НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ Ж. БАЛАСАГЫНА

На правах рукописи
УДК 517.9

ДЖЭЭНБАЕВА ГУЛГААКЫ АБДЫКААРОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Байзаков А.Б.

Бишкек – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ, ПРИНЯТЫЕ В ДАННОЙ РАБОТЕ

1. Обозначения

R^n – n-мерное вещественное евклидово пространство, а его точки $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ (по умолчанию – векторы-столбцы): $R_+ := [0,+\infty)$;

$\|x\|$ – норма вектора $x=(x_1,\dots x_n)$: $\|x\|_0 = \max\limits_k |x_k|$;

$\{x \in X : P(x)\}$ – или более кратко $\{x : P(x)\}$ – множество всех точек x, для которых выполнено логическое условие $P(x)$;

$C^{\alpha,\beta,\dots}(\Omega \to \Lambda)$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими

производными порядка α по первой переменной, β по второй переменной, …; где Ω и Λ – области в евклидовых пространствах R^n и R^k соответственно;

$\overline{C}^{\alpha,\beta,\dots}(\Omega \to \Lambda)$ – пространство функций, ограниченных и непрерывных вместе с производными до соответствующего порядка;

M – верхняя грань класса ограниченных функций на неограниченных областях;

$Lip\left(L|_u, K|_v, \dots\right)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом L, по переменной v с коэффициентом $K,\dots$; для функций одной переменной индекс будем опускать (коэффициенты могут быть и функциями других переменных);

Для заданных функций нескольких переменных нижний индекс будет обозначать частную производную по соответствующему аргументу: $\psi_{\xi_k}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)=\dfrac{\partial\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)}{\partial\xi_k}$, $k=1,2,\dots,n$;

ДУ – дифференциальное уравнение;

ИУВ – интегральное уравнение Вольтерра;

ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение;

ИДУВ – интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра;

ДУ в ЧП – дифференциальное уравнение в частных производных;

ИДУ в ЧП – интегро-дифференциальное уравнение в частных производных;

Нумерация теорем, уравнений и соотношений, исключая Введение, производится по главам и разделам в виде *(l.m.n)*, где l – номер главы, m – номер раздела и n – номер теоремы, уравнения или соотношения в данном разделе. Для подразделов также используется вышеуказанная нумерация.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Асимптотические и аналитические методы занимают важное место в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что задачи, рассматриваемые в теории дифференциальных уравнений, в подавляющем большинстве не имеют явного решения в виду сложной зависимости от числовых и функциональных параметров, входящих в эти задачи. Однако правильное описание решения или нахождение приближенного решения можно существенно упростить, если известно, что некоторые из параметров очень малы, либо, наоборот, велики. Для решения таких задач привлекаются асимптотические и аналитические методы. Для доказательства существования и единственности ДУ часто применяются методы преобразования решений.

Обзор литературы показал, что методы преобразования решений широко применяются в аналитической и качественной теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Из обзора имеющихся работ следует, что некоторые актуальные вопросы асимптотической и аналитической теории нелинейных ИУВ и ДУ в ЧП, все еще остаются до сих пор мало исследованными или вообще не исследованными. Среди различных задач, несомненно, актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы: асимптотической и аналитической структуры решений в ИУВ, ИДУВ вблизи регулярной и иррегулярной особых точек; разрешимость и структура решений задачи Коши ДУ в ЧП.

Цель и задачи исследования. Настоящая диссертационная работа продолжает исследования В.Вольтерра, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова, Я.Горна, Э.И.Грудо, Я.В.Быкова, М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Т.М.Иманалиева, К.К.Какишева, А.Б.Байзакова, А.Асанова и посвящена дальнейшей разработке и исследованию разрешимости и структуры решений дифференциальных и интегральных уравнений методом преобразования решений.

Задачи исследования:

- Выявить достаточные условия разрешимости задачи Коши и построить структуры решений новых типов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Найти достаточные условия существования решений начальной задачи для новых типов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
- Найти условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.
- Определить влияние полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Построить асимптотическую структуру решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Методика исследований. В работе использованы методы эквивалентного преобразования интегральных уравнений, аналитической теории дифференциальных уравнений, теории функций и функционального анализа: принцип сжимающих отображений.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие положения:

- Найденные методом преобразования решений достаточные условия разрешимости задачи Коши и построенные структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Выявленные методом преобразования решений условия существования решений начальной задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
- Найденные условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.
- Определение характера влияния полюсов свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.

- Построение асимптотической структуры решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Теоретическая и практическая ценность. Настоящая работа носит в основном теоретический характер. Результаты ее могут быть использованы при дальнейших исследованиях по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям, уравнений математической физики и при разработке спецкурсов для студентов математических специальностей Вузов КР: КНУ им. Ж. Баласагына, КРСУ им. Б.Ельцина, БГУ им. К.Карасаева.

Связь работы с научно-исследовательскими проектами. Данная работа выполнена в рамках проектов по Институту математики НАН КР: «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов и компьютерного моделирования для изучения динамических и управляемых систем, обратных и оптимизационных экономических задач и геофизических процессов". (2015-2017), № госрегистрации 0007125; «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов в теории равномерных топологических и кинематических пространств, динамических систем, оптимизационных экономических задач, математическом моделировании» (2018-2020), № госрегистрации 0007664.

Результаты работы включены в заключительные и промежуточные отчеты по этим проектам.

Апробация результатов. Результаты настоящей диссертации доложены и обсуждены на следующих семинарах: Института математики НАН КР (руководитель - академик А.А.Борубаев) и на следующих конференциях: Международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании», Казахстан, Актобе, 2015; Международной научной конференции "II Борубаевские чтения" Института математики НАН КР Бишкек, 2018, "III Борубаевские чтения", посвященной 35-летию со дня образования ИМ НАН КР, Бишкек, 2019.

Публикации. По результатам исследований соискателем опубликованы 9 статей: [24-32], в том числе 2 за рубежом. Также опубликованы 4 тезиса докладов [33-35, 82].

Личный вклад соискателя. В диссертационной работе постановка задачи принадлежит руководителю А.Б. Байзакову, а соискателю – вывод основных соотношений, схема метода и их использование.

В статьях, совместных с научным руководителем, постановка задач принадлежит научному руководителю, а полученные результаты - соискателю. В статье [24] соавтору принадлежит обсуждение результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов, списка литературы, содержащего 97 наименований. Объем текста 90 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертации. Приведены необходимые сведения и определения, обзор литературы по теме диссертации и вспомогательные результаты из аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена описанию объекта и предмета исследования, использованных методов для решения поставленных задач.

В третьей главе приводятся результаты собственных исследований соискателя и их обсуждение.

В разделе 3.1 применяется метод преобразования решений к исследованию разрешимости начальной задачи для ИДУ в ЧП третьего порядка

$$u_{ttx}(t,x)+\alpha u_{tx}(t,x)+\beta u_{tt}(t,x)+\alpha\beta u_{t}(t,x)+(\alpha+1)u_{x}(t,x)+\beta(\alpha+1)u(t,x)= \tag{3.1.1}$$

$$=f(t,x,u(t,x))+\int\limits_{0}^{t}K(t,s,x,u(s,x))ds,\ (t,x)\in D=[0,T]\times R,$$

с начальными данными

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in R,\ u_{t}(0,x)=\psi(x), x\in R, \qquad (3.1.2)\text{-}\ (3.1.3)$$

где $\alpha,\ \beta\in R_{+}$ - положительные постоянные, $f(t,x,u)\in C([0,T]\times R\times R)$, $K(t,x,s,u)\in C([0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R)$ -заданные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)\in \bar{C}^{1.}(R\to R)$.

Решение начальной задачи (3.1.1)-(3.1.3) будем искать в следующем интегральном виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \tag{3.1.4}$$

где известная функция, $c(t,x)\in \bar{C}^{1,2}\left([0,T]\times R\right)$ - выбрана так, что $c(0,x)=\varphi(x)$, $c_t(0,x)=\psi(x)$, $Q(t,x)$ - вновь введенная функция, которую следует определить.

Доказана

ТЕОРЕМА 3.1.1. Предположим, что выполнены:

1) В области $\{t\geq 0,\ -\infty<x<\infty\}$ функция $H(t,c)$ является непрерывной и ограниченной $\|H(t,c)\|\leq M_0=const$;

2) в областях $[0,T]\times R\times R, [0,1]\times R\times(0\leq s\leq t)\times R$ заданные функции $f(t,x,u)$, $K(t,s,x,u)$ ограничены

$\|f(t,x,u)\|\leq M_1=const$; $\|K(t,s,x,u)\|\leq M_2=const$ и удовлетворяют следующим условиям по аргументу u:

$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\leq L\|u_2-u_1\|$, $\|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\leq N\|u_2-u_1\|$

где L,N - константы Липшица.

3) $\dfrac{L+NT}{\alpha\beta}\leq\dfrac{1}{2}$.

Тогда нелинейное ИДУВ (3.1.1) с начальными данными (3.1.2)-(3.1.3) имеет ограниченное решение.

В 3.2 разделе изучена разрешимость начальной задачи для ИДУВ четвертого порядка и построено интегральное представление найденных решений.

Рассмотрена начальная задача для ИДУВ четвертого порядка

$$\begin{gathered}u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\ u_{ty}(t,x,y)+\\+\alpha^2u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=\\f\left(t,x,y,u(t,x,y)\right)+\int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds,\end{gathered}\tag{3.2.1}$$

$(t,x,y)\in D_2=[0,T]\times R^2$,

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),(x,y)\in R^2,\ u_t(0,x,y)=\psi(x,y),(x,y)\in R^2, \qquad (3.2.2)\text{-}(3.2.3)$$

где $\alpha,\beta,\ \gamma$ - положительные константы. Применяя метод преобразования решений решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) ищем в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds, \tag{3.2.4}$$

где $c(t,x,y)\in\bar{C}^{2,1,1}([0,T]\times R\times R)$ - причем выполняется нижеследующие условия $c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$, а $Q(t,x,y)$ - новая введенная функция.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Если $f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L|_u)$,

$K(t,s,x,y,u)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$, $\dfrac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T$.

Тогда начальная задача (3.2.1)-(3.2.3) имеет решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, которое имеет интегральное представление (3.2.4).

В 3.3 изучим начальную задачу поставленной для системы ИДУ в ЧП с параметром на разрешимость:

$$\varepsilon\left[u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)\right]+$$
$$+A(t,x,y,\varepsilon)u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y),\varepsilon\right)+\int_0^t K\left(t,s,x,y,u(s,x,y),\varepsilon\right)ds, \tag{3.3.1}$$

где $t\in[0,T],\ (x,y)\in R\times R,$ с заданным начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y). \tag{3.3.2}$$

Решение начальной задачи (3.3.1)-(3.3.2) ищем в интегральном виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds\ . \tag{3.3.3}$$

$Q(t,x,y)$– новая неизвестная функция, которую следует определить; $\alpha,\beta\in R_+$.

ТЕОРЕМА 3.3.1.**.** Пусть $A(t,x,y,\varepsilon)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R)$,

$f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$,

$K(t,s,x,y,u,\varepsilon)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_2|_u), \varphi(x,y)\in\bar{C}^1(R\times R)$.

Тогда существует значение $T_0>0$, такое, что начальная задача (3.3.1)-(3.3.2) будет иметь решение

$u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.3.3).

Далее, рассмотрена начальная задача для нелинейной ДУ в ЧП

$$\varepsilon^3u_{txy}+\varepsilon\left(u_t+u_x+u_y\right)+A(t,x,y)u=f(t,x,y,u),\ t\in[0,1],\ (x,y)\in R\times R \tag{3.3.9}$$

с начальным условием (3.3.2). Ее решение ищем в виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds, \qquad (3.3.10)$$

где $Q(t,x,y)$ – неизвестная функция, α,β,γ - положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 3.3.2**.** Пусть $f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L|_u\right)$. Тогда существует значение $T_0>0$, такое, что задача Коши (3.3.9), (3.3.2) будет иметь единственное решение $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.3.10).

В 3.4 рассмотрено ИДУ в ЧП третьего порядка

$$\varepsilon^3u_{ttx}+\alpha\varepsilon^2u_{tx}+\beta\varepsilon^2u_{tt}+\alpha\beta\varepsilon u_t+(\alpha+1)\varepsilon u_x+\beta(\alpha+1)u=f(t,x,u(t,x))+$$
$$+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds \qquad (3.4.1)$$

$(t,x)\in D$,с заданными условиями Коши (3.4.2)- (3.4.3), где $\alpha,\ \beta\in R_+$, $f(t,x,u)$, $K(t,x,s.u)$ - заданные непрерывные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)$ - известные непрерывные функции. Решение начальной задачи (3.4.1)-(3.4.3) будем искать в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \qquad (3.4.4)$$

где $c(t,x)$ - такая непрерывная функция, что имеет место $c(o,x)=\varphi(x)$, $c_t(o,x)=\psi(x)$, $Q(t,x)$ - вновь введенная функция, которую следует определить.

ТЕОРЕМА 3.4.1**.** Пусть 1) в области *D:* $c(t,x)$ - непрерывная функция, причем имеет место $c(0,x)=\varphi(x)$, $\quad c_t(0,x)=\psi(x).$

2) в соответствующих областях функции $f(t,x,u),K(t,s,x,u)$ непрерывны и ограничены

$\|f(t,x,u)\|\le M_1=const\,;\|K(t,s,x,u)\|\le M_2=const$

Кроме того, в этих областях функции $f(t,x,u),K(t,s,x,u)$ по аргументу *u* удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\le L\|u_2-u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\|\le L_1\|u_2-u_1\|,$$

3) $\quad \dfrac{L+L_1T}{\alpha\beta}\le\dfrac{1}{2}.$

Тогда в области *D* сингулярно-возмущенное нелинейное ИДУВ (3.4.1) с данными Коши (3.4.2)-(3.4.3) имеет ограниченное решение.

В 3.5. рассмотрено ИДУВ четвертого порядка вида

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2}+2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x}+(\alpha^2+1)L[u]=f\left(t,x,u,u_t,u_x\right)+\int\limits_0^t K\left(t,s,u\left(s,x\right)\right)ds, \qquad (3.5.1)$$

где $L[u]=u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u, t\in\left[0,T\right],\ x\in R,\ \alpha,p\in R_+$ с начальными данными

$u(0,x)=\varphi\left(x\right),\ u_t(0,x)=\psi(x)$. (3.5.2) - (3.5.3)

Решение задачи Коши (3.5.1)-(3.5.3) ищем в виде

$$u\left(t,x\right)=c\left(t,x\right)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q\left(\nu,s\right)dsd\nu \qquad (3.5.4)$$

ТЕОРЕМА 3.5.1**.** Пусть $f(t,x,u,u_t,u_x)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right)$, $K(t,s,x,u)\in\bar{C}\left((0\le s\le t\le T)\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\varphi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right),\psi(x)\in\bar{C}^2\left(R\right)$

Тогда существует $T_0>0$, такое, что начальная задача (3.5.1)-(3.5.2) будет иметь решение $u(t,x)\in\bar{C}^{(2,2)}\left([0,T_0]\times R\right)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.5.4). Кроме того все частные производные, содержащие в уравнение (3.5.1), равномерно ограничены.

В 3.6. рассмотрено ИУВ второго рода

$$u(t)=\int\limits_0^t K(t,s)u(s)ds+f\left(t\right), \qquad (3.6.1)$$

где $K(t,s)$– квадратная матричная функция; а $f\left(t\right)$ – вектор-функция, определенные и непрерывные соответственно в областях ($-\infty<$ s, t$<\infty$), ($-\infty<t<\infty$), причем $K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s),\quad f\left(t+\omega\right)=f\left(t\right),$ (3.6.2)

В силу непериодичности оператора Вольтерра, возникает проблема выделения такого класса ИУВ, для которых существуют периодические решения.

Доказана

ТЕОРЕМА 3.6.1**.** Наряду с *u(t)* будет решением ИУВ (3.6.1), (3.6.2) и функция *u(t+ω)* в том, и только в том случае, когда для *u(t)* выполняется тождество

$$\int\limits_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds=0 \qquad (3.6.4)$$

Построены примеры.

Далее, рассмотрено векторно-матричное нелинейное ИУВ с периодическими коэффициентами

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds+F(t,u),t\in(-\infty,\infty)\,, \tag{3.6.12}$$

где $K(t,s)$ - непрерывная $n\times n$-матричная функция, n-мерная вектор функция $F(t,u)$ определена и непрерывна в области $-\infty\le t\le\infty,\|u\|\le R,$ причём

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s),F(t+\omega,u)=F(t,u) \tag{3.6.13}$$

Пусть $u=u_\omega(t),t\in[0,\omega]$ - решение периодической краевой задачи $u(0)=u(\omega)$ для интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13). Обозначим $u=\tilde{u}_\omega(t)$ - периодическое продолжение $u_\omega(t)$ на всю ось. Доказано, что эта функция будет решением интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13) тогда и только тогда, когда. $\int_0^\omega K(t+\omega,s)u(s)ds=0$

В 3.7 рассмотрен вопрос о влиянии полюса свободного члена и ядра на решение интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ).

Сначала рассмотрено линейное ИУВ первого рода

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds=f(t),t\in[0,T], \tag{3.7.1}$$

ТЕОРЕМА 3.7.1. Пусть 1) в области $l=\{0\le s\le t\le T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по t.

