t), t \in [0,\omega]$ - решение периодической краевой задачи $u(0) = u(\omega)$ для интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13). Обозначим $u = \tilde{u}_\omega(t)$ - периодическое продолжение $u_\omega(t)$ на всю ось. Поставим вопрос: при выполнении каких условий ω-периодическая функция $\tilde{u}_\omega(t)$ будет решением интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13).

Так как $\tilde{u}_\omega(t)$ есть ω-периодическое продолжение $u_\omega(t)$ справедливо соотношение

$$\tilde{u}_\omega(t) = u_\omega(t - n\omega), n\omega \le t \le (n+1)\omega, n \ge 0 \qquad (3.6.14)$$

В силу (*)(3.6.14) можно представить в виде

$$\tilde{u}_\omega(t) = \tilde{u}_\omega(\theta + n\theta) = \tilde{u}_\omega(\theta), t = \theta + n\omega, 0 \le \theta \le \omega \qquad (3.6.15)$$

Имеет место [4]

<u>Лемма</u>. Если для $u_\omega(t)$, $t \in [0,\omega]$ и произвольного β выполнено условие

$$\int_0^\omega K(\beta + \omega, s)u_\omega(s)ds = 0, \qquad (3.6.16)$$

то для $\tilde{u}_\omega(t)$ и натурального m справедливо соотношение

$$\int_0^\omega K(\beta + m\omega, s)\tilde{u}_\omega(s)ds = 0. \qquad (3.6.17)$$

Эта лемма позволяет доказать следующее предложение:

ТЕОРЕМА 3.6.2. Периодическое продолжение $\tilde{u}_\omega(t)$ решения $u_\omega(t)$ периодической краевой задачи для интегрального уравнения (3.6.12) с периодическими коэффициентами (3.6.13) будет решением того же уравнения тогда и только тогда, когда для $u_\omega(t)$ выполнено условие (3.6.16).

Необходимость. Так как $\widetilde{u}_\omega$ - решение задачи (3.6.12), (3.6.13), то справедливо тождество

$$\widetilde{u}_\omega(t) = \int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds + F(t,\widetilde{u}_\omega(t)) \tag{3.6.18}$$

Откуда в силу (3.6.12), (3.6.15)

$$\int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega ds = \int_0^{\omega} K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds + \int_\omega^{t+\omega} K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds =$$

$$\begin{pmatrix} s=\tau+\omega \\ ds = d\tau \\ s=\omega, \tau=0 \\ s=t+\omega, \tau=t \end{pmatrix} = \int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u_\omega(s)ds + \int_0^{t} K(t,\tau)\widetilde{u}_\omega(s)ds, \tag{3.6.19}$$

для произвольного t имеем

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u_\omega(s)ds = 0,$$

здесь можно положить $t=\beta$.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (3.6.16) и покажем, что $\widetilde{u}_\omega(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.6.12). Составим выражение

$$V(t) = \widetilde{u}_\omega(t) - \int_0^{t+\omega} K(t,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds - F(t,\widetilde{u}_\omega(t)) \tag{3.6.20}$$

Положим в (3.6.20) $t=\theta+n\omega$, $0\le\theta\le\omega$ и учитывая (3.6.13),(3.6.15) имеем

$$V(t) = V(\theta+n\omega) = u_\omega(\theta) - \int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\overline{u}_\omega(s)ds - F(\theta,u_\omega(\theta)) \tag{3.6.21}$$

Рассмотрим интегральную часть

$$\int\limits_{0}^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\widetilde{u}_{\omega}(s)ds = \left(\int\limits_{0}^{n\omega} + \int\limits_{n\omega}^{\theta+n\omega} \right) K(\theta+n\omega,s)\widetilde{u}_{\omega}(s)ds,$$

Первое слагаемое в силу Леммы есть нуль$(m=1)$. Преобразуем второе слагаемое с помощью подстановки $s=\tau+n\omega$ и учитывая (3.6.13), (3.6.15) получим

$$\int\limits_{0}^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\widetilde{u}_{\omega}(s)ds = K(\theta,\tau)u_{\omega}(\tau)d\tau, 0\le\theta\le\omega \qquad (3.6.22)$$

Преобразуем (3.6.21) с помощью (3.6.22) и учитывая, что $u_{\omega}(t)$ при $\theta\in[0,\omega]$ есть решение (3.6.12), имеем

$$V(t)=V(\theta+n\omega)=u_{\omega}(\theta)-\int\limits_{0}^{\theta} K(\theta,\tau)u_{\omega}(\tau)d\tau - F(\theta,u_{\omega}(\theta))\equiv 0, \qquad (3.6.23)$$

$0\le\theta\le\omega$

Из сравнения (3.6.20) и (3.6.23) следует, что $\widetilde{u}_{\omega}(t)$ есть решение интегрального уравнения (3.6.12). Теорема 3.6.2 полностью доказана.

3.6.3. Далее рассмотрим квазилинейную систему ИУВ

$$u(t)=\lambda\int\limits_{0}^{t} K(t,s)u(s)ds + f(t) + \varepsilon F(t,u(t),\varepsilon) \qquad (3.6.24)$$

где $K(t,s)\in C(-\infty<s\le t<\infty)\to R^{n\times n})$, $f(t)\in C\left(R\to R^{n}\right)$, $F(t,u,\varepsilon)\in C\left(R\times R^{n}\to R^{n}\right)$. Кроме того, вектор-функция $F(t,u,\varepsilon)$ аналитична по векторному u и скалярному ε аргументам при $\|u\|\le h$. Наряду со сказанным будем предполагать

$$\begin{aligned} &K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s), f(t+\omega)=f(t),\\ &F(t+\omega,u,\varepsilon)=F(t,u,\varepsilon). \end{aligned} \qquad (3.6.25)$$

В данном пункте исследуется проблема периодических решений для (3.6.24), (3.6.25).

Уравнение

$$u_0(t) = \lambda \int_0^t K(t,s) u_0(s) ds + f(t), \qquad (3.6.26)$$

получающееся из (3.6.24) при $\varepsilon = 0$, называется порождающим. Предположим, что для $\forall \lambda$ оно имеет ω-периодическое решение, т.е.

$$u(0) = u(\omega). \qquad (3.6.27)$$

Ставим задачу. Найти решения $u = u_\omega(t) \in C[0,\omega]$ периодической краевой задачи для (3.6.24), которые при $\varepsilon \to 0$ стремятся к решению $u_{0\omega}(t)$ периодической краевой задачи для порождающего уравнения (3.6.26), (3.6.27).

Для решения задачи предположим, что для системы (3.6.24), также выполнено условие (3.6.16).

Из аналитичности F по u следует, что она удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(t,u_1,\varepsilon) - F(t,u_2,\varepsilon)\| \le L(\varepsilon,\rho)\|u_1 - u_2\|, \|u_i\| \le \rho \le h, i = 1,2. \qquad (3.6.28)$$

Пусть $\Omega_\delta = \{u(t) \in C[0,\omega]; \|u(t)\| \le \delta\}$,

и для $u(t) \in \Omega_\delta$ определим оператор $A(u)$:

$$u = A(u), \qquad (3.6.29)$$

$$A(u) = \lambda \int_0^t K(t,s) u(s) ds + f(t) + \varepsilon F(t,u(t),\varepsilon);\ t \in [0,\omega]. \qquad (3.6.30)$$

К операторному уравнению (3.6.29) применим принцип сжимающих отображений. Очевидно, что $Au(t) \in C[0,\omega]$, т.е. оператор A отображает $C[0,\omega]$ в $C[0,\omega]$.

Далее покажем, что для достаточно малых q и ε_1 оператор Au отображает Ω_q в Ω_q для $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1]$ и является оператором сжатия.

Из тождества

$$f(t) + \varepsilon F(t,u,\varepsilon) = \varepsilon F(t,u,\varepsilon) - \varepsilon F(t,0,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon F(t,0,\varepsilon) \qquad (3.6.31)$$

и неравенства Липшица (3.6.28) имеем

$$\begin{aligned} &\|f(t)+\varepsilon F(t,u,\varepsilon)\| \le \varepsilon L(\varepsilon,\delta)\|u\| + L_0(\varepsilon), \\ &L_0(\varepsilon) \equiv \|f(t)+\varepsilon F(t,0,\varepsilon)\|, \|u\| \le \delta \le h. \end{aligned} \tag{3.6.32}$$

Из (3.6.30), (3.6.31) получим

$$\|Au\| \le \left[|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta) + L_0(\varepsilon).\right] \tag{3.6.33}$$

где $M = \max\limits_{0\le s\le t\le \omega} |K(t,s)|$.

Если теперь удастся выбрать δ и $\varepsilon \in [0,\varepsilon]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} &\left[|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta)\right]\delta + L_0(\varepsilon) < \delta, \\ &|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta) < 1, \end{aligned} \tag{3.6.34}$$

то будет $\|Au\| \le \delta$, т.е. $A\Omega_\delta \in \Omega_\delta$, для таких ε и δ, но, полагая в левой части $\varepsilon = 0$ и учитывая (3.6.34) будем иметь

$$|\lambda| M\omega\delta + \|f\| < \delta, \tag{3.6.35}$$

при этом должно быть $\delta \le h.$ Поэтому (3.6.35) в определенном смысле является ограничением на f и ядро $K(t,s)$.

Кроме того, оператор Au будет сжимающим в Ω_q. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} &\|A(u_1)-A(u_2)\| \le \left[|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta)\right]\|u_1-u_2\|, \\ &\|u_i\| \le q, i=1,2. \end{aligned} \tag{3.6.36}$$

В силу (3.6.36) можем сказать, что Au – действительно оператор сжатия на Ω_δ, так как условия (3.6.34) совместны.

Поэтому в Ω_δ существует единственная неподвижная точка $u^0(t,\varepsilon)$ оператора Au. Ясно, что аналитичность функции $u^0(t,\varepsilon)$ по ε следует из аналитичности F по ε и u.

Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 3.6.3. Пусть порождающая система (3.6.26) для $\forall\lambda$ имеет периодическое решение, тогда найдутся постоянные $\delta > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что в области $\|u\| < \delta, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$ существует и притом единственное решение $u^0(t,\varepsilon)$ периодической краевой задачи (3.6.24), (3.6.27), такое, что $u^0(t,0) = u_0^0(t)$ – решение периодической краевой задачи для порождающего уравнения (3.6.26), (3.6.27).

3.7. О влиянии полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

В данном разделе рассмотрен вопрос о влиянии полюса свободного члена и ядра на решение интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ). В работе [22] в предположении, что ядро есть частное двух целых функций, исследовано влияние особенностей ядра на решение.

Сначала рассмотрим линейное ИУВ первого рода

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in [0,T], \tag{3.7.1}$$

изучим влияние полюса свободного члена $f(t)$ на решение.

Предположим, что функции $K(t,s)$ и f достаточно гладкие. Общеизвестен следующий результат. Если для всех t функция $K(t,t) \ne 0, f(0) = 0,$ то уравнение (3.7.1) имеет непрерывное решение.

М.И. Иманалиевым найдена структура обобщенного решения уравнения (3.7.1) при выполнении условий $K(t,t) \ne 0, f(0) \ne 0.$ Также построено обобщенное решение уравнения (3.7.1) при выполнении условий $K(t,t) \equiv 0, K_s'(t,t) \ne 0.$

Сначала исследуем ИУВ первого рода (3.7.1) когда свободный член имеет особенность типа полюс q-кратности в начале координат. Ясно, что $f(0)=\infty$. При этом уравнение (3.7.1) перепишем в виде

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = \frac{f_1(t)}{t^q}, q \geq 1 - \text{целое число},$$

$f_1(0) \neq 0$. Умножая последнее уравнение на t и дифференцируя, полученное уравнение по t, имеем

$$t^q K(t,t)u(t) + \int_0^t \left[K(t,s) + t^q K_t'(t,s)\right] u(s)ds = f_1'. \tag{3.7.2}$$

Предположим, что

$$K(0,0) \equiv 0. \tag{3.7.3}$$

Тогда, ясно, что в силу гладкости функции $K(t,t)$ в малой окрестности нуля имеем $K(t,t) \neq 0$. Разделяя уравнение (3.7.2) на $K(t,t)$ и введя обозначения, имеем

$$t^q u(t) + \int_0^t N(t,s)u(s)ds = F(t), \tag{3.7.4}$$

где

$$t^q K(t,s) = \frac{1}{K(t,t)}\left[K(t,s) + K_t'(t,s)\right], \quad F(t) = \frac{f_1'}{K(t,t)}. \tag{3.7.5}$$

Ясно, что в силу (3.7.3)

$$N(0,0) \neq 0.$$

Уравнение (3.7.4) есть ИУВ с особой точкой. Такие уравнения привлекали внимание многих исследователей [2,7]. Также отметим, что при $q=1$ особая точка $t \leq 0$ называется регулярной особой точкой; при $q \geq 2$ особая точка $t \leq 0$ называется иррегулярной особой точкой. Главное их отличие, аналогично как в обыкновенном дифференциальном уравнении: формальное обобщенные ряды удовлетворяющее ИУВ (3.7.4) при регулярном случае сходится в окрестности особой точки, а при иррегулярном случае вообще говоря не сходятся.

Во втором случае исследуется их асимптотическая сходимость в окрестности особой точки. Асимптотические ряды может быть построены как в смысле А. Пуанкаре, так и в смысле А.Эрдейи.

В уравнении (3.7.4) теоретически возможны два случая:

$$I^0)\ F(0)=0; \qquad\qquad II^0)\ F(0)\neq 0,$$

Отметим, что случай I^0 достаточно полно исследовался в $[8]$, где был построен и дан главный член асимптотики исчезающего решения некоторых классов нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, в котором содержится и уравнения типа (3.7.4) ($q=1$). Случай II^0 было рассмотрено, при $q=1$, а при $q>1$ в $[4]$. Как и в $[3,4]$ используя методику предложенный в $[2]$ получена существование и структура обобщенных решений уравнения вида (3.7.4).

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 3.7.1. Пусть

1) в области $l=\{0\leq s\leq t\leq T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по *t*.