2) $K(0,0)\ne0$, и функция $f(t)$ имеет в начале координат особенность типа полюс порядка q , т.е. $f(t)=f_1(t)/t^q, f_1(t)\ne0.$ Тогда интегральное уравнение (3.7.1) имеет обобщенное решение вида $u(t)=2\delta(t)+x(t),$где $\delta(t)$ - дельта-функция типа Дирака, α некоторая постоянная, а $x(t)$ определяется из уравнения вида $t^q x(t)+\int_0^t N(t,s)x(s)ds=F(t)-N(t,0)F(0)/N(0,0)$,

Построены примеры.

В 3.8 рассмотрена линейная система вида

$$t^q u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds, \tag{3.8.1}$$

$q>1-$ натуральное число, где $K(t,s)-n\times n$-матричная функция, которая является голоморфной в окрестности точки $t=s=0$. Пусть λ_j −собственные значения $K(0,0)$, $j = 1..n$. Рассмотрен ранее не изученный случай, когда $\lambda_j, j = 1..n$ принимают кратные значения и $Re\,\lambda_j > 0$.

ТЕОРЕМА 3.8.1. Пусть $K(0,0)$ имеет кратные собственные значения λ_{rj} и выполняется условие $Re\lambda_{rj} > 0, j = 1..r$. Тогда уравнение (3.8.1) в каждом достаточно узком подсекторе $S^* \in S$ (сектор с вершиной в начале координат, содержащий вещественную полуось) имеет матричное решение вида $u(t) = \hat{u}(t)e^{\tilde{A}(t)}$, где $\tilde{A}(t)$ −диагональная матрица, диагональные элементы которой являются диагональными матрицами порядка $r_j, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$ с диагональными элементами, имеющими разложение относительно p −положительное целое, $\hat{u}(t)$ обладает асимптотическим свойством разложения по степеням $t^{1/P}$.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В Главе 1 проводится анализ основных этапов в развитии научной мысли по теме диссертации. В этой главе приводятся результаты, используемые в данной работе. Приведены краткое резюме о необходимости выбора и концепции проведения тематику исследований в области асимптотической и аналитической теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

1.1. Обзор работ по разрешимости начальной задачи дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, учитывающие возможность явление последействия, протекающих в пространстве и во времени играют большой роль в моделировании естественно-технических процессов. Кроме того, известно, что проблема разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных все еще остаются актуальной задачей. Академиком Иманалиевым М.И. и его учениками [39-41] найдены достаточные условия разрешимости и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. В этих работах предложен новый метод построения решений классической задачи Коши для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Основой нового аналитического метода является преобразование решений исходной задачи Коши для ИДУВ в нахождение решений нелинейного интегрального уравнения Вольтерра II рода. Далее применяется известный принцип сжимающих отображений. Отметим, что в этом методе нередко дается интегральный представление искомых решений. Этот метод был применен многими авторами при исследовании проблемы разрешимости для операторных уравнений, например, Айтбаев К., Кыдыралиев Т.Р. [1, 56].

Известно, что при интегрировании уравнений в частных производных не всегда удается найти общее решение данных уравнений. Поэтому, обычно ищется только те решения, в котором они удовлетворяет некоторым, заранее поставленным дополнительным условиям. Такая ситуация возникает, в частности, для ИДУ в ЧП, когда ищутся решения, удовлетворяющий заранее заданным начальным условиям.

Из литератур известно, что имеются различные методы решения проблемы разрешимости нелинейных ДУ в ЧП. В частности: известный метод характеристик, метод Бубнова - Галеркина и метод дополнительного аргумента, предложенный академиком М. Иманалиевым и его учениками.

Исследовать разрешимость задачи Коши для ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП можно провести и методом преобразования решений [39, 40].

1.1.1. В [39] было рассмотрено ДУ в ЧП шестого порядка:

$$\frac{\partial^4 L[u]}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial^3 L[u]}{\partial x \partial y^2} + 2\beta \frac{\partial^3 L[u]}{\partial x^2 \partial y} + \left(\alpha^2 + 1\right)\frac{\partial^2 L[u]}{\partial y^2} + \left(\beta^2 + 1\right)\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2} +$$

$$+ 4\alpha\beta \frac{\partial^2 L[u]}{\partial x \partial y} + 2\left(\alpha^2 + 1\right)\beta \frac{\partial L[u]}{\partial y} + 2\alpha\left(\beta^2 + 1\right)\beta \frac{\partial L[u]}{\partial x} + \left(\alpha^2 + 1\right)\left(\beta^2 + 1\right)L[u] =$$

$$= f\left(t, x, y, u(t,x,y), u_t(t,x,y), u_x(t,x,y), u_y(t,x,y)\right) \qquad (1.1.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x,y)=\varphi_1(x,y),\quad u_t(0,x,y)=\varphi_2(x,y) \qquad (1.1.2)$$

где $L[u]=u_{tt}(t,x,y)+2pu_t(t,x,y)+\left(p^2+1\right)u(t,x,y)$,

где α,β,p — некоторые положительные постоянные,

$f(t,x,y,u,v,\mu,\omega)\in\overline{C}(D\times R\times R\times R\times R\times R)$;

$\varphi_i(x,y)\in\overline{C}^{(1,1)}(R\times R),\ (i=1,2)$.

Решение начальной задачи (1.1.1)-(1.1.2) ищется в интегральном виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(x-s)-\beta(y-\gamma)-p(t-v)}\sin(x-s)\sin(y-\gamma)\sin(t-v)Q(v,s,\gamma)d\gamma ds dv,$$

где $c(t,x,y)$ - известная функция, при этом

$$c(0,x,y)=\varphi_1(x,y),\quad c_t(0,x,y)=\varphi_2(x,y),$$

а $Q(t,x,y)$ - новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

Тем самым, решение начальной задачи (1.1.1), (1.1.2) методом преобразования решений переводиться к исследованию эквивалентного нелинейного ИУВ второго рода. Из курса интегральных уравнений известно, что к нахождению решений ИУВ второго рода можно применять топологический принцип - принцип сжатых отображений. Тем самым мы можем определить неизвестную функции $Q(t,x,y)$ однозначно.

1.1.2. В работе [40] метод преобразования решений применяется к сингулярно-возмущенным обыкновенным ДУ второго порядка имеющий точку поворота $\varepsilon y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x),\ (0\le x\le 1)$ (1.1.3)

с начальными данными:

$$y(0)=b_1,\quad y'(0)=b_2 \qquad (1.1.4)$$

где $b_i-const>0,\ a(x),b(x),\ f(x)\in C[0,1]$, кроме того, $a(x_k)=0,\ (k=\overline{1,N}),\ 0<x_k<1,\ x_k$ - заданные точки.

Используется преобразование вида

$$y=b_1+b_2x+\int_0^x\int_0^s e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-s)+\frac{\beta v}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(v)dv ds,$$

где $Q(x)$ - неизвестная функция, которую следует определить, α, β - положительные константы. Тем самым, исследование задачи (1.1.3), (1.1.4) преобразуется в линейное ИУВ второго рода. Применяя топологический метод - принцип сжимающих отображений, находится однозначно функция $Q(x)$. Отметим, что по методу преобразования решений получено интегральное представление искомых решений.

1.2. Обзор работ по теории интегральных систем с особыми точками

Ряд важных задач теории упругости [20], распространение волн в средах с памятью [57], теории динамических нестационарных управляемых систем с последействием [59] приводят к ИУВ и ИДУВ с особыми точками. Впервые интегральные уравнения с особыми точками рассматривали Т.Лалеско [90], В.Вольтерра [94].

Аналитическая структура решений ИУВ в окрестности регулярных особых точек были рассмотрена немецким ученым Горном [87-88]. Затем они были продолжены Т.Сато [91], Т.Такесада [93] и Э.И.Грудо [21-22], Я.В.Быковым [17], Н.А.Магницким [58-59], Н.В.Донской, П.С.Панковым [36], А.Б.Байзаковым [9].

Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками типа Лайтхилла и начальные задачи для них были изучены К.А.Алымкуловым и его учениками [2, 73, 74]. Кроме того, им был предложен метод построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач.

Японский математик Т.Такесада в [93] исследовал линейную систему ИУВ с регулярной особой точкой

$$tu(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t),\ f(0) = 0, \qquad (1.2.1)$$

с голоморфными правыми частями *f(t)* и ядром *K(t,s)* в окрестности начала координат. При выполнении некоторых условий на собственные значения матрицы *K(0,0)*, им найдено структура решений в виде сходящихся обобщенных рядов. Однородная система ИУВ типа (1.2.1) изучена в [14], когда функции, определяющие уравнение (1.2.1), непрерывны и удовлетворяет условиям гладкости и выполнены некоторые условия, накладываемые на ядро.

Проблемы регуляризации и единственности решений систем линейных и нелинейных ИУВ третьего рода рассмотрены в работах М.Иманалиева, А.Асанова [4]. Кроме того, рассмотрены регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. В [13] К.Б. Бараталиевым построены основы спектральной теории и разработаны методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

В работах [21,22] Э.И.Грудо построил решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в виде сходящихся рядов.

В работах [15], [61] рассмотрены интегральные уравнения типа Вольтерра с произвольной неподвижной особенностью. Линейные интегральные уравнения типа Вольтерра, когда ядро и правая часть аналитические функции, а также случай, когда полюсы свободного члена и особенности ядра влияют на структуру решения, подробно рассматривались Л.Н. Сретенским [63].

Н.А. Магницкий показал, что основные результаты аналитической теории дифференциальных уравнений, которые были изложены в работах [58, 59], успешно могут быть перенесены для исследования широких классов линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Здесь распространены такие понятия, как регулярная особая точка, иррегулярная особая точка и для интегральных уравнений типа Вольтерра.

Известно, что особую роль в теории обыкновенных дифференциальных уравнений играют асимптотические разложения решений в виде рядов. Важность асимптотического разложения решений с особыми точками в теории интегральных уравнений типа Вольтерра показаны в работах [20, 94].

Отметим, что теория периодических решений интегро-дифференциальных уравнений существенно отличается от соответствующей теории дифференциальных уравнений. Это как раз тот аспект теории ИУДВ, который не получается путем прямого перенесения результатов из известной дифференциальной теории. В части периодических решений наиболее изученным является случай интегро-дифференциальных уравнений с фредгольмовым аппаратом [7]. В связи с непериодичностью интегрального оператора Вольтерра, ИДУВ в отношении периодических решений оказались менее изученными. Трудности в проблеме периодических решений в вольтерровом случае, заставило многих авторов вместо периодических решений, рассматривать решения мало отличающиеся от периодических при больших значениях независимой переменной.

1.3. Заключение по Главе 1

В главе 1 приведены краткий анализ основных этапов в развитии аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений, и приводятся некоторые результаты, используемые в работе, которые заимствованы из других источников. Тем не менее, многие актуальные вопросы теории нелинейных ИУВ и ИДУВ, все еще остаются не исследованными. Среди различных задач, несомненно, актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы асимптотической и аналитической структуры решений нелинейных ИУВ и ИДУВ вблизи регулярных особых точек. Именно такие проблемы изучаются в данной работе. Кроме того, проблема разрешимости начальных задач новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП и построение интегральных структур решений все еще остается актуальной проблемой в теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. В силу того, что интегральный оператор Вольтерра не всегда переводит в периодическую функцию в периодическую функцию, нахождение условий существования периодических решений краевой задачи интегральных уравнений Вольтерра – актуальная задача.

В настоящей работе будут использованы метод преобразования решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, методы аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений, методы функционального анализа.

ГЛАВА 2. МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Объект, предмет и задачи исследования

Объект исследования. Объектом исследования являются дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (скалярные и системы уравнений) и интегральные уравнения Вольтерра. Рассматриваются проблемы разрешимости начальной задачи, существования периодических решений и влияния полюсов свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра, построение асимптотической структуры решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

Предмет исследования. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных (скалярные и системы уравнений) и интегральные уравнения Вольтерра. Настоящая диссертационная работа продолжает исследования В.Вольтерра, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова, Я.Горна, Э.И.Грудо, Я.В.Быкова, М.И.Иманалиева, П.С.Панкова, Т.М.Иманалиева, К.К.Какишева, А.Б.Байзакова, А.Асанова и посвящена дальнейшей разработке и исследованию разрешимости и структуры решений дифференциальных и интегральных уравнений методом преобразования решений.

Важнейшие задачи исследования:

- Выявить достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Разрешить проблему существования решений начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром.
- Найти условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.

- Определить влияние полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Построить асимптотическую структуру решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

2.2. Методы исследования

Во многих задачах аналитической и асимптотической теории дифференциальных, интегральных уравнений применяется метод преобразования решений. Так, в работе Н.П.Еругина [37], глава VIII посвящена методу преобразования решений, позволяющему проинтегрировать заданное дифференциальное уравнение или исследовать свойства его решений.

В связи с этим приведем следующее определение, введенное в работе [7]. Пусть Ω - некоторое множество, операторы A и K отображают его в себя. Рассмотрим уравнение

$$Ax = b \tag{2.2.1}$$

где b - фиксированный элемент из Ω, и преобразование

$$x = Ky\,. \tag{2.2.2}$$

Из (2.2.1), (2.2.2) непосредственно имеем

$$AKy = b\,. \tag{2.2.3}$$

Отсюда, если существует обратный оператор $(AK)^{-1}$, то получим

$$y = (AK)^{-1}b\,, \tag{2.2.4}$$

и из (2.2.4), (2.2.2) имеем решение уравнения (2.2.1) в виде

$$x = K(AK)^{-1}b\,. \tag{2.2.5}$$

Определение 2.2.1. Оператор K будем называть оператором преобразования решений оператора A.

Замечание 2.2.1. Необходимо выбрать оператор *K* так, что получить более упрощенное новое операторное уравнение (2.2.3), к которому можно было бы применить один из следующих методов:

- топологические методы доказательства существования решений, например, принцип сжимающих отображений;
- методы разложения решений, например, методы разложения решений в степенные ряды (первый метод Ляпунова).
- непосредственно произвести различные, в том числе асимптотические оценки, используя предположения относительно операторов *A* и *K* и элемента *b*, при стремлении независимой переменной к некоторому предельному значению.

Замечание 2.2.2. Отметим, что определение 2.2.1 включает в себя и методы интегральных преобразований $y = Fx$, преобразования Фурье (Лапласа), если подставить (2.2.2) в виде

$y = Fx$ где $F = K^{-1}$,

т.е. заранее предположить существование обратного оператора K^{-1}, тогда как в (2.2.4) предполагается существование обратного оператора $(AK)^{-1}$.

Пример 2.2.1. Рассмотрим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ax \equiv \frac{dx(t)}{dt} - \Lambda x(t) = f(t), \;\; x(t_0) = x_0$$

$\Lambda = n \times n$ – матрица, и рассмотрим другое уравнение

$$x = e^{\Lambda t} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s) ds \equiv Kx .$$

Очевидно, $AKx = \Lambda e^{\Lambda t} x_0 + f(t) + \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s) ds - \Lambda e^{\Lambda t} x_0 - \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s) ds \equiv f(t)$,

т.е. в данном случае *A* и *K* - взаимно обратные операторы.

Пример 2.2.2. Пусть

$$x'(t) = f(t, x(t)); \;\; x(t_0) = x_0 ; \tag{2.2.6}$$

$$Ax(t) \equiv x'(t) - f(t, x(t)) = 0 ,$$

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \equiv Kx .$$

Очевидно, A и K – взаимно обратные операторы. Используя топологический метод – принцип сжимающих отображений, можно доказать существование единственного решения задачи Коши (2.2.6).

Пример 2.2.3. Рассмотрим неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ax \equiv \frac{dx(t)}{dt} - \Lambda x(t) = f(t), \;\; x(t_0) = x_0$$

$\Lambda = n \times n$ – матрица, и рассмотрим другое уравнение

$$x = e^{\Lambda t} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds \equiv Kx .$$

Очевидно, $AKx = \Lambda e^{\Lambda t} x_0 + f(t) + \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds - \Lambda e^{\Lambda t} x_0 - \Lambda \int_{t_0}^{t} e^{\Lambda(t-s)} f(s)ds \equiv f(t)$,

т.е. в данном случае A и K взаимно обратные операторы.

Пример 2.2.4. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Lambda(t)x(t) , \;\; t \in [0, \infty); \tag{2.2.7}$$

При изучении свойств характеристических показателей решений линейной системы (2.2.7) используется оператор преобразования

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Lambda(s)x(s)ds \equiv Kx . \tag{2.2.8}$$

И далее используя оценки норм к (2.2.8) и лемму Гронуолла-Беллмана, доказывается ограниченность характеристических показателей системы (2.2.8).

Пример 2.2.5. Рассмотрим задачу Коши для скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varepsilon), \;\; x(t_0) = x_0 , \;\; t \in [0, T], \tag{2.2.9}$$

решение которой обозначим $x(t, \varepsilon)$.

Пусть решение $x = x_0(t)$ – задачи Коши при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), 0), \ x|_{t=0} = x_0$$

существует и единственно на $[0, T]$.