2) $K(0,0)\neq 0$, и функция $f(t)$ имеет в начале координат особенность типа полюс порядка q, т.е. $f(t)={f_1(t)}/{t^q}, f_1(t)\neq 0.$ Тогда интегральное уравнение (3.7.1) имеет обобщенное решение вида

$$u(t)=\alpha\delta(t)+x(t),$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, α - некоторая постоянная, а $x(t)$ определяется из уравнения

$$t^q x(t)+\int_0^t N(t,s)x(s)ds = F(t)-{N(t,0)F(0)}/{N(0,0)},$$

функции $N(t,s), F(t)$ определены по формуле (3.7.5).

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть требуется найти решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^t u(s)ds = \frac{e^t}{t}. \tag{3.7.6}$$

Формально умножая обе части уравнения (3.7.6) на t и дифференцируя полученное уравнение, имеем

$$tu(t) + \int_0^t u(s)ds = e^t. \tag{3.7.7}$$

В силу Теоремы 3.7.1 решения ищем в виде

$$u = \alpha\delta(t) + c(t), \tag{3.7.8}$$

Подставляя (3.7.8) в (3.7.7), получим $\alpha = 1$. Тогда

$$tx(t) + \int_0^t x(s)ds = e^t - 1. \tag{3.7.9}$$

Используя методику построения решения [8], имеем единственное решение (3.7.9) в виде

$$x(t) = \left[t^{-1}\int_0^t (e^\tau - 1)d\tau \right]' = -\frac{e^t - t - 1}{t^2} + \frac{e^t - 1}{t}$$

Произведем проверку. Подставляя в (3.7.6) полученное решение

$$u(t) = \delta(t) + \left[\int_0^t (e^\tau - 1)d\tau \right]'$$

имеем

$$\int_0^t \left[s^{-1}\int_0^t (e^\tau - 1)d\tau \right]' ds = \frac{e^t}{t} - 1.$$

или

$$\frac{e^t - t}{t} = \frac{e^t - t}{t}$$

Что и требовалось доказать. На первый взгляд кажется, что уравнение (3.7.6) можно решить непосредственным дифференцированием. Однако, при этом полученная функция $u(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\left(\dfrac{e^t}{t}\right)'$, не удовлетворяет исходному уравнению (3.7.6), т.е. не может быть решением, поскольку нижний предел интеграла $t=0$ является особой точкой функции ($\dfrac{e^t}{t}$).

Далее рассмотрим влияние особенностей ядра на решение. Предположим, что ядро имеет вид

$$K(t,s)=\frac{K_1(t,s)}{t^p s^q}, \tag{3.7.10}$$

причём рассматривается ИУВ второго рода

$$u(t)=\int_0^t \frac{K_1(t,s)}{t^{p_1} s^{p_2}} u(s)ds=f(t), \tag{3.7.11}$$

где $p_1+p_2\ge 1$. Если $p_1+p_2<1$, то мы имеем уравнение со слабой особенностью. Известно, что если $p_1=p_2=0$, то ИУВ (3.7.11) имеет единственное решение.

Умножая обе части (3.7.11) на t^{p_1} и обозначая $v(t)={u(t)}\big/{t^{p_2}}$ имеем

$$t^{p_1+p_2}v(t)=\int_0^t K_1(t,s)v(s)ds+t^{p_1}f(t).$$

Такое уравнение изучалось в работах $[6,8]$ и построены структуры решений в окрестности особой точки. Итак, и в этом случае уравнение (3.7.11) сводится к исследованию ИУВ с регулярной (иррегулярной) особой точкой. В качестве замечания следует отметить, что однородное уравнение (3.7.11) может иметь многопараметрическое семейство решений.

Пример 3.7.1. Рассмотрим ИУВ

$$u(t) = -\int_0^t \frac{\left(t^2 - 6s^2\right)}{s^3} u(s)ds$$

Обозначим $\left. u(t) \middle/ t^{p_2} \right. = v(t)$, имеем

$$t^3 v(t) = -\int_0^t \left(t^2 - 6s^2\right) v(s)ds \qquad (3.7.12)$$

Уравнение (3.7.12) имеет двухпараметрическое семейство решений $v(t) = c_1 t + c_2$, или

$$u(t) = 6c_1 t^3 + 2c_2 t^2,$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Аналогичные явления могут быть в интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра (ИДУВ) с особенностью в ядре. Например, рассмотрим

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t) + \int_0^t \frac{K_1(t,s)}{t^{p_1} s^{p_2}} u(s)ds + f(t). \qquad (3.7.13)$$

Точно также умножая обе части уравнения (3.7.13) на t^{p_1} и обозначая $v(t) = \left. u(t) \middle/ t^{p_2} \right.$, имеем

$$t^{p_1+p_2} \frac{dv}{dt} = \left[A(t)t^{p_1+p_2} - p_2 t^{p_2-1}\right] v(t) + \int_0^t K_1(t,s)v(s)ds + t^{p_1} f(t) \qquad (3.7.14)$$

При $p_1 + p_2 = 1$ это уравнение было рассмотрено в работе [22] и выявлены структура решений уравнения (3.7.14) в окрестности начала координат.

В [22] проведён асимптотический анализ локальной структуры решений ИДУВ в окрестности особой точки.

3.8. Об асимптотической структуре решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью

Рассмотрим линейную систему вида

$$t^q u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds, \qquad (3.8.1)$$

$q > 1 -$ целое число,

где $K(t,s) - n \times n -$матричная функция, голоморфная в окрестности точки $t = s = 0$. Пусть $\lambda_j -$ собственные значения $K(0,0)$, $j = 1..n$. Случай, когда $\lambda_j -$ различные и $Re\,\lambda_j > 0$ рассмотрен в [4, 83]. Рассмотрим случай, когда $\lambda_j, j = 1..n$ принимают кратные значения и $Re\,\lambda_j > 0$.

Под областью S понимаем открытый сектор в комплексной плоскости t с вершиной в начале координат.

Под решением данной системы понимается голоморфная в области S и удовлетворяющая (3.8.1) в S $n \times 1 -$матричная функция $u(t)$.

Будем использовать обозначения, введенные в [16].

Продифференцировав по t (3.8.1), получим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$t^q \acute{u}_t(t) = A(t)u(t) + \int_0^t \acute{K}_t(t,s)u(s)ds, \qquad (3.8.2)$$

где $A(t) = K(t,t) - qt^{q-1}I, I -$ единичная матрица,

$$A(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j\,, t \to 0, t \in S. \qquad (3.8.3)$$

В дальнейшем систему (3.8.2) будем рассматривать как исходную. При исследовании аналитической структуры решения (3.8.2) будем следовать методике [16]. Предположим, что собственные значения главной матрицы A_0 распадаются на две группы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ так, что $\lambda_j \neq \lambda_k, j \leq p, k > p$.

Из линейной алгебры известно, что если собственные значения главной матрицы $A(t)$ подразделяется на две группы $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ так, что $\lambda_j \neq \lambda_k, j \leq p, k > p$, то матрица $A(t)$ подобна блочно-диагональной матрице $diag\big(A^{11}(t), A^{22}(t)\big)$, где $A^{jj}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{jj} t^i, t \to 0$, причем главная матрица

A_0^{11} имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{p,}$ а A_0^{22} $-$собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. На основании этого факта следует, что нахождение асимптотического решения (3.8.2) при $t \to 0$ сводится к решению уравнений такого же типа для двух блоков $A^{11}(t)$ и $A^{22}(t)$ более низкого порядка. Повторяя эту редукцию, можно в конце концов получить некоторое число уравнений типа (3.8.2), в которых все собственные значения A_0^{jj} одинаковы, т.е. получим конечную последовательность уравнений типа (3.8.2), в каждом из которых главная матрица A_0^{jj} имеет только одно собственные значение соответствующей кратности.

Предположим, что (3.8.2) является результатом такой редукции, и можно считать, что имеет место (3.8.3), и главная матрица A_0^{jj} имеет только одинаковые собственные значения.

Тогда, не теряя общности, можно считать главную матрицу нильпотентной, т.е. ее единственное собственное значение соответствующей краткости считать нулевым. Действительно, если λ_{rj} является единственным собственным значением A_0^{jj}, тогда преобразование типа:

$$u(t) = zexp \frac{t^{-q+1}}{-q+1} \lambda_{rj}, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$$

переводит (3.8.2) в уравнение вида

$$t^q \acute{z}_t e^{\lambda r_j \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = \left(A^{jj}(t) - \lambda_{rj} I_{rj}\right) z e^{\lambda_{rj} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} + \int_0^t \frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t} z(s) e^{\lambda_{rj} \frac{s^{-q+1}}{-q+1}} ds,$$

где главный член матрицы $A(t) - \lambda_{rj} I_{rj}$, есть $A_0^{jj} - \lambda_{rj} I_{rj}$, т.е. нильпотентная матрица.

Также, не ограничивая общности, предположим, что нильпотентная матрица A_0^{jj} имеет жорданову форму, которую всегда можно достичь линейным преобразованием с постоянными коэффициентами, т.е. существует постоянная матрица T, такая, что

$$T^{-1}A_0^{jj}T = J\left(A_0^{jj}\right) = J_{r_1} \oplus \ldots \oplus J_{r_r}$$

где $J_{r_j} = \lambda_{rj}I_{rj} + H_{rj}, H_{rj}$ −матрица сдвига, I_{r_j} −единичная матрица, λ_{r_j} −собственные значения $A_0^{jj}, j = 1, \bar{r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n$.

Таким образом, считаем A_0^{jj} нильпотентной матрицей, имеющий жорданову форму в виде прямой суммы матриц сдвига H_{rj}, причем хотя бы одна из матриц сдвига H_{r_j} имеет размерность, большую единицы и не нулевые элементы $A_i^{jj}, i > 0$ имеются только в последних строках блоков H_{r_j}.

Следуя методу, предложенному в [16], посредством подстановки $u(t) = S(t)Z, S(t)$ −диагональная матрица вида $diag(1, t^g, t^{2g}, \ldots, t^{(n-1)g}$, зависимая от постоянной g, которая выбирается таким образом, что в преобразованном уравнении после умножения на соответствующую степень t главная матрица была отличной от A_0^{jj}, уравнение (3.8.2) преобразуется к виду

$$t^q Z_t = B(t)Z + \int_0^t b^*(t,s)Z(s)e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1}-t^{-q+1}}{-q+1}}ds, \tag{3.8.4}$$

где

$$B(t) = B_1(t) \oplus \ldots \oplus B_2(t),\ b^*(t,s) = b_1^*(t,s) \oplus \ldots \oplus b_2^*(t,s),$$

$$B_j(t) = S_j^{-1}(t)K^{jj}(t,t)S_j(t) - [t^q S_j(t)]'_t, b_j^*(t,s) = S_j^{-1}(t)\frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t}S_j(s).$$

$$S_j(t) = diag(1, t^{g_j}, t^{2g_j}, \ldots, t^{(n-1)g_j}, j = \overline{1, r}.$$

Положим в срезающем преобразовании $g_j = g_{j0}$, причем может g_{j0} быть рациональным, не обязательно целым. Тогда, благодаря выбору g_{j0}, матрица $\lim_{t\to 0} t^{-g_{j0}}. B_j(t) = B_j^* 0$ имеет ненулевой элемент на главной диагонали или ниже ее. Выше этой диагонали эта матрица совпадает с A_0^{jj}.

Тогда уравнение (3.8.4) примет вид:

$$t^{q-g_{j0}} \acute{Z}_t = t^{-g_{j0}} B(t) Z + t^{-g_{j0}} \int_0^{t} \acute{} \, b^*(t,s)\, Z(s) e^{\lambda_{rj} \frac{s^{-q+1} - t^{-q+1}}{-q+1}} ds.$$

Обозначим $h_j = q - g_{j0}$, тогда h_j может принимать как целые, так и рациональные значения.

Если $g_{j0} -$ целое число, то $h_j = q - q_{j0}$, т.е. за исключением случая, когда в результате неоднократного повторения метод срезания понижает либо порядок, либо ранг системы, описанной процедуры приходим к уравнению типа (3.8.5), где B_{j0} нильпотентна (имеет одно собственное значение нуль) и все диагональные элементы B_{j0} являются матрицами сдвига. И в этом случае доказывается, что в результате конечного числа повторения срезающего преобразования получим уравнение типа (3.8.5), в котором B_0 имеет только один жорданов блок, т.е $j = 1$. Допустим, что мы имеем такую задачу ($j = 1$). Произведем еще одно срезающее преобразование. Если g_{10} –целое, то ранг понижается и редукцию можно продолжить. Если g_{10} –дробь и новая матрица имеет собственные значения, не все равные друг другу, то имеем задачу, которая расщепляется на задачи более низкого порядка. Случай, когда g_{10} – дробь, а главная матрица имеет только одно собственное значение, исключается в силу срезающего преобразования, которое благодаря выбору g_{10} преобразует ее в матрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали или ниже.

Пусть $t^{-g_{j0}}\ B_j(t)$ имеет различные собственные значения, в результате конечного срезания и подобного преобразования главной матрицы B_0 к каноническому виду и g_{j0} принимает дробные значения вида $g_{j0} = \frac{c_j^*}{P_j}$. Тогда матричное решение для каждого блока порядка $r_j, j = 1..r$, будем искать в виде ряда

$$Z_j(t) = \widehat{Z_J}(t) e^{\lambda_{r_{j-1}+e(t)}} c, \tag{3.8.6}$$

где $\widehat{Z_J}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \widehat{Z_{Jl}} t^{\frac{i}{P_j}}$

$$A_{r_{j-1}+e}(t) = \sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1} B_{r_{j-1}+ei} \frac{t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q+1}}{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q+1} + B_{r_{j-1}+e} P_j(q-1) - C_j^* lnt,$$

$r = 0, r_j = r_{j-1} + n_j, r_{r-1} + n_r = n, e = \overline{1, n_J}, j = \overline{1, r}.$