Решение задачи Коши (2.2.9) ищется в виде

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ... + \varepsilon^{N-1} x_{N-1}(t) + R_n(t,\varepsilon) \equiv Kx \ .$$

Далее доказывается оценка для остаточного члена

$$|R_N(t,\varepsilon)| \leq c_N \varepsilon^n$$

и для определения функций $x_n(t), \ n \geq 1$, получаются линейные уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0) x_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, x_0(t), 0), \quad x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0, 0) x_n + F_n(t, x_0, ..., x_{n-1}), \quad x_n(0) = 0 \ ,$$

где F_n - известные функции.

Решение каждой из задач существует и единственно при $t \in [0, T]$, все функции $x_n(t) \in C^\infty(0, T)$, и все они при $n \geq 1$ могут быть вычислены в квадратурах.

Пример 2.2.6. Рассмотрим

$$(t-a)\frac{du(t)}{dt} = H(t)u(t) + \int_a^t N(t,s)u(s)ds \ , \qquad (2.2.10)$$

где $H(t), \ N(t,s)$ - голоморфные в области $G_R^a = \{|t-a| < \rho, \ |s-a| < \rho\}$ операторы.

Найдено аналитическое выражение решений уравнения (2.2.10), используя преобразование вида: $u(t) = (t-a)^\beta \varphi(t) \equiv K\varphi$, где $\varphi(t)$ - голоморфная функция в $|t-a| < \rho$.

В предположении непрерывности коэффициентов и ядра уравнение (2.2.10) рассмотрено в работе [7]. В этом случае для нахождения решения уравнения (2.2.10) также используется метод преобразования решений в виде

$$u(t) = t^{\beta}\left(c + \int_0^t y(s)ds \right) \equiv Ky\,. \qquad (2.2.11)$$

При использовании преобразования решений (2.2.11) относительно неизвестной переменной $y(t)$ получается система уравнений, для которой применяется принцип сжимающих отображений.

Пример 2.2.7. Рассмотрим автономную систему

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \varphi_k(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\ k = 1,2,...,n \qquad (2.2.12)$$

в окрестности точки $x = (x_1, ..., x_n) \equiv 0$, предполагая, что функции φ_i аналитичны в этой окрестности и $\varphi_i(0) = 0$. Если

а) все элементарные делители матрицы Якоби: $\left(\dfrac{\partial \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} \right)$ простые;

б) между корнями $\lambda_1, ..., \lambda_n$ этой матрицы и мультииндекса p не существует линейного соотношения $< p, \lambda >= 0$;

в) собственные значения λ_j матрицы Якоби расположены по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через начало координат;

тогда существуют сходящиеся в некоторой окрестности начала координат ряды

$$x_k = \xi_k(y_1, y_2, ..., y_n),\ \xi_k(0) = 0,\ k = 1,...,n$$

с помощью которых система (2.2.12) может быть приведена к простой системе

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k,\quad k = 1,...,n\,.$$

2.3. Заключение к Главе 2

В главе 2 описан многократно используемый в данной работе метод исследования, т.е. операторных уравнений, которые имеют практические применения в асимптотической и аналитической теории дифференциальных и интегральных уравнений. В примерах 2.2.1. - 2.2.7 нами показаны различные возможности применения метода преобразования решений к различным задачам теории диффренциальных уравнений.

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Разрешимость задачи Коши для ИДУ в ЧП третьего порядка

В данном разделе осуществлено применение вышеуказанного метода преобразования решений к исследованию разрешимости начальной задачи для следующего ИДУ в ЧП:

$$u_{ttx}(t,x)+\alpha u_{tx}(t,x)+\beta u_{tt}(t,x)+\alpha\beta u_t(t,x)+(\alpha+1)u_x(t,x)+\beta(\alpha+1)u(t,x)= \tag{3.1.1}$$

$$=f(t,x,u(t,x))+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds,\ (t,x)\in D=[0,T]\times R,$$

с начальными данными

$$u(0,x)=\varphi(x), x\in R, \tag{3.1.2}$$

$$u_t(0,x)=\psi(x), x\in R, \tag{3.1.3}$$

где $\alpha,\ \beta\in R_+$ - положительные постоянные, $f(t,x,u)\in C([0,T]\times R\times R)$, $K(t,x,s,u)\in C([0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R)$ - заданные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)\in \overline{C}^{1.}(R\to R)$.

Решение начальной задачи (3.1.1)-(3.1.3) будем искать в следующем интегральном виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \tag{3.1.4}$$

где известная функция $c(t,x)\in\overline{C}^{1,2}([0,T]\times R)$ - выбрана так, что

$$c(0,x)=\varphi(x),$$

$$c_t(0,x)=\psi(x),$$

$Q(t,x)$ - вновь введенная функция, которую следует определить.

С целью находить функцию $Q(t,x)$ будем подставлять выражение (3.1.4) в (3.1.1). Из (3.1.4) будем находить первую частную производную:

$$u_t(t,x)=c_t-\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds+$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\cos(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds$$

Учитывая (3.1.4), отсюда имеем

$$u_t = c_t - \alpha\left(u-c\right) + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \cos(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds\,. \tag{3.1.5}$$

$$u_{tt} + \alpha u_t = c_{tt}(t,x) + \alpha c_t + \int\limits_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} Q\left(t,\rho\right) d\rho - \alpha\left(u-c\right) -$$

$$-\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds =$$

$$= c_{tt} + \alpha c_t + \int\limits_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)} Q(t,\rho) d\rho - (\alpha+1)\left(u-s\right). \tag{3.1.6}$$

Отсюда, находя производные от обеих частей, получим

$$u_{ttx} + \alpha u_{tx} = c_{ttx} + \alpha c_{tx} + Q(t,x) -$$

$$-\beta\left[u_{tt} + \alpha u_t + (\alpha+1)(u-c) - c_{tt} - \alpha c_t\right] - (\alpha+1)\left(u_x - c_x\right). \tag{3.1.7}$$

Отсюда имеем

$$u_{ttx} + \alpha u_{tx} + \beta u_{tt} + \alpha\beta u_t + \left(\alpha+1\right) u_x + \beta\left(\alpha+1\right) u =$$

$$= c_{ttx} + \alpha c_{tx} + \beta c_{tt} + \alpha\beta c_t + \left(\alpha+1\right) c_x + \beta\left(\alpha+1\right) c + Q(t,x). \tag{3.1.8}$$

Заменяя левую часть уравнения (3.1.1) соотношением (3.1.8), имеем

$$Q(t,x) = f\left(t, x, c + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds\right) +$$

$$+\int\limits_0^t K(t,s,x,c + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)} \sin(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds) ds + H(t,c) = AQ \tag{3.1.9}$$

где

$$H(t,c) \equiv c_{ttx} + \alpha c_{tx} + \beta c_{tt} + \alpha\beta c_t + \left(\alpha+1\right) c_x + \beta\left(\alpha+1\right) c\,. \tag{3.1.10}$$

Для доказательства существование решений нелинейного ИУВ (3.1.9) применим принцип сжатых отображений.

Пусть:

1) В области $\{t \ge 0,\ -\infty < x < \infty\}$ функция $H(t,c)$ является непрерывной и ограниченной

$$\left\|H(t,c)\right\| \le M_0 = const;$$

2) в множествах своего определения функции $f(t,x,u)$, $K(t,s,x,u)$ ограничены

$$\left\|f(t,x,u)\right\| \le M_1 = const; \qquad \left\|K(t,s,x,u)\right\| \le M_2 = const \tag{3.1.11}$$

и удовлетворяют условиям Липшица по аргументу u:

$$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2-u_1\|, \qquad \|K(t,s,x,u_2)-K(t,s,x,u_1)\| \le N\|u_2-u_1\| \quad (3.1.12)$$

где L, N - константы Липшица.

Правую часть уравнения (3.1.9) будем рассматривать как оператор $A[Q]$, действующий на функцию $Q(t,x)$. Определим

$$Q=\left\{Q(t,x): Q(t,x)\in C\left([0,T_0]\times R\right)\cap\left\|Q(t,x)\right\|\le h\right\}.$$

Оценивая нижеследующее выражение в множестве Q, получим $\|A[Q]\| \le \|f(t,x,u)+H(t,c)\|+\|K(t,s,x,u)\|T \le M$, где $M = M_0 + M_1 = const$.

Имея в виду соотношения (3.1.9), (3.1.11)-(3.1.12) будем оценивать разность

$$\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\| \le \left\| f\left(t,x,c+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q_1(t,s)d\rho ds\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(t,x,c+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)Q_2(t,s)d\rho ds\right)\right\|+$$

$$\left\|\int_0^t K\left(\tau,x,c+\int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}\sin(\tau-s)Q_1(\tau,s)d\rho ds\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^t K\left(\tau,x,c+\int_0^\tau e^{-\alpha(\tau-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}\sin(\tau-s)Q_2(\tau,s)d\rho ds\right)\right\| \le$$

$$\le (L+NT)\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\rho)}\sin(t-s)\|Q_1(t,s)-Q_2(t,s)\|d\rho ds\right\} \le$$

$$\le (L+NT)\frac{1}{\alpha\beta}\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\| \le \frac{1}{2}\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\|,$$

где α, β - такие, что выполняется

$$\frac{L+NT}{\alpha\beta}\le\frac{1}{2}.$$

В силу принципа сжатых отображений, из последней оценки следует, что нелинейное ИУВ (3.1.9) будет иметь непрерывное, ограниченное решение $Q(t,x)$ причем оно единственно в шаре Q.

Далее будем доказывать ограниченность решений начальной задачи (3.1.1)-(3.1.3). Оценивая (3.1.4) при $Q(t,x,y)\in Q$ имеем следующее соотношение

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\rho)} |\sin(t-s)| \|Q(s,\rho)\| d\rho ds \le \tilde{n}_0 + \frac{M}{\alpha\beta} = M_{00} = const\,.$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 3.1.1. Предположим, что выполнены:

1) В области $\{t \ge 0,\ -\infty < x < \infty\}$ функция $H(t,c)$ является непрерывной и ограниченной

$\|H(t,c)\| \le M_0 = const$;

2) в областях $[0,T]\times R\times R, [0,1]\times R\times(0\le s\le t)\times R$ заданные функции $f(t,x,u)$, $K(t,s,x,u)$ ограничены:

$\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const$; $\|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const$ и

удовлетворяют следующим условиям по аргументу u:

$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2 - u_1\|$, $\|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \le N\|u_2 - u_1\|$

где L, N - константы Липшица.

3) $\dfrac{L+NT}{\alpha\beta} \le \dfrac{1}{2}$.

Тогда нелинейное ИДУВ (3.1.1) с начальными условиями (3.1.2)-(3.1.3) имеет ограниченное решение.

3.2. О разрешимости и структуре решений задачи Коши для ИДУВ четвертого порядка

В данном разделе изучена разрешимость начальной задачи для ИДУВ четвертого порядка и построено интегральное представление найденных решений.

Рассмотрим начальную задачу для ИДУВ четвертого порядка

$$\begin{aligned} &u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ + \\ &+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \\ &+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)= f\big(t,x,y,u(t,x,y)\big)+\int_0^t K(t,s,x,\mathrm{y},u(s,x,\mathrm{y}))ds, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$(t,x,y)\in D_2=[0,T]\times R^2$,

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),(x,y)\in R^2, \tag{3.2.2}$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y),(x,y)\in R^2, \qquad (3.2.3)$$

где $\alpha,\beta.\gamma\in R_+$ - положительные константы.

Применяя вышеуказанный метод преобразования решений решение задачи (3.2.1)-(3.2.3) ищем в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+ \\ +\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds, \qquad (3.2.4)$$

где $c(t,x,y)\in\bar{C}^{2,1,1}([0,T]\times R\times R)$ - причем выполняется нижеследующие условия $c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$, а $Q(t,x,y)$ - новая введенная функция.

Предположение (T).

Предположим, что $f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L|_u)$, $K(t,s,\mathrm{x},\mathrm{y},u)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$

$$\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T\cdot$$

Обозначим

$$H(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\ c_{ty}(t,x,y)\ + \\ +\ \alpha^2c_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+\gamma c_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha c_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta c_{tt}(t,x,y)+ \\ +2\alpha\beta\gamma c_t(t,x,y)\ +\alpha^2\ c_x\gamma(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma c(t,x,y).$$

В силу выбора *c(t,x,y)* можем считать, что выполнено неравенство

$$\max_{[0,T]\times R\times R}\|H(t,x,y)\|<+\infty.$$

Будем подставлять (3.2.4) в (3.2.1). Из выражения (3.2.4) найдем производную по *t*:

$$u_t(t,x,y)=c_t(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds- \\ -\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds\,,$$

Отсюда, в силу (3.2.4)

$$u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)=\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds. \tag{3.2.5}$$

Дифференцируя обеих частей выражения (3.2.5) по t имеем:

$$u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu- \tag{3.2.6}$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds.$$

Из (3.2.6), учитывая (3.2.5), имеем

$$u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+\alpha^2 c(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu. \tag{3.2.7}$$

Производная обеих частей (3.2.7) по x дает:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu.$$

Отсюда с учетом (3.2.7) имеем

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+ 2\alpha\beta u_t(t,x,y) + \alpha^2 u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=$$
$$c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+\beta c_{tt}(t,x,y)+ \tag{3.2.8}$$
$$+ 2\alpha\beta c_t(t,x,y)+\alpha^2\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

Дифференцируя соотношение (3.2.8) по y, имеем:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+ 2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y) + \alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+ \beta c_{tty}(t,x,y)+ \tag{3.2.9}$$
$$+ 2\alpha\beta c_{ty}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

Будем умножать (3.2.8) на γ и складывать с соотношением (3.2.9) почленно, имеем

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\;+$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \tag{3.2.11}$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\;+\alpha^2\gamma\, u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).$$

Из последнего уравнения (3.2.11), учитывая соотношения (3.2.1), (3.2.4) для нахождения неизвестной функции $Q(t,x,y)$ имеем нелинейное ИУВ:

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds\right]+$$

$$+\int_0^t K(t,s,x,\text{y},c(s,x,y)+\int_0^s\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, d\tau)ds-H(t,x,y)\equiv PQ,$$

(3.2.12)

Теперь к уравнению (3.2.12) применим принцип сжатых отображений. Предположим, что

$$Q=\left\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in C\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)\cap\left\|Q(t,x,y)\right\|\le h\right\}.$$

Тогда из соотношения (3.2.11) будем иметь оценку: $\|PQ\|\le M+N+KT_0$,

где $\quad M\equiv\max\, f(t,x,y,u),\; N\equiv\max\left\|H(t,x,y)\right\|, \text{K}\equiv\max\text{K}(t,\text{s},x,y,u)$.

Если выберем величины T_0 и h так, чтобы выполнилось условие:

$$M+N+KT_0\le h, \tag{3.2.13}$$

то оператор PQ множество Q отображает в себя $PQ:Q\to Q$.

Покажем, что оператор PQ является сжатым оператором. Из соотношения (3.2.11), учитывая Предположение (Т), получим

$$\left\|PQ_1-PQ_2\right\|\le(L+L_1\,\text{t})\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu\, d\mu\, ds\times\left\|Q_1-Q_2\right\|\le$$

$$\le\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}\left\|Q_1-Q_2\right\|. \tag{3.2.14}$$

Нами при получении оценки (3.2.14) были использованы ниже следующие соотношения

$$\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}d\nu\right)d\mu\right]ds\le$$

$$\leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\mu)}\left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma y}\cdot e^{\gamma \nu}\Big|_{\nu=-\infty}^{y}\right)d\mu\right]ds \leq \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Будем выбирать постоянные $\alpha,\beta,\gamma,T\in R_{+}\quad 0$ так, чтобы имело место следующее соотношение $\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1$. Теперь, учитывая предположения (Т), из соотношения (3.2.14) будет следовать, что PQ - есть сжатый оператор. В силу принципа сжимающихся отображений имеем, что нелинейное ИУВ (3.2.12) имеет в множестве Q единственное решение $Q(t,x,y)\in Q$. Таким образом определенную функцию подставив в выражение (3.2.4), имеем решение поставленной задачи Коши (3.2.1)-(3.2.3).

Рассмотрим теперь некоторые свойства полученного решения начальной задачи (3.2.1)-(3.2.3). При всех $Q(t,x,y)\in Q$ из равенства (3.2.4) следует соотношение

$$\left\|u(t,x,y)\right\| \leq \left\|c(t,x,y)\right\| + \left\|\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\sin\int_{-\infty}^{y}(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu ds\right\| \leq$$

$$\leq C_0+\frac{T_0h}{\alpha\beta\gamma}=M_0=const\,.$$

Из соотношения (3.2.5) получаем

$$\left\|u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)\right\| \leq \left\|\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)\right\| +$$

$$+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu ds\right\| \leq C_1+\frac{h}{\alpha\beta\gamma}=M_1=const\,.$$

Точно также, из (3.2.7)-(3.2.9) можно получить, что все частные производные уравнения (3.2.1), равномерно ограничены.

Итак, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3.2.1. Предположим, что выполнено условия (Т). Тогда начальная задача (3.2.1)-(3.2.3) имеет решение $u(t,x,y)\in \overline{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$, которое имеет интегральное представление (3.2.4).

Замечание. Если уравнение (3.2.1) окажется линейным, т.е. правой части уравнения в функции f не содержится u т.е. она имеет вид $f(t,x,y)$ и ядро тождественно равно нулю: $K(t,s,x,y,u)\equiv 0$, то решение задачи Коши (3.2.1)-(3.2.3) можно выразить в квадратурах

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\left[f(s,\mu,\nu)-H(s,\mu,\nu)\right]d\nu d\mu ds.$$

Это замечание будет следовать из выражений (3.2.12), (3.2.4).

3.3. О разрешимости начальной задачи для системы ИДУ в ЧП с параметром

3.3.1. Изучим начальную задачу поставленной для системы ИДУ в ЧП с параметром на разрешимость:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left[u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)\right]+\\&+A(t,x,y,\varepsilon)u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y),\varepsilon\right)+\int_0^t K\left(t,s,x,y,u(s,x,y),\varepsilon\right)ds,\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где $t\in[0,T],\ (x,y)\in R\times R,$ с заданным начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y). \tag{3.3.2}$$

Предположение А. Предположим, что:

$A(t,x,y,\varepsilon)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R)$, $\qquad f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_1|_u\right)$,

$K(t,s,x,y,u,\varepsilon)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_2|_u\right), \varphi(x,y)\in\bar{C}^1(R\times R).$

Тогда имеем $\qquad \|A(t,x)\|\le M_A=const$.

Решение начальной задачи (3.3.1)-(3.3.2) будем искать в интегральном виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-s)}{\varepsilon}+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds\,. \tag{3.3.3}$$

где $Q(t,x,y)$– новая неизвестная функция, которую следует определить; $\alpha,\beta\in R_+$.

Далее, находим частные производную по t и x, y вектор функции $u(t,x,y)$ из соотношения (3.3.3):

$$u_t(t,x,y) = -[\varphi'_x(x-t,y-t) + \varphi'_y(x-t,y-t)] + \frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) - \frac{\alpha}{\varepsilon}(u-\varphi) -$$

$$-\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon}s}\frac{1}{\varepsilon}[Q_x(s,x-t+s,y-t+s) + Q_y(s,x-t+s,y-t+s)]ds$$

$$u_x(t,x,y) = -\varphi'_x(x-t,y-t) + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q_x(s,x-t+s,y-t+s)ds,$$

$$u_y(t,x,y) = -\varphi'_y(x-t,y-t) + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q_y(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Определим сумму $u_t(t,x) + u_x(t,x,y) + u_y(t,x,y) = \frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) - \frac{\alpha}{\varepsilon}u + \frac{\alpha}{\varepsilon}\varphi(x-t,y-t).$

Умножим обе части последнего полученного уравнения на величину ε, будем иметь

$$\varepsilon(u_t + u_x + u_y) + \alpha u(t,x,y) = e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) + \alpha\varphi(x-t,y-t). \qquad (3.3.4)$$

Учитывая (3.3.3), вычислим соотношение

$$\left[A(t,x,y,\varepsilon) - \alpha\right]u = \left[A(t,x,y,\varepsilon) - \alpha\right]\varphi(x-t,y-t) + \left[A(t,x,y,\varepsilon) - \alpha\right]*$$

$$*\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q\ (s,x-t+s,y-t+s)ds. \qquad (3.3.5)$$

Складывая почленно соотношения (3.3.4) и (3.3.5), получим

$$\varepsilon(u_t + u_x + u_y) + A(t,x,y,\varepsilon)u = f(t,x,\mathrm{y},u) + \int_0^t K\left(t,s,x,y,u,\varepsilon\right)ds = e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x,y) +$$

$$+\alpha\varphi(x-t,y-t) + A(t,x,y,\varepsilon)\varphi(x-t,y-t) - \alpha\varphi(x-t,y-t) +$$

$$+\left[A(t,x,y) - E\right]\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Отсюда, учитывая (3.3.3), имеем

$$Q(t,x,y) = e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left\{ f(t,x,\mathrm{y},[*])ds + \right.$$

$$+\int_0^t K\big(t,s,x,y,[*],\varepsilon\big)ds - A(t,x,y,\varepsilon)\varphi(x-t,y-t)\big\} -$$
$$-\big[A(t,x,y,\varepsilon)-E\big]\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\beta)}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds \equiv PQ, \tag{3.3.6}$$

где [*] обозначает правую часть соотношения (3.3.3). Уравнение (3.3.6) является нелинейной системой ИУВ второго рода, относительно неизвестной функции $Q(t,x,y)$. Правую часть уравнения (3.3.6) будем понимать, как оператор PQ.

К ИУВ второго рода (3.3.6) применим принцип сжатых отображений. Определим шар $Q=\{\, Q(t,x,y): Q(t,x,y)\in C\big([0,T_0]\times R\times R\big)\cap \|Q(t,x,y)\|\le h\,\}$.

Отметим, что значения величин $T_0 \le T$ и h будем определять ниже.

Предположим, что

$$\Big\|\big\{ f(t,x,y,[*])ds + \int_0^t K\big(t,s,x,y,[*],\varepsilon\big)ds - A(t,x,y,\varepsilon)\varphi(x-t,y-t)\big\}\Big\| \le M.$$

Из соотношения (3.3.6) учитывая Предположения А будем иметь

$$\|PQ\| \le e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}M + (M_A+n)\frac{2}{\alpha+\beta}h\,.$$

Пусть, что α,β такие, что

$$\frac{2(M_A+n)}{\alpha+\beta} < 1\ . \tag{3.3.7}$$

Далее, пусть значения $T_0 \le T$ и h такие, что выполняется соотношение $e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}M + (M_A+n)\frac{2}{\alpha+\beta}h \le h.$ Тогда ясно, что оператор PQ шар отображает в себя $PQ: Q \to Q$.

Теперь покажем, что оператор P определенный соотношением (3.3.6) является оператором сжатия. Из (3.3.6), учитывая Предположение А, имеем

$$\|PQ_1 - PQ_2\| \le \Bigg\| e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\Bigg[f(t,x,\varphi(x-t,y-t) + e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}\int_0^t e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}Q_1(s,x-t+s,y-t+s)ds) -$$

$$
-f(t,x,\varphi(x-t,y-t)+e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}\int_0^t e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}Q_2(s,x-t+s,y-t+s)ds)\Bigg]\Bigg\|+
$$

$$
\Bigg\|e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\Bigg[\int_0^t K(t,s,x,y,\varphi(x-s,y-s)+e^{\frac{\beta s}{\varepsilon}}\int_0^s e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(s-\tau)}\frac{1}{\varepsilon}Q_1(s,x-s+\tau,y-s+\tau)d\tau)-
$$

$$
-\int_0^t K(t,s,x,y,\varphi(x-s,y-s)+e^{\frac{\beta s}{\varepsilon}}\int_0^s e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(s-\tau)}\frac{1}{\varepsilon}Q_2(s,x-s+\tau,y-s+\tau)d\tau)\Bigg]\Bigg\|+
$$

$$
+\Bigg\|[A(t)-E]\int_0^t e^{-\frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}[Q_1(s,x-t+s,y-t+s)-Q_2(s,x-t+s,y-t+s)]ds\Bigg\|\le
$$

$$
\le\frac{2(L_1+L_2T+M_A+n)}{\alpha+\beta}\|Q_1-Q_2\|. \tag{3.3.8}
$$

Пусть значения $\alpha,\beta\in R_+$ такие, что выполняется соотношение $\dfrac{2(L_1+L_2T+M_A+n)}{\alpha+\beta}<1.$ Тогда, будет выполнено и соотношение (3.3.7), поскольку $L_1,L_2\in R_+$.

Из соотношений (3.3.8), (3.3.7) будет следовать, что PQ есть оператор сжатия в шаре Q. Тогда из принципа сжимающих отображений следует, что уравнение (3.3.6) будет иметь в шаре единственное решение $Q(t,x,y)\in Q$. Подставив, таким образом, найденную функцию в соотношение (3.3.3), будем иметь решение начальной задачи (3.3.1), (3.3.2).

Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.3.1**.** Пусть имеет место Предположение А. Тогда существует значение $T_0>0$, такое, что начальная задача (3.3.1), (3.3.2) будет иметь решение

$u(t,x,y)\in\overline{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.3.3).

3.3.2. Рассмотрим начальную задачу для нелинейного ДУ в ЧП

$$
\varepsilon^3u_{txy}+\varepsilon\left(u_t+u_x+u_y\right)+A(t,x,y)u=f(t,x,y,u),\ t\in\left[0,1\right],\ (x,y)\in R\times R, \tag{3.3.9}
$$

с начальным условием (3.3.2), где функции $A(t,x,y)$, $f(t,x,y,u)$ такие же, как в пункте 3.3.1. Решение начальной задачи (3.3.9), (3.3.2) ищем в виде

$$u(t,x,y)=\varphi(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds, \tag{3.3.10}$$

где $Q(t,x,y)$ – неизвестная функция, α,β,γ - положительные постоянные, значения которых будем определять позже.

Из выражения (3.3.10) будем находить частные производные первого и второго порядка $u(t,x,y)$:

$$u_t=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu, \tag{3.3.11}$$

$$u_x=\varphi'_x(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,x,\nu)dsd\nu, \tag{3.3.12}$$

$$u_y=\varphi'_y(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,y)dsd\mu$$

$$u_{tx}=\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,x,\nu)\mathrm{d}\nu. \tag{3.3.13}$$

$$u_{txy}=e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(t,x,y).$$

Тогда из выражения (3.3.9), имея в виду (3.3.11)–(3.3.13), будем иметь

$$\varepsilon^3u_{txy}+\varepsilon\left(u_t+u_x+u_y\right)+A(t,x,y)u\equiv e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}y+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\alpha}{\varepsilon}t}Q(t,x,y)+\varepsilon\varphi'_x(x,y)+$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,x,\nu)dsd\nu+\varepsilon\varphi'_y(x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,\mu,y)dsd\mu+$$

$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu+A(t,x,y)\varphi(x,y)+A(t,x,y)\cdot$$

$$\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds=$$

$$= f\left(t,x,\varphi(x,y)+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x\int\limits_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds \right) \tag{3.3.14}$$

Из (3.3.14) имеем

$$Q(t,x,y)=e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\left[-A(t,x,y)\varphi(x,y)-\varepsilon\varphi'_x(x,y)-\varepsilon\varphi'_y(x,y)\right]+$$

$$+e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}f(t,x,y,\varphi(x,y)+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x\int\limits_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds)+$$

$$+e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}[-\int\limits_{-\infty}^x\int\limits_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,x,\nu)dsd\nu-\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,\mu,y)dsd\mu-$$

$$-A(t,x,y)\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x\int\limits_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds]\equiv P(Q). \tag{3.3.15}$$

К нелинейному ИУВ второго рода (3.3.15) будем применять принцип сжатых отображений.

Условие (C). Пусть выполнены

$$f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L\big|_u\right).$$

Предположим, что

$$\Omega=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\right)\cup\|u\|\le h\right\},$$

причем значение величины h будет определяться чуть позже.

Тогда имеем следующие оценки

$$\|PQ\|\le e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\left[\|A(t,x,y)\|\|\varphi(x,y)\|+\varepsilon\|\varphi'_x(x,y)\|\right]+$$

$$e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\left\|f(t,x,y,\varphi(x,y)+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^x\int\limits_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu)d\mu d\nu ds)\right\|+$$

$$+e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}[\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}x+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Q(s,x,\nu)\|dsd\nu+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}y}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Q(s,\mu,y)\|dsd\mu+$$

$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}t+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^2}\|Q(t,\mu,\nu)\|d\mu d\nu+\|A(t,x,y)\|\times$$

$$\times\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\mu+\frac{\gamma}{\varepsilon}\nu}\frac{1}{\varepsilon^3}\|Q(s,\mu,\nu)\|d\mu d\nu ds]\le e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}y-\frac{\beta}{\varepsilon}x-\frac{\alpha}{\varepsilon}t}\bar{M}_f+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)\times$$

$$\times\|Q\|\le\bar{M}_f+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)\|Q\|.$$

Здесь $\bar{M}_f=M_f+\|A(t,x,y)\|\|\varphi(x,y)\|+\varepsilon\|\varphi_x'(x,y)\|+\varepsilon\|\varphi_y'(x,y)\|.$

Будем выбирать значения α,β,γ и h так, чтобы

$$\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}<1,$$

$$\bar{M}_f+\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)h\le h.$$

Тогда, ясно, что оператор PQ отображает шар Ω в себя.

Далее покажем, что оператор PQ является оператором сжатия. Из соотношения (3.3.15), учитывая условие (C), имеем

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le\left(\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+M_A\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)\|Q_1-Q_2\|. \qquad (3.3.16)$$

Из соотношения (3.3.16) будем следовать, что оператор PQ есть оператор сжатия в шаре Ω. По принципу сжатых отображений будем иметь, что уравнение (3.3.15) имеет единственное решение в шаре $Q(t,x,y)\in\Omega$. Подставив, таким образом определенную функцию $Q(t,x,y)$ в соотношение (3.3.10), получим решение начальной задачи (3.3.9), (3.3.2).

ТЕОРЕМА 3.3.2. Предположим, что выполнено условие (C). Тогда существует значение $T_0>0$, такое, что задача Коши (3.3.9), (3.3.2) будет иметь единственное решение $u(t,x,y)\in\overline{C}^{(1,1,1)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.3.10).

3.4. О разрешимости задачи Коши для сингулярно-возмущенного ИДУ в ЧП третьего порядка

Рассмотрим ИДУ в ЧП третьего порядка

$$\begin{aligned}&\varepsilon^3 u_{ttx}+\alpha\varepsilon^2 u_{tx}+\beta\varepsilon^2 u_{tt}+\alpha\beta\varepsilon u_t+\left(\alpha+1\right)\varepsilon u_x+\beta\left(\alpha+1\right)u=f(t,x,u(t,x))+\\&+\int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

$(t,x)\in D,$

с заданными условиями Коши

$$u(0,x)=\varphi(x),x\in R, \tag{3.4.2}$$

$$u_t(0,x)=\psi(x),x\in R, \tag{3.4.3}$$

где $\alpha,\ \ \beta\in R_+$, $f(t,x,u)$, $K(t,x,s.u)$ - заданные непрерывные функции; $\varphi(x),\ \psi(x)$ - известные непрерывные функции.

Решение начальной задачи (3.4.1)-(3.4.3) будем искать в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds \tag{3.4.4}$$

где $c(t,x)$ - такая непрерывная функция, что имеет место

$$c(0,x)=\varphi(x),$$

$$c_t(0,x)=\psi(x),$$

$Q(t,x)$ - вновь введенная функция, которую следует определить.

Для нахождения функции $Q(t,x)$ будем подставлять соотношение (3.4.4) в уравнение (3.4.1).

Из соотношения (3.4.4) находим частную производную по t

$$\begin{aligned}u_t(t,x)=c_t-\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds+\\+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^3}\cos\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)d\rho ds\end{aligned}$$

Учитывая (3.4.4), отсюда имеем

$$u_t = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon}(u-c) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} \cos\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds. \tag{3.4.5}$$

$$u_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_t = c_{tt}(t,x) + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t,\rho) d\rho - \frac{\alpha}{\varepsilon^2}(u-c) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds =$$

$$= c_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t,\rho) d\rho - \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u-s). \tag{3.4.6}$$

Отсюда, дифференцируя обе части, получим

$$u_{ttx} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_{tx} = c_{ttx} + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_{tx} + \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t,x) -$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\left[u_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_t + \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u-c) - c_{tt} - \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t\right] - \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u_x - c_x). \tag{3.4.7}$$

Умножая обе части (3.4.7) на ε^3, имеем

$$\varepsilon^3 u_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 u_{tx} + \beta\varepsilon^2 u_{tt} + \alpha\beta\varepsilon u_t + (\alpha+1)\varepsilon u_x + \beta(\alpha+1)u =$$

$$= \varepsilon^3 c_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 c_{tx} + \beta\varepsilon^2 c_{tt} + \alpha\beta\varepsilon c_t + (\alpha+1)\varepsilon c_x + \beta(\alpha+1)c + Q(t,x). \tag{3.4.8}$$

Заменяя левую часть уравнения (3.4.1) соотношением (3.4.8), имеем

$$\begin{aligned} Q(t,x) = {} & f\left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds\right) + \\ & + \int_0^t K(t,\tau,x, c + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(\tau-s) Q(s,\rho) d\rho ds) d\tau - H(t,\varepsilon,c) \equiv AQ, \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

где

$$H(t,\varepsilon,c) \equiv \varepsilon^3 c_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 c_{tx} + \beta\varepsilon^2 c_{tt} + \alpha\beta\varepsilon\, c_t + (\alpha+1)\varepsilon\, c_x + \beta(\alpha+1)c. \tag{3.4.10}$$

К нелинейному ИУВ второго рода (3.4.9) применим принцип сжатых отображений.

Предположим, что выполнены:

1) функция $H(t,\varepsilon,c)$ в множестве *D:*

$\|H(t,\varepsilon,c)\| \le M_0 = const$;

2) функция $f(t,x,u)$ в области $D \times R$

$$\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const; \qquad \|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const. \tag{3.4.11}$$

Кроме того, для функции $f(t,x,u)$ справедливы соотношения:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2 - u_1\|,$$

$$\|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \le L_1\|u_2 - u_1\| \tag{3.4.12}$$

где L, L_1 - константы Липшица.

Правую часть соотношения (3.4.9) будем рассматривать как оператор $A[Q]$ действующий на $Q(t,x)$.

Имеем

$$\|A[Q]\| \le \left\| f(t,x,u) + \int_0^t K(t,s,x,u(s,x))ds - H(t,\varepsilon,c) \right\| \le M ,$$

где $M = M_0 + M_1 = const$.