$r_j, j = \overline{1, r},$

Подставляя (3.8.6) в (3.8.5), для каждого блока порядка $r_j, j = \overline{1, r}.$ имеем

$$t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}} \left(\hat{Z}_j(t) \acute{A}_{tr_{j-1}} + e(t) \right) e^{A_{r_{j-1}+e(t)} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = t^{q-\frac{b^*}{P_j}} B(t) \hat{Z}_j(t) e^{A_{r_{j-1}+e} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} +$$

$$\int_0^t t^{-\frac{C_j^*}{P_j}} b(t,s) \hat{Z}_j(s) e^{A_{r_{j-1}+e(S)} + \lambda_{r_j} \frac{s^{-q+1}}{-q+1}} ds. \tag{3.8.7}$$

Заметим, что если $f(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} f_{it}^{ijP_j}, t \to 0, t \in s,$ то справедливо

$$\int_0^t f(s) Z(s) e^{A_{r_{j-1}+e(S)} + \lambda_{r_j} \frac{s^{-q+1}}{-q+1}} ds = \widetilde{P_j}(t) e^{A_{r_{j-1}+e(t)} + \lambda_{r_j} \frac{s^{-q+1}}{-q+1}}, \tag{3.8.8}$$

$$\widetilde{P_j}(t) \sim \sum_{i=P_j q+1}^{\infty} \tilde{P}_{ji} t^{iIP_j}, t \to 0, t \in S. \tag{3.8.9}$$

Действительно, продифференцировав (3.8.8), имеем

$$f(t) Z(t) e^{A_{r_{j-1}+e(t)} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = \left\{ \bar{\tilde{P}}_{tj(t)} + \tilde{P}_{j(t)} (A_{r_{j-1}+e(t)} + \lambda_{r_j} \frac{s^{-q+1}}{-q+1})_t \right\} e^{A_{r_{j-1}+e(t)} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}}.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение относительно $\tilde{P}_j(t)$ в виде

$$t^a f(t) Z(t) = t^a \widehat{P'_{Jt}}(t) + a(t) \widetilde{P_j}(t),$$

где

$$a(t)=\sum_{i=0}^{d-1}B_{r_{j-1}+ei}t^{\frac{i+c_j^*}{P_j}}+Bdt^{q-1}+\lambda_{r_j,}a(0)=\lambda_{r_j,}d=p_j(q-1)-C_j^*.$$

Формально приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях последнего уравнения приводит к последовательному определению коэффициентов $\tilde{P}_j nk, k=1,2,3$

$$\tilde{P}_{jn_1}=\frac{C_{n_1-p_jq}}{\lambda_{r_j}}, C_{n_1-p_jq}=\sum_{i=0}^{n_1-p_1q}f_iZ_{n_1-p_iq-i}\, , p_jq+1\le n_1\le p_jq+C_j^*,$$

$$\tilde{P}_{jn_2}=\frac{(C_{n_2-p_jq}-T_{n_2-C_j^*})}{\lambda_{r_j}}, T_{n_2-C_j^*}=\sum_{i=p_jq+1}^{n_2-C_j^*}\hat{P}_{r_{j-1}+cn_2-C_j^*-i}\, , p_jq+C_j^*+1\le n_2\le p_j(2q-1), \tilde{P}_{jn_3}=, n_3\ge p_j(2q-1)+1. \quad (3.8.10)$$

Таким образом, (3.8.8) формально удовлетворяется рядом

$$\sum_{i=p_jq+1}^{\infty}\tilde{P}_{ji}t^{iIP_j}\, , P_{jP_jq+1}=f_0Z_0/\lambda_{rj},$$

который голоморфен в S при $|t|<t_0$ и обладает свойством (3.8.9).

Тогда на основании (3.8.8) уравнение (3.8.7) можно записать в виде

$$t^{q-\frac{C_j^2}{P_j}}(\hat{Z}_{tj}+\hat{Z}_j\acute{A}_{r_{j-1}+e(t))}e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+A_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}$$
$$=t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}}B(t)\hat{Z}_je^{A_{r_{j-1}+e(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}+\tilde{P}_j(t)e^{A_{r_{j-1}+e(t)}+A_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}$$

С учетом того, что $\hat{Z}_j(t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\hat{Z}_{ji}t^{iIP_j}, \tilde{P}_j(t)\sim\sum_{i=P_jq+1}^{\infty}\tilde{P}_{ji}t^{iIP_j}$,

и $\acute{A}_{r_{j-1}+e(t)}=\sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1}B_{r_{j+1}+ei}t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q}+B_{r_{j-1}+e}dt^{-1}, d=p_j(q-1)-C_j^*,$

получим уравнение вида

$$t^{q-\frac{c_j^*}{P_j}-1}\left(\frac{i}{P_j}\sum_{i=1}^{\infty}\widehat{Z_{j\iota}}t^{i/P_j}\right)=t^{q-\frac{c_j^*}{P_j}-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}B_{r_{j-1}+ed+1+i}t^{\frac{i+j}{P_j}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\widehat{Z_{j\iota}}t^{i/P_j}\right)+$$

$$\sum_{i=p,q+1}^{\infty}P_{ji}t^{i/P_j} \qquad (3.8.11)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях в (3.8.11), определим все коэффициенты $\hat{Z}_{jm_k}, k = 1,2,3,4,$

$$\hat{Z}_{jm_1}=\frac{P_j}{m_1}\left\{\sum_{i=1}^{m_1}Bd+i\cdot\hat{Z}_{m_1-i}\right\}, d=p_j(q-1)-C_j^*,$$

$$1\le m_1\le P_j,$$

$$\hat{Z}_{jm_2}=\frac{P_j}{m_2}\left\{\sum_{i=1}^{m_2}Bd+i\cdot\hat{Z}_{m_2-i}+\frac{1}{\lambda_{r_j}}\left(\sum_{j=1}^{C_j^*}b_j^*\hat{Z}\,c_j^*-j\right)\right\},$$

$$p_j+1\le m_2\le P_j+C_j^*,$$

$$\hat{Z}_{jm_3}=\frac{P_j}{m_3}\left\{\sum_{i=1}^{m_3}Bd+i\cdot\hat{Z}_{m_3-i}+\frac{1}{\lambda_{r_j}}\left(\sum_{j=1}^{P_j(2q-1)}b_j^*\hat{Z}\,p_j(q-1)j\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\lambda_{r_j}}\sum_{i=1}^{P_j(q-1)-C_j^*}P_{p_jq+i}\,B_{d-i}\right)\right\}, P_j+e_j^*+1\le m_3\le P_jq, Z_{jm_4}$$

$$=\frac{P_j}{m_4}\left\{\sum_{i=1}^{m_4}B_{d+i}\hat{Z}_{m_4-i}+\frac{1}{\lambda_{r_j}}\sum_{j=1}^{m_4-P_j}b_j^*\hat{Z}_{m_4-P_j-j}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\lambda_{r_j}}\sum_{j=1}^{m_4-P_{j-C_j^*}}P_{p_jq+j}B_{m_4-P_j-c_j^*-j}-\frac{m_4}{P_j}P_{m_4}\right)\right\}, \hat{Z}_{j0}=I_{rj}, j=\overline{1,r}.$$