Учитывая (3.4.9), (3.4.11)-(3.4.12) оценим разность

$$\|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \le \left\| f\left(t,x,c + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q_1(t,s) d\rho ds \right) - \right.$$

$$\left. - f\left(t,x,c + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q_2(t,s) d\rho ds \right) \right\| +$$

$$+ \left\| \int_0^t K(t,\tau,x,c + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(\tau-s) Q_1(s,\rho) d\rho ds) d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^t K(t,\tau,x,c + \int_0^\tau \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(\tau-s) Q_2(s,\rho) d\rho ds) d\tau \right\| \le$$

$$\le \frac{L + L_1 T}{\alpha\beta} \|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \le \frac{1}{2} \|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\|,$$

где $\alpha,\ \beta$ - такие, что выполняется

$$\frac{L + L_1 T}{\alpha\beta} \le \frac{1}{2}.$$

На основании принципа сжатых отображений, отсюда следует, что нелинейное ИУВ (3.4.9) имеет единственное непрерывное решение $Q(t,x)$.

Докажем ограниченность найденных решений задачи (3.4.1)-(3.4.3). Из (3.4.4) в области D имеем неравенство

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2}\left|\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)\right| \|Q(s,\rho)\| d\rho ds \le \tilde{n}_0 + \frac{M}{\alpha\beta} = M_{00} = const.$$

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть 1) в области *D:* $c(t,x)$ - непрерывная функция, причем имеет место $c(0,x) = \varphi(x)$, $\quad c_t(0,x) = \psi(x).$

2) в соответствующих областях функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ непрерывны и ограничены

$\|f(t,x,u)\| \le M_1 = const$; $\|K(t,s,x,u)\| \le M_2 = const$

Кроме того, в этих областях функции $f(t,x,u), K(t,s,x,u)$ по аргументу u удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \le L\|u_2 - u_1\|,\ \|K(t,s,x,u_2) - K(t,s,x,u_1)\| \le L_1\|u_2 - u_1\|,$$

3) $\quad \dfrac{L + L_1 T}{\alpha\beta} \le \dfrac{1}{2}.$

Тогда в области *D* сингулярно-возмущенное нелинейное ИДУВ (3.4.1) с данными Коши (3.4.2)-(3.4.3) имеет ограниченное решение.

3.5. О разрешимости начальной задачи для ИДУВ четвертого порядка

3.5.1. Будем рассматривать ИДУВ четвертого порядка вида

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial L[u]}{\partial x} + (\alpha^2+1)L[u] = f\left(t,x,u,u_t,u_x\right) + \int_0^t K\left(t,s,u\left(s,x\right)\right)ds, \qquad (3.5.1)$$

где $L[u] = u_{tt} + 2pu_t + (p^2+1)u, t \in \left[0,T\right],\ x \in R,\ \alpha, p \in R_+$ с начальными данными

$$u(0,x) = \varphi\left(x\right), \qquad (3.5.2)$$

$$u_t(0,x) = \psi(x). \qquad (3.5.3)$$

Условие А. Предположим, что

$$f(t,x,u,u_t,u_x) \in \overline{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\right) \cap Lip\left(L_1\big|_u\right),$$

$$K(t,s,x,u) \in \overline{C}\left((0 \le s \le t \le T)\times R\times R\right) \cap Lip\left(L_2\big|_u\right), \varphi(x) \in \overline{C}^2\left(R\right), \psi(x) \in \overline{C}^2\left(R\right)$$

Решение задачи Коши (3.5.1)-(3.5.3) ищем в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+ \\ +\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu \,. \qquad (3.5.4)$$

Мы будем следовать методу, предложенному в [27,42].

Будем находить частные производные искомой функции из соотношения (3.5.4). Имеем

$$u_t(t,x)=c_t(t,x)+ \\ -p\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu+ \\ \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu= \\ =c_t(t,x)-p[u(t,x)-c(t,x)]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu.$$

Отсюда

$$u_t+pu=c_t+pc+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu.$$

Далее, имеем

$$u_{tt}+pu_t=c_{tt}+pc_t+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds- \\ -p[u_t+pu-(c_t+pc)]+(u-c).$$

Отсюда

$$L[u]\equiv u_{tt}+2pu_t+(p^2+1)u=c_{tt}+pc_t+(p^2+1)c+ \\ +\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds; \qquad (3.5.5)$$

$$L[u]=L[c]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds.$$

Кроме того

$$\frac{dL[u]}{dx}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[L[u]-L[c]]+\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)\,ds. \qquad (3.5.6)$$

Из (3.5.6) находим производные по x

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}=\frac{dL[c]}{dx}-\alpha[\frac{dL[u]}{dx}-\frac{dL[c]}{dx}]-\alpha\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\cos(x-s)Q(t,s)\,ds- \\ -\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)}\sin(x-s)Q(t,s)\,ds+Q(t,x).$$

Из последнего с учетом (3.5.5), (3.5.6) находим

$$\frac{d^2L[u]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[u]}{dx}+(\alpha^2+1)L[u]=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+ \\ +(\alpha^2+1)L[c]+Q(t,x). \tag{3.5.7}$$

Обозначим

$$H(t,x,c)=\frac{d^2L[c]}{dx^2}+2\alpha\frac{dL[c]}{dx}+(\alpha^2+1)L[c].$$

Из (3.5.1) и (3.5.7) вытекает нелинейное ИУВ второго рода относительно $Q(t,x)$ вида:

$$Q(t,x)=f(t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu,$$

$$c_t(t,x)-p[u(t,x)-c(t,x)]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\sin(x-s)\cos(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu,$$

$$c_x(t,x)-\alpha[u-c]+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)}\cos(x-s)\sin(t-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu) \tag{3.5.8}$$

$$+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)}\sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q(\nu,s)\,dsd\nu\right)d\tau+$$

$$+H(t,x,c)\equiv A[Q].$$

Для решения нелинейного ИУВ (3.5.8) дополнительно, допустим некоторые ограничения относительно функции $H(t,x,c)$:

В области D функция $H(t,x,c)$ непрерывна и ограничена

$\|H(t,x,c)\|\le M_0=const.$

Уравнение (3.5.8) будем решать с помощью принципа сжимающих отображений. Правую часть уравнения (3.5.8) рассмотрим, как оператор *A[Q]*, действующий на функцию $Q(t,x)$.

Определим множество

$$Q=\left\{u(t,x):u(t,x)\in\overline{C}^{(2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$$

Величины T, h определяются позже.

Из уравнения (3.5.8) имеем $\|AQ\|\le M_1+M_0+KT_0$,

где $M_1\equiv\max f(t,x,u,u_t,u_x,),\ M_0\equiv\max\left\|H(t,x,c)\right\|, \mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,u)$.

Если выберем T_0 и h так, чтобы

$$M_1 + M_0 + KT_0 \le h,$$

то, оператор $AQ: Q \to Q$. Теперь оценим разность

$$\left\|A[Q_1(t,x)] - A[Q_2(t,x)]\right\| \le \Big\| f(t,x,c(t,x) + \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds d\nu,$$

$$c_t(t,x) - p[u(t,x) - c(t,x)] + \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds d\nu,$$

$$c_x(t,x) - \alpha[u-c] + \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds d\nu)$$

$$+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x) + \int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)} \sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_1(\nu,s)\,ds d\nu\right)d\tau -$$

$$- f(t,x,c(t,x) + \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\sin(t-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds d\nu,$$

$$c_t(t,x) - p[u(t,x) - c(t,x)] + \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\cos(t-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds d\nu,$$

$$c_x(t,x) - \alpha[u-c] + \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \cos(x-s)\sin(t-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds d\nu)$$

$$+\int_0^t K\left(t,\tau,c(t,x) + \int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(\tau-\nu)} \sin(x-s)\sin(\tau-\nu)Q_2(\nu,s)\,ds d\nu\right)d\tau\Big\| \le$$

$$\le [\frac{3L_1}{\alpha p} + \frac{L_2}{\alpha p}]\left\|Q_1(\nu,s) - Q_2(\nu,s)\right\|.$$

Выберем $\alpha, p \in R_+$ так, что

$$\frac{3L_1}{\alpha p} + \frac{L_2}{\alpha p} < 1.$$

Отсюда следует, что нелинейное ИУВ второго рода (3.5.8) имеет единственное непрерывное решение *Q(t,x)*.

Исследуем теперь некоторые свойства решений начальной задачи (3.5.1)-(3.5.3).

В области *D* из равенства (3.5.4) вытекает неравенство:

$$\left\|u(t,x)\right\| \le \left\|c(t,x)\right\| +$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(x-s)-p(t-\nu)} \left|\sin(x-s)\sin(t-\nu)\right|\left\|Q(\nu,s)\right\| ds d\nu \le$$

$$\le C_0 + \frac{h}{\alpha p} = h_1 = const.$$

При проведении вышеприведенной оценки было учтено, что $|\sin\alpha| \le 1, |\sin\beta| \le 1.$

Точно такие же оценки можно получить и для всех частных производных, содержащихся в уравнение (3.5.1).

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 3.5.1. Предположим, что выполнены условия (A). Тогда существует $T_0 > 0$, такое, что начальная задача (3.5.1)-(3.5.2) будет иметь решение $u(t,x) \in \bar{C}^{(2,2)}([0,T_0]\times R)$, которое имеет интегральное представление в виде (3.5.4). Кроме того все частные производные, содержащие в уравнение (3.5.1), равномерно ограничены.

3.5.2. Пусть имеем задачу Коши для ИДУ в ЧП

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial y \partial t} + \gamma \frac{\partial L[u]}{\partial t} + \frac{\partial L[u]}{\partial y} + \gamma L[u] = f\left(t,x,y,u\left(t,x,y\right)\right) + \int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds, \qquad (3.5.9)$$

где $L[u] = u_{xx} + 2\beta u_x + (1+\beta^2)u, t \in [0,T], \ x,y \in R, \ \beta,\gamma \in R_+,$

с начальным условием

$$u(0,x,y) = \varphi\left(x,y\right). \qquad (3.5.10)$$

Предположение G. Пусть

$$f(t,x,u,u_t,u_x,u_y) \in \bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\times R\right) \cap Lip\left(L_1|_u\right),$$

$$K(t,s,x,y,u) \in \bar{C}\left((0 \le s \le t \le T)\times R\times R\times R\right) \cap Lip\left(L_2|_u\right), \varphi(x,y) \in \bar{C}^{(3,1)}\left(R\times R\right)$$

Решение задачи Коши (3.5.9)-(3.5.10) будем искать в виде

$$u\left(t,x,y\right) = c\left(t,x,y\right) + \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)} \sin(x-s) Q\left(\nu,s,\rho\right) ds d\nu d\rho. \qquad (3.5.11)$$

Далее, будем находить частные производные искомой функции из соотношения (3.5.11). Имеем

$$u_x(t,x,y)=c_x(t,x,y)-\beta(u-c)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-p(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\cos(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho,$$
$$u_x+\beta u=c_x+\beta c+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-p(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\cos(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho. \tag{3.5.12}$$

Отсюда

$$u_{xx}+\beta u_x=c_{xx}+\beta c_x+\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\gamma(y-\rho)}Q(\nu,x,\rho)d\nu d\rho-$$
$$-\beta\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\cos(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho-$$
$$\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho$$

Далее, имеем

$$u_{xx}+\beta u_x+u=c_{xx}+\beta c_x+c+\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\gamma(y-\rho)}Q(\nu,x,\rho)d\nu d\rho-$$
$$-\beta\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\cos(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho. \tag{3.5.13}$$

Умножим последнее равенства (3.5.12) на β и складывая почленно с равенством (3.5.13) имеем

$$u_{xx}+2\beta u_x+(1+\beta^2)u=c_{xx}+2\beta c_x+(1+\beta^2)c+\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\gamma(y-\rho)}Q(\nu,x,\rho)d\nu d\rho. \tag{3.5.14}$$

Введем обозначение: $L[u]=u_{xx}+2\beta u_x+(1+\beta^2)u$. Тогда (3.5.14) запишется в виде

$$L[u]=L[c]++\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\gamma(y-\rho)}Q(\nu,x,\rho)d\nu d\rho. \tag{3.5.15}$$

Из (3.5.15) находим частные производные по y

$$\frac{\partial L[u]}{\partial y}=\frac{\partial L[c]}{\partial y}+\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)}Q(\nu,x,y)d\nu-$$
$$-\gamma\int_0^t\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\gamma(y-\rho)}Q(\nu,x,\rho)d\nu d\rho.$$

Или с учетом соотношения (3.5.15) будем иметь

$$\frac{\partial L[u]}{\partial y}+\gamma L[u]=\frac{\partial L[c]}{\partial y}+\gamma L[c]+\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\nu)}Q(\nu,x,y)d\nu. \qquad (3.5.16)$$

Дифференцируя последнее уравнение по t получим

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial y\partial t}+\gamma\frac{\partial L[u]}{\partial t}=\frac{\partial^2 L[c]}{\partial y\partial t}+\gamma\frac{\partial L[c]}{\partial t}+Q(t,x,y)-\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\nu)}Q(\nu,x,y)d\nu.$$

Из последнего с учетом (3.5.16) будем находим

$$\frac{\partial^2 L[u]}{\partial y\partial t}+\gamma\frac{\partial L[u]}{\partial t}+\frac{\partial L[u]}{\partial y}+\gamma L[u]=\frac{\partial^2 L[c]}{\partial y\partial t}+\gamma\frac{\partial L[c]}{\partial t}+\frac{\partial L[c]}{\partial y}+\gamma L[c]+Q(t,x,y). \qquad (3.5.17)$$

Обозначим

$$H(t,x,y,c)=\frac{\partial^2 L[c]}{\partial y\partial t}+\gamma\frac{\partial L[c]}{\partial t}+\frac{\partial L[c]}{\partial y}+\gamma L[c].$$

Из соотношений (3.5.9) и (3.5.19) получим нелинейное ИУВ второго рода относительно функции $Q(t,x,y)$ вида:

$$\begin{aligned}Q(t,x,y)&=f(t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho)+\\&+\int_0^t K(t,s,x,\mathrm{y},c(s,x,y)+\int_0^s\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q(\nu,s,\rho)dsd\nu d\rho)ds-\\&-H(t,x,y,c)\equiv A[Q].\end{aligned} \qquad (3.5.18)$$

Для решения нелинейного ИУВ второго рода (3.5.18) дополнительно, допустим следующие ограничения относительно функции $H(t,x,y,c)$:

при всех $\{t>0,x,y\in R\}$ функция $H(t,x,y,c)$ непрерывна и ограничена

$$\|H(t,x,y,c)\|\le M_0=const.$$

Уравнение (3.5.18) будем решать применяя принцип сжатых отображений. Правая часть уравнения (3.5.18) рассматривается как оператор *A[Q]*.

Определим множество

$$Q=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\overline{C}^{(1,2,1)}\left([0,T]\times R\times R\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$$

Значения величины T, h определим чуть позже.

Тогда из соотношений (3.5.18) получим следующую оценку:

$$\left\|AQ\right\| \le M_1 + M_0 + KT_0,$$

где $\quad M_1 \equiv \max f(t,x,y,u),\ M_0 \equiv \max\left\|H\left(t,x,y,c\right)\right\|, \mathrm{K} \equiv \max \mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,y,u)$.

Определим выбор значений T_0 и h следующим образом:

$$M_1 + M_0 + KT_0 \le h,$$

Тогда ясно что, множество Q отображается в себя т.е.

$$AQ : Q \to Q.$$

Теперь оценим разность:

$$\begin{aligned}
&\left\|A[Q_1(t,x,y)] - A[Q_2(t,x,y)]\right\| \le \left\| f(t,x,y,c(t,x,y) + \right.\\
&\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q_1(\nu,s,\rho)\,d\nu ds d\rho) +\\
&+\int_0^t K\left(\tau,x,y,c(t,x,y)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(\tau-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q_1(\nu,s,\rho)\,d\nu ds d\rho\right)d\tau -\\
&-f(t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q_2(\nu,s,\rho)\,d\nu ds d\rho) -\\
&-\int_0^t K\left(\tau,x,y,c(t,x,y)+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-(\tau-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)}\sin(x-s)Q_2(\nu,s,\rho)\,d\nu ds d\rho\right)d\tau\Big\| \le\\
&\le \left[\frac{L_1}{\beta\gamma} + \frac{L_2T}{\beta\gamma}\right]\left\|Q_1(t,x,y) - Q_2(t,x,y)\right\|.
\end{aligned}$$

Выберем $\beta,\gamma \in R_+$ так, что выполнялось неравенство:

$$\frac{L_1}{\beta\gamma} + \frac{L_2T}{\beta\gamma} < 1.$$

Теперь к нелинейному ИУВ второго рода (3.5.18) можно применить принцип сжатых отображений. С учетом последнего соотношения из принципа сжатых отображений делаем заключение о том, что уравнение (3.5.18) будет иметь единственное непрерывное решение $Q(t,x,y)$.

Далее, изучим ограниченность найденных решений задачи Коши (3.5.9)-(3.5.10).

Для любых значений следующего множества

$$\{t > 0, x \in R, y \in R\}$$

из соотношения (3.5.11) получаем оценку:

$$\left\|u(t,x,y)\right\| \le \left\|c(t,x,y)\right\| + \int_0^t \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} e^{-(t-\nu)-\beta(x-s)-\gamma(y-\rho)} \left|\sin(x-s)\right| \left\|Q(\nu,s,\rho)\right\| ds d\nu d\rho \le$$

$$\le C_0 + \frac{h}{\beta\gamma} = h_1 = const.$$

Здесь нами было учтено, что справедливо неравенство $|\sin\alpha| \le 1.$

Точно такие же оценки можно получить и для всех частных производных, содержащихся в уравнении (3.5.9).

Итак, сформулируем полученный результат

Теорема3.5.2. Предположим, что имеет место предположения (G). Тогда существует некоторое значение $T_0 > 0$, такое, что для начальной задачи (3.5.9)-(3.5.10) найдется решение $u(t,x,y) \in \overline{C}^{(1,2,1)}\left([0,T_0] \times R \times R\right)$, которое представимо в интегральном виде (3.5.11). Все частные производные содержащие в уравнении (3.5.9) равномерно ограничены.

3.6. О периодических решениях краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра

3.6.1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра (ИУВ) второго рода

$$u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t), \qquad (3.6.1)$$

где $K(t,s)$– квадратная матричная функция; а $f(t)$ – вектор-функция, определенные и непрерывные соответственно в областях $-\infty <$ s, t $< \infty$, $-\infty < t < \infty$, причем

$$K(t+\omega, s+\omega) = K(t,s), \quad f(t+\omega) = f(t), \qquad (3.6.2)$$

вопросы существования периодических решений.

Как известно, для систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t+\omega) = A(t) \qquad (3.6.3)$$

если $x(t)$ – решение, то функция $x(t+\omega)$ тоже является ее решением. Этот факт лежит в основе методов исследования проблемы периодических решений систем вида (3.6.3). Для ИУВ (3.6.1) такое явление не имеет места, так как интегральный оператор Вольтерра не всегда отображает периодический вектор в периодический [37, с. 57], т.е. в случае ИУВ не для всякого решения $u(t)$ будет его решением и функция $u(t+\omega)$. В силу не периодичности оператора Вольтерра очень важна проблема выделения такого класса ИУВ, для которых существуют периодические решения.

ТЕОРЕМА 3.6.1**.** Наряду с $u(t)$ будет решением ИУВ (3.6.1), (3.6.2) и функция $u(t+\omega)$ в том, и только в том случае, когда для $u(t)$ выполняется тождество

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds = 0 \tag{3.6.4}$$

Доказательство. 1) Докажем сначала необходимость условия (3.6.4) теоремы. Пусть $u(t)$ - некоторое ω-периодическое решение (3.6.1), т.е.

$$u(t+\omega) = u(t). \tag{3.6.5}$$

Отсюда в силу (3.6.1) имеем

$$\int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds + f(t+\omega) = \int_0^{t} K(t,\ s)u(s)ds + f(t)\cdot$$

Далее, учитывая (3.6.2) и преобразуя интеграл с левой стороны, получим

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds + \int_{\omega}^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds = \int_0^{t} K(t,s)u(s)ds\cdot$$

Сделаем замену во втором интеграле левой стороны равенства: $s = \tau + \omega$ Находим пределы интегрирования:

При $s=\omega, \tau = 0$ и при $s = t+\omega, \tau = t$

$$\int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds + \int_0^{t} K(t+\omega,\tau+\omega)u(\tau+\omega)ds = \int_0^{t} K(t,s)u(s)ds \cdot$$

Из последнего равенства в силу (3.6.2), (3.6.5) имеем (3.6.4).

2) Докажем теперь достаточность условий (3.6.4). Предположим, что выполнено (3.6.4) и пусть *u(t)* – решение (3.6.1). Тогда в силу (3.6.2), (3.6.4) имеем

$$u(t+\omega) = \int_0^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds + f(t+\omega) =$$

$$= \int_0^{\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds + \int_{\omega}^{t+\omega} K(t+\omega,s)u(s)ds + f(t) =$$

$$= \int_0^{t} K(t+\omega,\tau+\omega)u(\tau+\omega)d\tau + f(t) = \int_0^{t} K(t,\tau)u(\tau+\omega)d\tau + f(t).$$

Последнее соотношение показывает, что функция *u(t)* также является решением уравнения (3.6.1). Что и требовалось доказать.

Замечание 1. В силу произвольности *t* в (3.6.4) в слагаемом $t+\omega$ можно опустить ω, но по соображениям дальнейших удобств мы сохраняем такую форму.

Условие (3.6.4) представляет собой неявное ограничение на ядро *K(t,s)*.

Замечание 2. Теорема остается справедливой и для ИУВ первого рода

$$\int_0^{t} K(t,s)u(s)ds = f(s) \qquad (3.6.6)$$

при выполнении условий (3.6.2).

Следуя методике, приведенной в [12], покажем справедливость замечания 2. Пусть *u(t)* – некоторое периодическое решение (3.6.6). Известно, что для любого $t \geq 0$ найдется неотрицательное целое число n и величина $\theta \in [0,\omega]$, что (*) $t = \theta + n\omega, \quad n \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \omega$.

Поэтому, заменяя в полученном тождестве (3.6.6) t *на* $\theta + n\omega$ и учитывая (3.6.2), получим

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = f(\theta). \qquad (3.6.7)$$

Так как, во-первых,

$$\int_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = \left[\int_0^{n\omega} + \int_{n\omega}^{\theta+n\omega}\right] K(\theta+n\omega,s)u(s)ds =$$

$$= \int_0^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds + \int_0^{\theta} K(\theta+\delta)u(\delta)d\delta.$$

где в последнем переходе второй интервал преобразован с помощью подстановки $s=\delta+n\omega$ и использованы периодичность ядра и решения; во-вторых, тождество (3.4.7) верно и при $n=0$, то

$$\int_0^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = 0, \quad \forall n \ge 1. \qquad (3.6.8)$$

В свою очередь, так как

$$\int_{\omega}^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = \int_0^{(n-1)\omega} K(\theta+(n-1)\omega,s)u(s)ds = 0, \qquad (3.6.9)$$

где сначала проведено преобразование $s=\delta+\omega$ и использовано свойство ядра $K(t,s)$ из (3.6.2), а затем учтено, что соотношение (3.6.8) в силу произвольности n верно и для $n\text{-}1$. Имеем

$$\int_0^{n\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = \left[\int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{n\omega}\right] K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = 0.$$

Отсюда, учитывая (3.6.9), имеем

$$\int_0^{\omega} K(\theta+n\omega,s)u(s)ds = 0$$

или, так как $t=\theta+n\omega$, отсюда имеем (3.6.4).

Таким образом, для существования ω–периодического решения ИУВ второго (первого) рода с периодическим ядром и свободным членом, необходимо и достаточно выполнения условия (3.6.4). Необходимость этого условия, видимо, впервые была обнаружена Г.Вахабовым [19], при исследовании интегро-дифференциальных систем. Условие (3.6.4) было использовано в [12, 19] при обосновании метода построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пример 3.6.1. Для ИУВ второго рода

$$u(t)+\int_0^t \sin s\, u(s)\,ds = \cos t + 2\sin^2 t \qquad (3.6.10)$$

выполнены все условия (3.6.2), где $\omega = 2\pi$. Уравнение (3.6.10) имеет решение $u(t) = \cos t,$ период которого $\omega = 2\pi$. Условие (3.6.4) в данном случае запишется в виде $\int_0^{2\pi} \cos s \sin s ds = 0$, и оно выполнено (ортогональность функций $sin\, t,\quad cos\, t$ *на* $[0,2\pi]$).

Пример 3.6.2. Для ИУВ первого рода

$$\int_0^t (t-s)u(s)\,ds = t - \sin t \qquad (3.6.11)$$

также выполнены условия (3.6.2), где $\omega = 2\pi$. Уравнение (3.6.11) имеет решение $u(t) = \sin t,$, период которого $\omega = 2\pi$. В силу замечания 1, для $\forall t$ проверим выполнение условия (3.6.4):

$$\int_0^{2\pi} (t-s)cos\, ds = -(t-s)sin\, s\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} sin\, s\, ds = cos\, s\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

II. Рассмотрим векторно-матричное нелинейное ИУВ с периодическими коэффициентами

$$u(t)=\int_0^t K(t,s)u(s)ds+F(t,u), t\in(-\infty,\infty), \qquad (3.6.12)$$

где $K(t,s)$ непрерывная $n\times n$-матричная функция, n-мерная вектор функция $F(t,u)$ определена и непрерывна в области $t\in R, \|u\|\le U_0$, причём

$$K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s), F(t+\omega,u)=F(t,u) \qquad (3.6.13)$$

Пусть $u=u_\omega(t), t\in[0,\omega]$ - решение периодической краевой задачи $u(0)=u(\omega)$ для интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13). Обозначим $u=\tilde{u}_\omega(t)$ - периодическое продолжение $u_\omega(t)$ на всю ось. Поставим вопрос: при выполнении каких условий ω-периодическая функция $\tilde{u}_\omega(t)$ будет решением интегрального уравнения (3.6.12), (3.6.13).

Так как $\tilde{u}_\omega(t)$ есть ω-периодическое продолжение $u_\omega(t)$ справедливо соотношение

$$\tilde{u}_\omega(t)=u_\omega(t-n\omega), n\omega\le t\le(n+1)\omega, n\ge 0 \qquad (3.6.14)$$

В силу (*)(3.6.14) можно представить в виде

$$\tilde{u}_\omega(t)=\tilde{u}_\omega(\theta+n\theta)=\tilde{u}_\omega(\theta), t=\theta+n\omega, 0\le\theta\le\omega \qquad (3.6.15)$$

Имеет место [19, с.53]

Лемма. Если для $u_\omega(t)$, $t\in[0,\omega]$ и произвольного β выполнено условие

$$\int_0^\omega K(\beta+\omega,s)u_\omega(s)ds=0, \qquad (3.6.16)$$

то для $\tilde{u}_\omega(t)$ и натурального m справедливо соотношение

$$\int_0^\omega K(\beta+m\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds=0. \qquad (3.6.17)$$

Эта лемма позволяет доказать следующее предложение:

ТЕОРЕМА 3.6.2. Периодическое продолжение $\tilde{u}_\omega(t)$ решения $u_\omega(t)$ периодической краевой задачи для интегрального уравнения (3.6.12) с периодическими коэффициентами (3.6.13) будет решением того же уравнения тогда и только тогда, когда для $u_\omega(t)$ выполнено условие (3.6.16).

Необходимость. Так как $\widetilde{u}_\omega$ - решение задачи (3.6.12), (3.6.13), то справедливо тождество

$$\widetilde{u}_\omega(t)=\int_0^{t+\omega}K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds+F(t,\widetilde{u}_\omega(t)) \tag{3.6.18}$$

Откуда в силу (3.6.12), (3.6.15)

$$\int_0^{t+\omega}K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega ds=\int_0^{\omega}K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds+\int_\omega^{t+\omega}K(t+\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds=$$

$$\begin{pmatrix} s=\tau+\omega \\ ds=d\tau \\ s=\omega,\tau=0 \\ s=t+\omega,\tau=t \end{pmatrix}=\int_0^{\omega}K(t+\omega,s)u_\omega(s)ds+\int_0^{t}K(t,\tau)\widetilde{u}_\omega(s)ds, \tag{3.6.19}$$

для произвольного t имеем

$$\int_0^{\omega}K(t+\omega,s)u_\omega(s)ds=0,$$

здесь можно положить $t=\beta$.

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (3.6.16) и покажем, что $\widetilde{u}_\omega(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.6.12). Составим выражение

$$V(t)=\widetilde{u}_\omega(t)-\int_0^{t+\omega}K(t,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds-F(t,\widetilde{u}_\omega(t)) \tag{3.6.20}$$

Положим в (3.6.20) $t=\theta+n\omega,\ 0\le\theta\le\omega$ и учитывая (3.6.13), (3.6.15) имеем

$$V(t)=V(\theta+n\omega)=u_\omega(\theta)-\int_0^{\theta+n\omega}K(\theta+n\omega,s)\overline{u}_\omega(s)ds-F(\theta,u_\omega(\theta)) \tag{3.6.21}$$

Рассмотрим интегральную часть

$$\int_0^{\theta+n\omega}K(\theta+n\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds=\left(\int_0^{n\omega}+\int_{n\omega}^{\theta+n\omega}\right)K(\theta+n\omega,s)\widetilde{u}_\omega(s)ds,$$

Первое слагаемое в силу Леммы есть нуль$(m=1)$. Преобразуем второе слагаемое с помощью подстановки $s=\tau+n\omega$ и учитывая (3.6.13), (3.6.15) получим

$$\int\limits_0^{\theta+n\omega} K(\theta+n\omega,s)\tilde{u}_\omega(s)ds = K(\theta,\tau)u_\omega(\tau)d\tau, 0\le\theta\le\omega \qquad (3.6.22)$$

Преобразуем (3.6.21) с помощью (3.6.22) и учитывая, что $u_\omega(t)$ при $\theta\in[0,\omega]$ есть решение (3.6.12), имеем

$$V(t)=V(\theta+n\omega)=u_\omega(\theta)-\int\limits_0^\theta K(\theta,\tau)u_\omega(\tau)d\tau - F(\theta,u_\omega(\theta))\equiv 0, \qquad (3.6.23)$$

$0\le\theta\le\omega$

Из сравнения (3.6.20) и (3.6.23) следует, что $\tilde{u}_\omega(t)$ есть решение интегрального уравнения (3.6.12). Теорема 3.6.2 полностью доказана.

3.6.3. Далее рассмотрим квазилинейную систему ИУВ

$$u(t)=\lambda\int\limits_0^t K(t,s)u(s)ds+f(t)+\varepsilon F(t,u(t),\varepsilon) \qquad (3.6.24)$$

где $K(t,s)\in C(-\infty<s\le t<\infty)\to R^{n\times n})$, $f(t)\in C\left(R\to R^n\right), F(t,u,\varepsilon)\in C\left(R\times R^n\to R^n\right)$. Кроме того, вектор-функция $F(t,u,\varepsilon)$ аналитична по векторному u и скалярному ε аргументам при $\|u\|\le h$. Наряду со сказанным будем предполагать

$$\begin{aligned}&K(t+\omega,s+\omega)=K(t,s), f(t+\omega)=f(t),\\&F(t+\omega,u,\varepsilon)=F(t,u,\varepsilon).\end{aligned} \qquad (3.6.25)$$

В данном пункте исследуется проблема периодических решений для (3.6.24), (3.6.25).

Уравнение
$$u_0(t)=\lambda\int\limits_0^t K(t,s)u_0(s)ds+f(t), \qquad (3.6.26)$$

получающееся из (3.6.24) при $\varepsilon=0$, называется порождающим. Предположим, что для $\forall\lambda$ оно имеет ω-периодическое решение, т.е.

$$u(0)=u(\omega). \qquad (3.6.27)$$

Ставим задачу. Найти решения $u = u_\omega(t) \in C[0,\omega]$ периодической краевой задачи для (3.6.24), которые при $\varepsilon \to 0$ стремятся к решению $u_{0\omega}(t)$ периодической краевой задачи для порождающего уравнения (3.6.26), (3.6.27).

Для решения задачи предположим, что для системы (3.6.24), также выполнено условие (3.6.16).

Из аналитичности F по u следует, что она удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(t,u_1,\varepsilon) - F(t,u_2,\varepsilon)\| \le L(\varepsilon,\rho)\|u_1 - u_2\|, \|u_i\| \le \rho \le h, i = 1,2. \qquad (3.6.28)$$

Пусть $\Omega_\delta = \{u(t) \in C[0,\omega]; \|u(t)\| \le \delta\}$,

и для $u(t) \in \Omega_\delta$ определим оператор $A(u)$:

$$u = A(u), \qquad (3.6.29)$$

$$A(u) = \lambda \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t) + \varepsilon F(t,u(t),\varepsilon); \; t \in [0,\omega]. \qquad (3.6.30)$$

К операторному уравнению (3.6.29) применим принцип сжимающих отображений. Очевидно, что $Au(t) \in C[0,\omega]$, т.е. оператор A отображает $C[0,\omega]$ в $C[0,\omega]$.

Далее покажем, что для достаточно малых q и ε_1 оператор Au отображает Ω_q в Ω_q для $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1]$ и является оператором сжатия.

Из тождества

$$f(t) + \varepsilon F(t,u,\varepsilon) = \varepsilon F(t,u,\varepsilon) - \varepsilon F(t,0,\varepsilon) + f(t) + \varepsilon F(t,0,\varepsilon) \qquad (3.6.31)$$

и неравенства Липшица (3.6.28) имеем

$$\begin{gathered} \|f(t) + \varepsilon F(t,u,\varepsilon)\| \le \varepsilon L(\varepsilon,\delta)\|u\| + L_0(\varepsilon), \\ L_0(\varepsilon) \equiv \|f(t) + \varepsilon F(t,0,\varepsilon)\|, \|u\| \le \delta \le h. \end{gathered} \qquad (3.6.32)$$

Из (3.6.30), (3.6.31) получим

$$\|Au\| \le [|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta) + L_0(\varepsilon).] \qquad (3.6.33)$$

где $M = \max\limits_{0 \le s \le t \le \omega} |K(t,s)|$.