Тогда решение уравнения (3.8.5) представляет собой прямую сумму решений систем более низкого порядка $r_j, j=\overline{1,r}$, из которых это уравнение состоит. Такое матричное решение можно записать в таком виде:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1(t)e^{A_{r_1}(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2(t)e^{A_{r_2}(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_r(t)e^{A_{r_r}(t)} \end{pmatrix} = \hat{Z}(t)e^{A(t)}c, \qquad (3.8.12)$$

Где $A(t) = diag(A_{r_{j-1}+1}(t), \dots, A_{r_{j-1}+n_j}(t))$,

$$A_{r_{j-1}+e(t)} = \sum_{i=0}^{d-1} B_{r_{j-1}+ei} \frac{t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}} - q + 1}{\frac{i + C_j^*}{P_j} - q + 1} + B_{r_{j-1}+e} dent,$$

$$d = P_j(q-1) - C_j^*,$$

$$\hat{Z}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \hat{Z}_i t^{i/P_j}, det\hat{Z}_0 \neq 0,$$

$$r_0 = 0, r_j = r_{j-1} + n_j, r_{r-1} + n_r = n, e = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, r}.$$

Причем $B_{r_{j-1}+e}$ имеет различные собственные значения $\lambda^*_{r_{j-1}+e}$ в результате конечного срезания и подобного преобразования главной матрицы к каноническому виду и $A(t)$ является диагональной матрицей, где ее элементы являются более низкого порядка $r_j, j = \overline{1, r}$.

Сформулируем полученные для системы (3.8.1) в случае кратных собственных значений главной матрицы $K(0,0)$. Все преобразования, которые должны, в конечном счете привести к асимптотическому решению (3.8.1) и применяются к системам более низкого порядка, можно представить как одну замену переменных в виде

$$u(t) = S(t)Zexp \frac{t^{-q+1}}{-q+1} \lambda_{rj},$$

Подставляя вместо Z в (3.8.13) матричное решение в виде (3.8.12) и комбинируя $exp \frac{t^{-q+1}}{-q+1} \lambda_{rj} \cdot c\; expA(t)$, получим фундаментальное матричное решение уравнения (3.8.1) на случай кратных собственных значений в виде

$$u(t) = \hat{u}(t)e^{\tilde{A}(t)} \cdot C,$$

где $\hat{u}(t) -$ обладает асимптотическим разложением по степеням $\tilde{A}(t) -$ диагональная матрица, где диагональные элементы имеют разложение по степеням $t^{-1/P}, c -$ произвольный вектор столбец.

ТЕОРЕМА 3.8.1**.** Пусть $K(t,s) = n \times n$-матричная функция, голоморфная в окрестности точки $t = s = 0, t \in S$, где $S -$ сектор с вершиной в начале координат, содержащий вещественную полуось, и $K(0,0)$ имеет кратные собственные значения λ_{rj} и выполняется условие $Re\lambda_{rj} > 0, j = \overline{1,r}$. Тогда уравнение (3.8.1) в каждом достаточно узком подсекторе $S^* \in S$ имеет матричное решение вида $u(t) = \hat{u}(t)e^{\hat{A}(t)}$, где $\tilde{A}(t)$ –диагональная матрица, диагональные элементы которой являются диагоналными матрицами порядка $r_j, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n$, с диагональными элементами, имеющими разложение относительно p –положительное целое, $\hat{u}(t)$ обладает асимптотическим свойством разложения по степеням $t^{1/P}$.

3.9. Заключение по Главе 3

В этой главе найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП. Найдены достаточные условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра. Определены асимптотические и аналитические свойства решений в окрестности особой точки интегральных уравнений Вольтерра.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе рассматриваются асимптотические и аналитические свойства решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

- Найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Найдены условия существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
- Найдены достаточные условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.
- Определены существенные влияния полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Найдена асимптотическая структура решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Айтбаев, К.А.** О задаче Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / К.А.Айтбаев // Материалы Междунар. научно-практической конф. «Информационные технологии: Инновации в науке и образовании». –Актобе, 2015. – С. 116-120.
2. **Алымкулов, К.** Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст] / К.А. Алымкулов. – Бишкек: Илим, 1992. – 140 с.
3. **Алымкулов, К.** Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач/ К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. – 2016. № 12. –С.3-11.
4. **Асанов, А.** О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.Иманалиев, А.Асанов // Доклады АН СССР. –1989. – Т.309, № 5. –С.1052-1055.
5. **Байзаков, А.Б.** Методы преобразования решений в аналитической и асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений Вольтерра [Текст]: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.Б. Байзаков. – Бишкек, 2011. – 29 с.
6. **Байзаков, А.Б.** О структуре решений интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Труды ин-та вычислительной математики и мат. геофизики Сиб. отделения РАН. Сер. Информатика. – Новосибирск, 2007. – Вып. 7. – С. 174-180.
7. **Байзаков, А.Б.** Особые точки интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б. Байзаков. – Бишкек: Илим, 2007. –134 С.

8. **Байзаков, А.Б.** О решениях линейных уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью [Текст] / А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Наука, новые технологии и инновации. – Бишкек, 2015. – № 6. – С. 12-14.

9. **Байзаков, А.Б.** О разрешимости задачи Коши интегро-дифференци-альных уравнений в частных производных [Текст] / А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Международный науч. ин-т "Educatio". – 2015. – Т. 11, № 18. – С. 107-110.

10. **Байзаков, А.Б.** Об одном методе решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого поряд-ка [Текст] / А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016. – № 1 (53). – С. 5-9.

11. **Бараталиев, К.Б.** Методы решения некорректных задач математической физики [Текст]: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.Б. Бараталиев. – Бишкек, 2015. – 25 с.

12. **Беляева, Е.В.** О некоторых решениях уравнения Вольтерра с особенно-стью [Текст] / Е.В. Беляева // Краевые задачи: Межвузов. сборник научных трудов. – Пермь, 1989. – С. 184-190.

13. **Бильман, Б.М.** Интегральные уравнения типа Вольтерра с произвольной неподвижной особенностью [Текст] / Б.М. Бильман, Л.И. Панов // Доклады АН ТаджССР. – 1970. – Т. 13, № 8. – С.13-16.

14. **Бухгейм, А.** Уравнения Вольтерра и обратные задачи [Текст] / А. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.

15. **Быков, Я.В.** О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Я.В. Быков. – Фрунзе: Главное изд. мин-ва культуры КиргССР, 1957. – 328 с.

16. **Вазов, В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.Вазов. – Москва: Мир, 1968. – 224 с.

17. **Вольтерра, В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вольтерра; пер. с англ. и доп. М. Керимова. – Москва: Наука, 1982. – 304 с.
18. **Горошко, О.А.** Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины [Текст] / О.А. Горошко, С.Н. Савин. –Киев: Наукова думка, 1971. - 224 с.
19. **Грудо, Э.И.** О решениях многомерного интегрального уравнения Вольтерра в окрестности особых точек [Текст] / Э.И. Грудо // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 7. – С. 1119-1126.
20. **Грудо, Э.И.** О разложении решений многомерных интегральных уравнений Вольтерра в окрестности особых точек [Текст] / Э.И. Грудо // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т.4, № 6. – С. 1071-1080.
21. **Гурьянов, Н.Н.** К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Н.Н. Гурьянов // Исследования по интегро- дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе, 1961. – Вып.1. – С. 251-263.
22. **Джээнбаева, Г.А.** О влиянии полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева, С.А. Керимбаева // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2006. −Вып. № 1. −Сер. № 5. −С. 28-31.
23. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости начальной задачи сингулярно-возмущенной интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: инновации в науке и образовании». – Актюбинск, 2015. – С.131-138.
24. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. – Вып. № 6. –С. 8-11.