Если теперь удастся выбрать δ и $\varepsilon \in [0,\varepsilon]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} &[|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta)]\delta + L_0(\varepsilon) < \delta, \\ &|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta) < 1, \end{aligned} \qquad (3.6.34)$$

то будет $\|Au\| \le \delta,$ т.е. $A\Omega_\delta \in \Omega_\delta$, для таких ε и δ, но, полагая в левой части $\varepsilon = 0$ и учитывая (3.6.34) будем иметь

$$|\lambda| M\omega\delta + \|f\| < \delta, \qquad (3.6.35)$$

при этом должно быть $\delta \le h.$ Поэтому (3.6.35) в определенном смысле является ограничением на f и ядро $K(t,s)$.

Кроме того, оператор Au будет сжимающим в Ω_q. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} &\|A(u_1) - A(u_2)\| \le [|\lambda| M\omega + \varepsilon L(\varepsilon,\delta)]\|u_1 - u_2\|, \\ &\|u_i\| \le q, i = 1,2. \end{aligned} \qquad (3.6.36)$$

В силу (3.6.36) можем сказать, что Au – действительно оператор сжатия на Ω_δ , так как условия (3.6.34) совместны.

Поэтому в Ω_δ существует единственная неподвижная точка $u^0(t,\varepsilon)$ оператора Au. Ясно, что аналитичность функции $u^0(t,\varepsilon)$ по ε следует из аналитичности F по ε и u.

Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 3.6.3. Пусть порождающая система (3.6.26) для $\forall\lambda$ имеет периодическое решение, тогда найдутся постоянные $\delta > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что в области $\|u\| < \delta, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$ существует и притом единственное решение $u^0(t,\varepsilon)$

периодической краевой задачи (3.6.24), (3.6.27), такое, что $u^0(t,0) = u_0^0(t)$ – решение периодической краевой задачи для порождающего уравнения (3.6.26), (3.6.27).

3.7. О влиянии полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

В данном разделе рассмотрен вопрос о влиянии полюса свободного члена и ядра на решение интегрального уравнения Вольтерра (ИУВ). В работе [63] в предположении, что ядро есть частное двух целых функций, исследовано влияние особенностей ядра на решение.

Сначала рассмотрим линейное ИУВ первого рода

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), t \in [0,T], \tag{3.7.1}$$

изучим влияние полюса свободного члена $f(t)$ на решение.

Предположим, что функции $K(t,s)$ и f достаточно гладкие. Общеизвестен следующий результат. Если для всех t функция $K(t,t) \neq 0, f(0) = 0,$ то уравнение (3.7.1) имеет непрерывное решение [65].

М.И. Иманалиевым найдена структура обобщенного решения уравнения (3.7.1) при выполнении условий $K(t,t) \neq 0, f(0) \neq 0.$ Также построено обобщенное решение уравнения (3.7.1) при выполнении условий $K(t,t) \equiv 0, K_s{}'(t,t) \neq 0.$

Сначала исследуем ИУВ первого рода (3.7.1) когда свободный член имеет особенность типа полюс q-кратности в начале координат. Ясно, что $f(0) = \infty.$ При этом уравнение (3.7.1) перепишем в виде

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds = \frac{f_1(t)}{t^q}, q \geq 1 - \text{целое число,}$$

$f_1(0) \neq 0$. Умножая последнее уравнение на t и дифференцируя, полученное уравнение по t, имеем

$$t^q K(t,t)u(t) + \int_0^t \left[K(t,s) + t^q K_t'(t,s) \right] u(s)ds = f_1'. \qquad (3.7.2)$$

Предположим, что

$$K(0,0) \equiv 0. \qquad (3.7.3)$$

Тогда, ясно, что в силу гладкости функции $K(t,t)$ в малой окрестности нуля имеем $K(t,t) \neq 0$. Разделяя уравнение (3.7.2) на $K(t,t)$ и введя обозначения, имеем

$$t^q u(t) + \int_0^t N(t,s)u(s)ds = F(t), \qquad (3.7.4)$$

где

$$t^q K(t,s) = \frac{1}{K(t,t)} \left[K(t,s) + K_t'(t,s) \right], \quad F(t) = \frac{f_1'}{K(t,t)}. \qquad (3.7.5)$$

Ясно, что в силу (3.7.3)

$$N(0,0) \neq 0.$$

Уравнение (3.7.4) есть ИУВ с особой точкой. Такие уравнения привлекали внимание многих исследователей [6, 59, 88]. Также отметим, что при $q = 1$ особая точка $t \leq 0$ называется регулярной особой точкой; при $q \geq 2$ особая точка $t \leq 0$ называется иррегулярной особой точкой. Главное их отличие, аналогично как в обыкновенном дифференциальном уравнении: формальное обобщенные ряды удовлетворяющее ИУВ (3.7.4) при регулярном случае сходится в окрестности особой точки, а при иррегулярном случае вообще говоря не сходятся.

Во втором случае исследуется их асимптотическая сходимость в окрестности особой точки. Асимптотические ряды может быть построены как в смысле А. Пуанкаре, так и в смысле А.Эрдейи.

В уравнении (3.7.4) теоретически возможны два случая:

$I^0)\ F(0)=0;$ $\qquad\qquad\qquad$ $II^0)\ F(0)\neq 0,$

Отметим, что случай I^0 достаточно полно исследовался в $[5]$, где был построен и дан главный член асимптотики исчезающего решения некоторых классов нелинейных интегральных уравнений Вольтерра, в котором содержится и уравнения типа (3.7.4) ($q=1$). Случай II^0 было рассмотрено, при $q=1$, а при $q>1$ в $[6]$. Как и в $[6,39]$ используя методику предложенный в $[65]$ получена существование и структура обобщенных решений уравнения вида (3.7.4).

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 3.7.1. Пусть

1) в области $l=\{0\le s\le t\le T\}$ функция $K(t,s)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по t.

2) $K(0,0)\neq 0$, и функция $f(t)$ имеет в начале координат особенность типа полюс порядка q, т.е. $f(t)={f_1(t)}/{t^q}$, $f_1(t)\neq 0.$ Тогда интегральное уравнение (3.7.1) имеет обобщенное решение вида

$$u(t)=\alpha\delta(t)+x(t),$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, α - некоторая постоянная, а $x(t)$ определяется из уравнения

$$t^q x(t)+\int_0^t N(t,s)x(s)ds=F(t)-{N(t,0)F(0)}/{N(0,0)},$$

функции $N(t,s),F(t)$ определены по формуле (3.7.5).

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть требуется найти решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^t u(s)ds=\frac{e^t}{t}. \qquad (3.7.6)$$

Формально умножая обе части уравнения (3.7.6) на t и дифференцируя полученное уравнение, имеем

$$tu(t)+\int_0^t u(s)ds=e^t. \qquad (3.7.7)$$

В силу Теоремы 3.7.1 решения ищем в виде

$$u=\alpha\delta(t)+c(t), \qquad (3.7.8)$$

Подставляя (3.7.8) в (3.7.7), получим $\alpha=1$. Тогда

$$tx(t)+\int_0^t x(s)ds=e^t-1. \qquad (3.7.9)$$

Используя методику построения решения [5], имеем единственное решение (3.7.9) в виде

$$x(t)=\left[t^{-1}\int_0^t (e^\tau-1)d\tau\right]'=-\frac{e^t-t-1}{t^2}+\frac{e^t-1}{t}$$

Произведем проверку. Подставляя в (3.7.6) полученное решение

$$u(t)=\delta(t)+\left[\int_0^t (e^\tau-1)d\tau\right]'$$

имеем

$$\int_0^t\left[s^{-1}\int_0^t (e^\tau-1)d\tau\right]'ds=\frac{e^t}{t}-1.$$

или

$$\frac{e^t-t}{t}=\frac{e^t-t}{t}$$

Что и требовалось доказать. На первый взгляд кажется, что уравнение (3.7.6) можно решить непосредственным дифференцированием. Однако, при этом

полученная функция $u(t)=\dfrac{e^t t-e^t}{t^2}=\left(\dfrac{e^t}{t}\right)'$, не удовлетворяет исходному

уравнению (3.7.6), т.е. не может быть решением, поскольку нижний предел

интеграла $t=0$ является особой точкой функции ($\dfrac{e^t}{t}$).

Далее рассмотрим влияние особенностей ядра на решение. Предположим, что ядро имеет вид

$$K(t,s) = \frac{K_1(t,s)}{t^p s^q}, \tag{3.7.10}$$

причём рассматривается ИУВ второго рода

$$u(t) = \int_0^t \frac{K_1(t,s)}{t^{p_1} s^{p_2}} u(s)ds = f(t), \tag{3.7.11}$$

где $p_1 + p_2 \geq 1.$ Если $p_1 + p_2 < 1,$ то мы имеем уравнение со слабой особенностью. Известно, что если $p_1 = p_2 = 0,$ то ИУВ (3.7.11) имеет единственное решение.

Умножая обе части (3.7.11) на t^{p_1} и обозначая $v(t) = u(t)/t^{p_2}$ имеем

$$t^{p_1 + p_2} v(t) = \int_0^t K_1(t,s)v(s)ds + t^{p_1} f(t).$$

Такое уравнение изучалось в работах [5,59] и построены структуры решений в окрестности особой точки. Итак, и в этом случае уравнение (3.7.11) сводится к исследованию ИУВ с регулярной (иррегулярной) особой точкой. В качестве замечания следует отметить, что однородное уравнение (3.7.11) может иметь многопараметрическое семейство решений.

Пример 3.7.1. Рассмотрим ИУВ

$$u(t) = -\int_0^t \frac{\left(t^2 - 6s^2\right)}{s^3} u(s)ds$$

Обозначим $u(t)/t^3 = v(t)$, имеем

$$t^3 v(t) = -\int_0^t \left(t^2 - 6s^2\right) v(s)ds \tag{3.7.12}$$

Уравнение (3.7.12) имеет двухпараметрическое семейство решений $v(t) = c_1 t + c_2,$ или

$$u(t) = c_1 t^4 + c_2 t^3,$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Аналогичные явления могут быть в интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра (ИДУВ) с особенностью в ядре. Например, рассмотрим

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t) + \int_0^t \frac{K_1(t,s)}{t^{p_1}s^{p_2}}u(s)ds + f(t). \qquad (3.7.13)$$

Точно также умножая обе части уравнения (3.7.13) на t^{p_1} и обозначая $v(t) = {u(t)}\big/{t^{p_2}}$, имеем

$$t^{p_1+p_2}\frac{dv}{dt} = \left[A(t)t^{p_1+p_2} - p_2 t^{p_2-1}\right]v(t) + \int_0^t K_1(t,s)v(s)ds + t^{p_1}f(t) \qquad (3.7.14)$$

При $p_1 + p_2 = 1$ это уравнение было рассмотрено в работе [15] и выявлены структура решений уравнения (3.7.14) в окрестности начала координат.

В [59] рассмотрена асимптотика решений ИУВ и ИДУВ с особой точкой.

3.8. Асимптотическое поведение решений систем интегральных уравнений Вольтерра с особой точкой

Будем изучать асимптотику систем линейных ИУВ с иррегулярной особой точкой

$$t^q u(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds, \qquad (3.8.1)$$

где $q > 1$ –натуральное число, $K(t,s) - n \times n -$ матричная функция, которая является голоморфной в окрестности начало координат: $t = s = 0$. Предположим, что $\lambda_j -$ собственные значения матрицы $K(0,0)$, $j = 1..n$. Ранее были исследованы случаи, когда $\lambda_j -$ различные и $Re\,\lambda_j > 0$ в работах [8, 88]. В данном подразделе будем рассматривать случай, когда $\lambda_j, j = 1..n$ являются кратными и $Re\,\lambda_j > 0$.

Пусть S означает открытый сектор в комплексной плоскости t с вершиной в начале координат.

Под решением системы линейных ИУВ будем понимать голоморфную $n\times 1-$вектор функцию $u(t)$ в области S, которая удовлетворяет систему (3.8.1).

Будем пользоваться обозначениями, которые использованы в классической работе [18].

Находив производные первого порядка по t соотношения (3.8.1) получим ИДУВ следующего вида

$$t^q u_t'(t) = A(t)u(t) + \int_0^t K_t'(t,s)u(s)ds, \tag{3.8.2}$$

где $A(t) = K(t,t) - qt^{q-1}I, I-$ единичная матрица,

$$A(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j \,, t \to 0, t \in S. \tag{3.8.3}$$

С этого момента линейную систему ИДУВ (3.8.2) рассмотрим как исходную. При исследовании асимптотики решений линейной системы ИДУВ (3.8.2) будем использовать методы разработанные в [8, 18]. Пусть, собственные значения основной матрицы A_0 в разложении (3.8.3) распадаются на два класса $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ так, что $\lambda_j \neq \lambda_k, j \leq p, \quad k > p$.

Из курса линейной алгебры известен следующий факт: если собственные значения главной матрицы $A(t)$ подразделяется на два класса $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ которые такие, что $\lambda_j \neq \lambda_k, j \leq p, k > p$, то сама матрица $A(t)$ является подобной к блочно-диагональной матрице $diag\big(A^{11}(t), A^{22}(t)\big)$, причем в этом разложении
$A^{jj}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{jj} t^i, t \to 0$, основная матрица A_0^{11} имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{p,}$ а другая основная матрица A_0^{22}имеет собственные значения $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$. На основании этого утверждения будем иметь, что нахождение асимптотически решений (3.8.2) при $t \to 0$ преобразуется к решению системы уравнений точно такого же типа для двух блок матриц $A^{11}(t)$ и $A^{22}(t)$,

которые имеют более низкий порядок. Повторяя этот способ понижение порядка некоторое количество раз, в итоге можем получить ограниченное количество уравнений типа (3.8.2). Точнее говоря, мы получим ограниченное количество последовательностей уравнений типа (3.8.2), причем в каждом из этих уравнений основная матрица A_0^{jj} будет иметь единственное собственное значения, с соответствующей ему кратности.

Предположим, что система уравнений (3.8.2) является окончательным результатом такого понижения, и можем считать, что справедливо разложение (3.8.3), где основная матрица A_0^{jj} будет иметь единственное собственное значение, с соответствующей ему кратности.

Итак, без ограничения общности, можем считать основную матрицу нильпотентной, которое имеет единственное нулевое собственное значение соответствующей краткости. В самом деле, пусть матрица A_0^{jj} имеет единственное собственное значением λ_{rj}, тогда преобразование следующего вида:

$$u(t) = zexp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj}, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n,$$

преобразует исходное уравнение (3.8.2) в уравнение типа

$$t^q z_t' e^{\lambda r_j \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = \left(A^{jj}(t) - \lambda_{rj} I_{rj}\right) z e^{\lambda_{rj}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}} + \int_0^t \frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t} z(s) e^{\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}} ds,$$

где основным членом матрицы $A(t) - \lambda_{rj}I_{rj}$, является $A_0^{jj} - \lambda_{rj}I_{rj}$, а это нильпотентная матрица.

Также, без ограничения общности, предполагаем, что нильпотентная матрица A_0^{jj} имеет уже жорданову структуру, к этому всегда можно достичь с производя линейное преобразование с постоянными коэффициентами, иначе говоря, найдется постоянная матрица T, причем

$$T^{-1}A_0^{jj}T = J(A_0^{jj}) = J_{r_1} \oplus \dots \oplus J_{r_r}$$

где $J_{r_j} = \lambda_{rj}I_{rj} + H_{rj}, H_{rj}$ −матрица сдвига, I_{r_j} −единичная матрица, λ_{r_j} −собственные значения $A_0^{jj}, j = 1,\bar{r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n$.

Таким образом, будем считать, что A_0^{jj} является нильпотентной матрицей, обладающей жордановой формой как прямая сумма матриц сдвига H_{rj}. Кроме того, хотя бы одна из матриц сдвига H_{r_j} обладает размерностью, больше чем единица и не нулевые элементы $A_i^{jj}, i > 0$ находятся только в последних строках блоков H_{r_j}.

Применяя метод, предложенной в [18], посредством подстановки $u(t) = S(t)Z$, где $S(t)$ −диагональная матрица вида $diag(1, t^g, t^{2g}, \dots, t^{(n-1)g})$, которая зависеть от константы g. Константа g выбирается так, что в полученной системе после умножения на выбранную степень t основная матрица была отличной от A_0^{jj}, тогда система уравнений (3.8.2) преобразуется к виду

$$t^q Z'_t = B(t)Z + \int_0^t b^*(t,s)Z(s)e^{\lambda_{rj}\frac{s^{-q+1}-t^{-q+1}}{-q+1}}ds, \tag{3.8.4}$$

где $B(t) = B_1(t) \oplus \dots \oplus B_2(t),\ b^*(t,s) = b_1^*(t,s) \oplus \dots \oplus b_2^*(t,s)$,

$$B_j(t) = S_j^{-1}(t)K^{jj}(t,t)S_j(t) - [t^q S_j(t)]'_t, b_j^*(t,s) = S_j^{-1}(t)\frac{\partial K^{jj}(t,s)}{\partial t}S_j(s).$$

$$S_j(t) = diag(1, t^{g_j}, t^{2g_j}, \dots, t^{(n-1)g_j}), j = \overline{1,r}.$$

Положим в срезающем преобразовании $g_j = g_{j0}$, причем g_{j0} может быть рациональным, не обязательно целым. Тогда, в силу выбора g_{j0}, предельная матрица $\lim_{t\to 0} t^{-g_{j0}} B_j(t) = B_{j0}^*$ существует и отличается от матрицы A_0^{jj}. По специальному выбору числа g_{j0} у матрицы B_{j0}^* имеется хотя бы один ненулевой элемент, который расположен на главной диагонали или ниже ее. В верхней части этой диагонали эта матрица идентично с A_0^{jj}.