25. **Джээнбаева, Г.А.** Разрешимость и структура решений начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. –Бишкек, 2017. – Вып. № 5, – С.100-104.

26. **Джээнбаева**, **Г.А.** О периодических решениях краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Международный научно-исследовательский журнал – Екатеринбург, 2018. – Вып.№08(74), –С.15-21. DOI: https//doi.org/10.23670/IRJ.2018.74.8.002. Импакт-фактор РИНЦ - 0,146.

27. **Джээнбаева, Г.А**. О разрешимости задачи Коши для систем нелинейных инетегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром. [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург, 2018. – Вып. № 9 (75) сентябрь. часть.I. –С.17-24. (РИНЦ РФ). DOI:https//doi.org/10.23670/IRJ.2018.75.9.003

28. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Вестник ИМ НАН КР. – Бишкек, 2019. – С.123-128.

29. **Джээнбаева, Г.А.** О асимптотической структуре решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Известия вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – Вып. № 9. – С.46-52.

30. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: НАН КР. – Бишкек, 2016.

31. **Джээнбаева, Г.А.** Разрешимость задачи Коши систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева, М.М.Шаршенбеков // Междун. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и информатики». – Алматы, 2015.
32. **Джээнбаева, Г.А.** Условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Международная научная конференция «II Борубаевские чтения». –Бишкек НАН КР, 2018.
33. **Донская, Н.В.** О достаточном условии существования решения систем интегро-дифференциальных уравнений в окрестности особой точки [Текст] / Н.В. Донская, П.С. Панков, А. Бектеналиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе, 1973. – Вып. 9. – С. 220-226.
34. **Еругин**, **Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений [Текст] / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1979. – 743 с.
35. **Иванова, М.А.** Существование решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки [Текст] / М.А. Иванова // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск, 1976. – С. 230-237.
36. **Иманалиев**, М. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода [Текст] / М. Иманалиев. – Фрунзе: Илим, 1981. – 144 с.
37. **Иманалиев, М.** Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
38. **Иманалиев, М.** Сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение второго порядка с точкой поворота [Текст] / М. Иманалиев, К. Какишов, Ж.К. Какишов // Тезисы докл. Междунар. науч. конф. «Актуальные

проблемы дифференциальных уравнений и мат. физики». – Алматы, 2005. – С. 94.

39. **Иманалиев, М.** О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка [Текст] / М. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2007. – Вып. 36. – С. 19-28.

40. **Иманалиев, М.** О структуре решений сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2008. – Вып. 38. – С. 181-187.

41. **Иманалиев, М.** О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Поиск. Сер. естеств.-техн. наук. – Алматы, 2009. – № 1. – С. 209-213. (Науч. прил. Междунар. журнал «Высшая школа Казахстана»).

42. **Иманалиев, М.** Об одном методе решения задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2009. – Вып. 40. – С. 3-9.

43. **Иманалиев, М.** Об одном методе решения задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Информационные технологии и мат. моделирование в науке, технике и образовании: Материалы Междунар. конф., посвящ. 70-летию акад. А. Жайнакова. Изв. Кырг. гос. техн. ун-та им. И.Раззакова. – 2011. – № 24. – С. 57-61.

44. **Иманалиев, М.** Разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Тезисы докл. Междунар. науч.

конференции «Функциональный анализ и его приложения». – Астана, 2012. –С.135.

45. **Иманалиев, М.** Разрешимость задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с точкой поворота [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2012. – Вып. 45. – С. 5-10.
46. **Иманалиев, М.** О разрешимости задачи Коши одного класса дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Республиканская конференция с участием ученых стран СНГ “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения”. – Ташкент, 2013. – С. 269.
47. **Иманалиев, М.** Разрешимость и структура решений задачи коши одного класса интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка [Текст] /М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Тезисы докл. II Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвящ. 20-летию образования Кыргызско-Российского (Славянского) ун-та и 100-летию основателя матем. школы в Кыргызстане проф. Я.В. Быкова. – Бишкек, 2013. – С. 91.
48. **Иманалиев, Т.М.** Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст]: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.М. Иманалиев. – Бишкек, 2000. – 128 с.
49. **Коддингтон, Э.А.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон . –Москва: ИЛ, 1958.
50. **Колмогоров, А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.
51. **Краснов, М.Л.** Интегральные уравнения [Текст] / М.Л. Краснов. – Москва: Наука, 1975. – 304 с.

52. **Курманбаева, А.К.** Смешанная задача для псевдогиперболического уравнения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2000. – Вып. 29. – С. 310-315.
53. **Курманбаева, А.К.** Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.К. Курманбаева. – Бишкек, 2002. – 15 с.
54. **Локшин, А.А.** Математическая теория распространения волн в средах с памятью [Текст] / А.А. Локшин, Ю.В. Суворова. – Москва: Изд-во МГУ, 1982. – 152 с.
55. **Магницкий, Н.А.** Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерра I рода [Текст] / Н.А. Магницкий // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 1. – С. 29-32.
56. **Магницкий, Н.А.** Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем [Текст] / Н.А. Магницкий. – Москва: Наука, 1992. – 160 с.

    Математическая энциклопедия [Текст]: в 5 т. / гл. ред. И.М. Виноградов. – Москва: Сов. энциклопедия, 1977. – Т. 1. – 576 с.
57. **Михлин, С.Г.** Лекции по линейным интегральным уравнениям [Текст] / С.Г. Михлин. – Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.
58. **Мюнтц, Г.М.** Интегральные уравнения [Текст] / Г.М. Мюнтц – Москва: ОНТИ, 1934. – Ч. 1: Линейные уравнения Вольтерра. – 330 с.
59. **Панов, Л.И.** Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка [Текст] / Л.И. Панов // Докл. АН ТаджССР. – 1967. – Т. 10, № 6. – С. 3-7.
60. **Рафатов, Р.Р.** К аналитической теории нелинейных операторных интегральных уравнений типа Вольтерра [Текст] / Р.Р. Рафатов // Вестник Кырг. гос. нац. ун-та. Сер. 3. – 2001. – Вып. 5. – С. 122- 125.
61. **Сретенский, Л.Н.** Memoire sur les equations de M. V. Volterra [Текст] / Л.Н. Сретенский // Математический сб. – 1931. – Т. 38. – Вып. 1/2. – С. 1-44.

62. **Тагаева, С.Б.** Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра 3-го рода в неограниченных областях [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / С.Б. Тагаева. – Бишкек, 2015. – 18 с.

63. **Территин, Х.** Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary differential equations [Текст] / Х. Территин // Contributions of Theory of Nonlinear oscillations, II. Ann. of Math. Studies, Princeton. – 1952. – Vol. 29. – P. 81-116. (Рус. пер.: Математика: сборник. – 1957. – № 1/2. – С. 29-59).

Трикоми, Д. Интегральные уравнения [Текст] / Д. Трикоми; пер. с англ. Боярского, И.И. Данилюка. – Москва: ИЛ, 1960. – 300 с.

64. **Фалалеев, М.В.** Асимптотические представления непрерывных и обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра I-рода [Текст] / М.В. Фалалеев. – Иркутск, 1987. – 43 с. – Деп. в ВИНИТИ.

65. **Халилова, Т.Т.** Единственность и ветвление в решении задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.Т. Халилова. – Бишкек, 2013. – 24 с.

66. **Цалюк, З.Б.** Интегральные уравнения Вольтерра [Текст] / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – Москва, 1977. – Т.15. – С. 131-198.

67. **Чистяков, В.Ф.** О разрешимости интегральных уравнений типа Вольтерра IV рода [Текст] / В.Ф. Чистяков // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 698-707.

68. **Шмарда, З.О.** поведении решений одного интегро-дифференциального уравнения вблизи особой точки [Текст] / З. Шмарда // Современный анализ и его прил.: сб. науч. тр. – Киев, 1989. – С. 213-218.

69. **Щерба, А.З.** Асимптотическое разложение решения интегрального уравнения Вольтерра [Текст] / А.З. Щерба // Математический анализ. – Краснодар, 1971. – С. 85-97.

70. **Щерба, А.З.** Голоморфные решения одного класса интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / А.З. Щерба // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10, № 11. – С. 2079-2080.
71. **Aitbaev, K.A.** On the existence of the solutions of Cauchy problem for nonlinear partial differential equations [Text] / K.A. Aitbaev // Proceedings of the V Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Bishkek, 2014. – P. 150-154.
72. **Alymkulov, K.** Method of boundary layer function for constructing of the asymptotic expansion of the solution of the singularly perturbed equation of the second order, Lighthill's type [Text] / K. Alymkulov, B. Azimov //Proceedings of the V Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Bishkek, 2014. – P. 78-83.
73. **Alymkulov, K.** New statement of the initial Cauchy's problem for perturbed differential equations of Lighthill types [Text] / K. Alymkulov, A. Khalmatov, N. Sultanova // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum. – Bishkek, 2015. – P. 29.
74. **Angell, J.S.** Singularity perturbed Volterra integral equations [Text] / J.S. Angell, W.E. Olmstead // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1987. – Vol. 48, No.1. – P. 1-15.
75. **Asanov, A.** Regularisation, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the first kind [Text] / A. Asanov. – Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, 1998. – 272 p.
76. **Baizakov, A.B.** On a solution of Volterra equations with irregular Singularities [Text] / A.B. Baizakov, K.A. Aitbaev // Abstracts of the IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, Baku, 1-3 July, 2011. – Baku, 2011. – P. 145.
77. **Bart, G.R.** Three Theorems of Third-kind linear integral equations [Text] / G.R. Bart // Journal Math. Anal. Appl. – 1981. – Vol. 79. – P. 48-57.

78. **Boundi, M.S.** Singular nonlinear Cauchy problems [Text] / M.S. Boundi, C. Cauloouic // Journal of differential equations. – 1970. – Vol. 22, No2. – P. 261-291.
79. **Burton, T.A.** Volterra Integral and Differential Equations [Text] / T.A. Burton. – New York, London: Academic press, 1983. – 314 p.
80. **Chambers, L.G.** The problem of eigenvalues in some singular homegeneous Volterra integral equations [Text] / L.G. Chambers // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 42, No.1. – P. 140-142.
81. **Dzheenbaeva, G.A.** On the solvability of the Cauchy problem for integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order. [Text] / A.B.Baizakov, G.A.Dzheenbaeva, K.A. Aitbaev // Тезисы докладов Международной научной конференции “III Борубаевские чтения”. – Бишкек, 2019. – С.40.
82. **Evans, G.C.** The integral equation of the second kind of Volterra with singular kernel [Text] / G.C. Evans // Bull. Amer. Math. Soc. – 1909. – Vol. 16. – P. 130-136.
83. **Evans, G.C.** Volterra’s integral equation of the second kind with discontinuos kernel [Text] / G.C. Evans // Trans. Amer. Math. Soc. – 1910. – Vol. 11. – P. 393-413; 1911. – Vol. 12. – P. 429-472.
84. **Fenyes, T.** On the operational solution of the convolution type integral equation of the third kind [Text] / T.Fenyes // Stud. Sci. Math. Hung. – 1977, Vol. 12. – No 1/2. – P. 65-75.
85. **Guderley, K.G.** Asymptotic representatives for differential equations with a regular singular point [Text] / K.G. Guderley // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1959. –Vol .3. – P. 206-218.
86. **Horn, J.** Uber eine nicht lineare Volterrashe Integralgleichung [Text] / J. Horn //Jahresbericht d.D. Math. – Ver. – 1914. – Vol. 23. – S. 85-90.
87. **Horn, J.** Singulare Systeme linerer Volterrasher Integralgleichungen [Text] / J. Horn // Math. Zeitschr. – 1919. – Vol. 3. – S. 265-313.

88. **Imanaliev, M.** Problem of Cauchy for the singularly-perturbed systems of the integro-differential equations with the turn point [Text] / M. Imanaliev, A.B. Baizakov, T.M. Imanaliev // Repots of the third Congress of the World mathematical Society of Turkic countries. – Almaty, 2009. – Vol. 1. – P. 296-301.

89. **Lalesco, T.** Introduction a la theorie des equations integrales [Text] / T. Lalesco. – Paris, 1912. – 152 p.

90. **Sato, T.** Sur E'quation integrale [Text] / T. Sato // Journal of the math. Society of Japan. – 1953. – Vol. 5, No. 1. – P. 145-153.

91. **Sell, G.R.** The geometric theory of Volterra integral equations. A preliminary report [Text] / G.R. Sell // Proc. EQADIFF III. III Czechosl. Conf. 1972, Brno, J.E. Purkune Univ. – 1973. – P. 139-143.

92. **Takesada, T.** On the singular point of equations of Volterra type [Text] / T. Takesada // Journal of the math. Society of Japan. – 1955. – Vol. 7, No.2. – P. 123-136.

93. **Volterra, V.** Lecons sur les equations integrals et les equations integro-differentieles [Text] / V. Volterra. – Paris, 1913. – 162 p.

94. **Wasow, W.A.** Turning point problem for systems of linear differential equations [Text] / W.A Wasow // J. Math Phys Comm. Purl. Appl. Math. – 1960. – Vol. 38. – P. 257-278.

95. **Wasow, W.A.** Turning point problem for systems of linear equations I. The formal theory [Text] / W.A. Wasow // Comm. Purl. Appl. Math. – 1961. – Vol. 14. – P. 657-673.

96. **Wasow, W.A.** Turning point problem for systems of linear equations II. The analytic theory [Text] / W.A. Wasow // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – Vol. 15. – P. 173-187.