Тогда уравнение (3.8.4) примет вид:

$$t^{q-g_{j0}} Z_t' = t^{-g_{j0}} B(t) Z + t^{-g_{j0}} \int_0^t b^*(t,s) Z(s) e^{\lambda_{rj} \frac{s^{-q+1} - t^{-q+1}}{-q+1}} ds. \tag{3.8.5}$$

Обозначим $h_j = q - g_{j0}$, тогда h_j может принимать как целые, так и рациональные значения. Если $g_{j0} -$ целое число, то $h_j = q - q_{j0} < q$, то наша задача приводится к такой же задаче, но с низшим рангом т.к. метод приведения матриц к блочному виду и метод срезания Вазова понижает либо порядок системы, либо ее ранг.

Если же $g_{j0} -$ не целое число, то в работе [18] доказано, что в результате многократного повторения вышеописанного метода, будем получать уравнение типа (3.8.5), где матрица B_{j0} нильпотентна (имеет одно собственное значение нуль) и все диагональные элементы B_{j0} являются матрицами сдвига H_j. По терминологии [18] этот случай выделяется отдельно и называется типом (E). И в этом случае доказано, что в результате конечного числа повторения срезающего преобразования будем иметь систему уравнений вида (3.8.5), в котором матрица B_0 будет иметь единственный жорданов блок, т.е $j = 1$. Предположим, что имеется такая задача ($j = 1$). Далее, будем применять к ней еще раз срезающее преобразование. Если g_{10} −целое, то ранг понижается и описанный метод будем далее применять. Если g_{10} −дробное число и новая основная матрица будет иметь собственные значения, не все равные друг другу, то будем иметь задачу, которая разделяются на систем более низкого порядка. А случай, когда $g_{10} -$ дробь, а основная матрица будет иметь только одно собственное значение, исключается в силу метода срезающего преобразования: которое в силу выбора g_{10} преобразует ее в новую основную матрицу с ненулевыми элементами расположенные на главной диагонали или ниже.

Пусть $t^{-g_{j0}}\ B_j(t)$ имеет различные собственные значения, в результате конечного срезания и подобного преобразования главной матрицы B_0 к каноническому виду и g_{j0} принимает дробные значения вида $g_{j0}=\frac{c_j^*}{P_j}$. Тогда матричное решение для каждого блока порядка $r_j, j=1..r$, будем искать в виде ряда $Z_j(t)=\widehat{Z_j}(t)e^{\lambda_{r_{j-1}+l(t)}}c,$ (3.8.6)

где $\hat{Z}_j(t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\hat{Z}_{ji}t^{\frac{i}{P_j}}$

$$\Lambda_{r_{j-1}+l}(t)=\sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1}B_{r_{j-1}+li}\frac{t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q+1}}{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q+1}+B_{r_{j-1}+l}P_j(q-1)-C_j^*\,lnt,$$

$r=0, r_j=r_{j-1}+n_j, r_{r-1}+n_r=n, l=\overline{1,n_j}, j=\overline{1,r}.$

Подставляя (3.8.6) в (3.8.5), для каждого блока порядка $r_j, j=\overline{1,r}$. будем иметь

$$t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}}\left(\hat{Z}_j'(t)(t)\Lambda_{tr_{j-1}}+l(t)\right)e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}=$$

$$t^{q-\frac{b^*}{P_j}}B(t)\hat{Z}_j(t)e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}+\int_0^t t^-b(t,s)\hat{Z}_j(s)e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(S)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}}ds.$$

(3.8.7)

Заметим, что если $f(t)\sim\sum_{i=0}^{\infty}f_i t^{i/P_j}, t\to 0, t\in S,$ то справедливо

$$\int_0^t f(s)Z(s)e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(S)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1}}ds=\widetilde{P_j}(t)e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}, \quad (3.8.8)$$

$$\widetilde{P_j}(t)\sim\sum_{i=P_jq+1}^{\infty}\tilde{P}_{ji}t^{i/P_j}, t\to 0, t\in S. \quad (3.8.9)$$

Действительно, продифференцировав (3.8.8), имеем

$$f(t)Z(t)e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}=\left\{\overline{P}'_{tj(t)}+\tilde{P}_j(t)(A_{r_{j-1}+l(t)}+\lambda_{r_j}\frac{s^{-q+1}}{-q+1})_t\right\}e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)}+\lambda_{r_j}\frac{t^{-q+1}}{-q+1}}.$$

Тогда получим дифференциальное уравнение относительно $\tilde{P}_j(t)$ в виде

$$t^a f(t)Z(t) = t^a \tilde{P}'_{jt}(t) + a(t)\tilde{P}_j(t),$$

где $a(t) = \sum_{i=0}^{d-1} B_{r_{j-1}+ei} t^{\frac{i+c_j^*}{P_j}} + Bdt^{q-1} + \lambda_{r_j,} a(0) = \lambda_{r_j,} d = p_j(q-1) - C_j^*.$

Формально приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях последнего уравнения приводит к последовательному определению коэффициентов $\widetilde{P_j} n_k, k = 1,2,3, \ldots$

$$\tilde{P}_{jn_1} = \frac{C_{n_1-p_jq}}{\lambda_{r_j}},\ C_{n_1-p_jq} = \sum_{i=0}^{n_1-p_1q} f_i Z_{n_1-p_iq-i}, p_jq + 1 \le n_1 \le p_jq + C_j^*,$$

$$\tilde{P}_{jn_2} = \frac{(C_{n_2-p_jq} - T_{n_2-C_j^*})}{\lambda_{r_j}},\ T_{n_2-C_j^*} = \sum_{i=p_jq+1}^{n_2-C_j^*} \hat{P}_{r_{j-1}+cn_2-C_j^*-i}, p_jq + C_j^* + 1 \le n_2 \le p_j(2q-1), \tilde{P}_{jn_3} = (C_{n_3-p_jq} - T_{n_3-C_j^*} - \left(\frac{n_3 - p_j(q+1)}{p_j}\right) \tilde{P}_{jn_3-p_j(q-1)}) \lambda_{r_j} /, n_3 \ge p_j(2q-1) + 1. \quad (3.8.10)$$

Таким образом, (3.8.8) формально удовлетворяется рядом

$$\sum_{i=p_jq+1}^{\infty} \tilde{P}_{ji} t^{i/P_j}, P_{jP_jq+1} = f_0 Z_0 / \lambda_{rj},$$

который голоморфен в S при $|t| < t_0$ и обладает свойством (3.8.9).

Тогда на основании (3.8.8) уравнение (3.8.7) можно записать в виде

$$t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}} (\hat{Z}'_{tj} + \hat{Z}_j \Lambda'_{r_{j-1}+l(t))} e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} = t^{q-\frac{C_j^*}{P_j}} B(t) \hat{Z}_j e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}} + \tilde{P}_j(t) e^{\Lambda_{r_{j-1}+l(t)} + \lambda_{r_j} \frac{t^{-q+1}}{-q+1}}.$$

С учетом того, что $\hat{Z}_j(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \hat{Z}_{ji} t^{i/P_j}, \tilde{P}_j(t) \sim \sum_{i=p_jq+1}^{\infty} \tilde{P}_{ji} t^{i/P_j},$

и $A'_{r_{j-1}+e(t)} = \sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1} B_{r_{j+1}+ei} t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q} + B_{r_{j-1}+e} dt^{-1}, d = p_j(q-1) - C_j^*$

$$A'_{r_{j-1}+e(t)} = \sum_{i=0}^{P_j(q-1)-C_j^*-1} B_{r_{j+1}+ei} t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}-q} + B_{r_{j-1}+e} dt^{-1}, d = p_j(q-1) - C_j^*,$$

получим уравнение вида

$$t^{q-\frac{c_j^*}{P_j}-1}\left(\frac{i}{P_j}\sum_{i=1}^{\infty}\hat{Z}_{ji}t^{i/P_j}\right) =$$

$$t^{q-\frac{c_j^*}{P_j}-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}B_{r_{j-1}+ed+1+i}t^{\frac{i+j}{P_j}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\hat{Z}_{ji}t^{i/P_j}\right) + \sum_{i=p,q+1}^{\infty}P_{ji}t^{i/P_j} \tag{3.8.11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях в (3.8.11), определим все коэффициенты $\hat{Z}_{jm_k}, k = 1,2,3,4,\ldots$

$$\hat{Z}_{jm_1} = \frac{P_j}{m_1}\left\{\sum_{i=1}^{m_1} Bd + i \cdot \hat{Z}_{m_1-i}\right\}, d = p_j(q-1) - C_j^*,$$

$$1 \le m_1 \le P_j,$$

$$\hat{Z}_{jm_2} = \frac{P_j}{m_2}\left\{\sum_{i=1}^{m_2} Bd + i \cdot \hat{Z}_{m_2-i} + \frac{1}{\lambda_{r_j}}\left(\sum_{j=1}^{C_j^*} b_j^* \hat{Z}\, c_j^* - j\right)\right\},$$

$$p_j + 1 \le m_2 \le P_j + C_j^*,$$

$$\hat{Z}_{jm_3} = \frac{P_j}{m_3}\left\{\sum_{i=1}^{m_3} Bd + i \cdot \hat{Z}_{m_3-i} + \frac{1}{\lambda_{r_j}}\left(\sum_{j=1}^{P_j(2q-1)} b_j^* \hat{Z}\, p_j(q-1)j\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\lambda_{r_j}} \sum_{i=1}^{P_j(q-1)-C_j^*} P_{p_jq+i}\, B_{d-i}\right)\right\}, P_j + l_j^* + 1 \le m_3 \le P_j q, Z_{jm_4} =$$

$$= \frac{P_j}{m_4}\left\{\sum_{i=1}^{m_4} B_{d+i}\hat{Z}_{m_4-i} + \frac{1}{\lambda_{r_j}} \sum_{j=1}^{m_4-P_j} b_j^* \hat{Z}_{m_4-P_j-j}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{r_j}} \sum_{j=1}^{m_4-P_{j-C_j^*}} P_{pjq+j} B_{m_4-P_j-c_j^*-j} - \frac{m_4}{P_j} P_{m_4})\right\}, \hat{Z}_{j0} = I_{rj}, j = \overline{1,r}.$$

Тогда решение уравнения (3.8.5) окажется прямой суммой решений систем более низкого порядка $r_j, j = \overline{1,r}$, причем сама система состоит из этих уравнений. Полученное матричное решение запишем в виде:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1(t)e^{\Lambda_{r_1}(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2(t)e^{\Lambda_{r_2}(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Z}_r(t)e^{\Lambda_{r_r}(t)} \end{pmatrix} = \hat{Z}(t)e^{\Lambda(t)}c, \qquad (3.8.12)$$

где $\Lambda(t) = diag(\Lambda_{r_{j-1}+1}(t), \dots, \Lambda_{r_{j-1}+n_j}(t))$,

$$\Lambda_{r_{j-1}+l(t)} = \sum_{i=0}^{d-1} B_{r_{j-1}+li} \frac{t^{\frac{i+C_j^*}{P_j}} - q + 1}{\frac{i + C_j^*}{P_j} - q + 1} + B_{r_{j-1}+l} d^{lnt},$$

$$d = P_j(q-1) - C_j^*,$$

$$\hat{Z}(t) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \hat{Z}_i t^{i/P_j}, det\hat{Z}_0 \ne 0,$$

$$r_0 = 0, r_j = r_{j-1} + n_j, r_{r-1} + n_r = n, l = \overline{1,n_j}, j = \overline{1,r}.$$

Причем $B_{r_{j-1}+l}$ имеет различные собственные значения $\lambda^*_{r_{j-1}+l}$ в результате конечного срезания и подобного преобразования главной матрицы к каноническому виду и $A(t)$ является диагональной матрицей, где ее элементы являются более низкого порядка $r_j, j = \overline{1,r}$.

Сформулируем полученные для системы (3.8.1) в случае кратных собственных значений главной матрицы $K(0,0)$. Все преобразования, которые должны, в конечном счете привести к асимптотическому решению (3.8.1) и применяются к системам более низкого порядка, можно представить как одну замену переменных в виде

$$u(t) = S(t)Zexp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj},$$

Подставляя вместо Z в (3.8.13) матричное решение в виде (3.8.12) и комбинируя $exp\frac{t^{-q+1}}{-q+1}\lambda_{rj} \cdot c\ exp\Lambda(t)$, получим фундаментальное матричное решение уравнения (3.8.1) на случай кратных собственных значений в виде

$$u(t) = \hat{u}(t)e^{\hat{\Lambda}(t)} \cdot C,$$

где $\hat{u}(t)-$ обладает асимптотическим разложением по степеням $\hat{\Lambda}(t)-$ диагональная матрица, где диагональные элементы имеют разложение по степеням $t^{-1/P}, c-$ произвольный вектор столбец.

ТЕОРЕМА 3.8.1**.** Пусть: $K(t,s) = n \times n$-матричная функция, голоморфная в окрестности точки $t = s = 0, t \in S$, где $S-$ сектор с вершиной в начале координат, содержащий вещественную полуось, и $K(0,0)$ имеет кратные собственные значения λ_{rj} и выполняется условие $Re\lambda_{rj} > 0, j = \overline{1,r}$ и S^* достаточно узкий подсектор $S^* \subset S,\ t \to 0.$ Тогда уравнение (3.8.1) в каждом S^* имеет матричное решение типа $u(t) = \hat{u}(t)e^{\hat{\Lambda}(t)}$, где $\hat{\Lambda}(t)$ −диагональная матрица в котором диагональные элементы являются диагональными матрицами порядка $r_j, j = \overline{1,r}, \sum_{j=1}^{r} r_j = n$, имеющие разложение относительно

$t^{-1/P}, p$ –положительное целое, $\hat{u}(t)$ обладает в каждом S^* асимптотическим свойством разложения по степеням $t^{1/P}$.

3.9. Заключение по Главе 3

В этой главе найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП. Найдены достаточные условия существования периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра. Определены асимптотические и аналитические свойства решений в окрестности особой точки интегральных уравнений Вольтерра.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе рассмотрены асимптотические и аналитические методы построения решений интегральных и ИДУ в ЧП:

- Построены достаточные условия разрешимости задачи Коши и построены структуры решений новых классов ДУ в ЧП и ИДУ в ЧП.
- Построены достаточные условия разрешимости решений задачи Коши для систем ИДУ в ЧП с параметром.
- Построены достаточные условия разрешимости периодических решений краевой задачи квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра.
- Определены существенные влияния полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.
- Найдена асимптотическая структура решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Айтбаев, К.А.** Разрешимость и структура решений нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / К.А.Айтбаев. – Бишкек, 2016. – 17с.
2. **Алымкулов, К.** Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст] / К.А. Алымкулов. – Бишкек: Илим, 1992. – 140 с.
3. **Алымкулов, К.** Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач/ К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Изв. вузов. Математика. – 2016. № 12. –С.3-11.
4. **Асанов, А.** О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / М.Иманалиев, А.Асанов // Доклады АН СССР. –1989. – Т.309, № 5. –С.1052-1055.
5. **Байзаков, А.Б.** Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра с особой точкой [Текст] / А.Б. Байзаков // Изв.АН. БССР. – Сер.физ.-мат.наук. – Минск, 1984. – №1. – С. 111-112.
6. **Байзаков, А.Б.** Обобщенные решения систем интегральных уравнений Вольтерра I и II родов [Текст] / А.Б. Байзаков // Вестник КГНУ. –Сер.3. – Вып.4: Естественно-технические науки. –Бишкек, 2000. –С.99-102.
7. **Байзаков, А.Б.** Методы преобразования решений в аналитической и асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений Вольтерра [Текст]: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.Б. Байзаков. – Бишкек, 2011. – 29 с.
8. **Байзаков, А.Б.** Асимптотические разложения решений интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б. Байзаков // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. –Фрунзе: Илим, 1984. – Вып.17.
9. **Байзаков, А.Б.** Особые точки интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б. Байзаков. – Бишкек: Илим, 2007. –134 С.

10. **Байзаков, А.Б.** О решениях линейных уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью [Текст] / А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Наука, новые технологии и инновации. – Бишкек, 2015. – № 6. – С. 12-14.
11. **Байзаков, А.Б.** О разрешимости задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Международный науч. ин-т "Educatio". – 2015. – Т. 11, № 18. – С. 107-110.
12. **Боташев, А.И.** Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.И.Боташев // М.: Издательство МФТН, 1998. -88с.
13. **Бараталиев, К.Б.** Методы решения некорректных задач математической физики [Текст]: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / К.Б. Бараталиев. – Бишкек, 2015. – 25 с.
14. **Беляева, Е.В.** О некоторых решениях уравнения Вольтерра с особенностью [Текст] / Е.В. Беляева // Краевые задачи: Межвузов. сборник научных трудов. – Пермь, 1989. – С. 184-190.
15. **Бильман, Б.М.** Интегральные уравнения типа Вольтерра с произвольной неподвижной особенностью [Текст] / Б.М. Бильман, Л.И. Панов // Доклады АН ТаджССР. – 1970. – Т. 13, № 8. – С.13-16.
16. **Бухгейм, А.** Уравнения Вольтерра и обратные задачи [Текст] / А. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
17. **Быков, Я.В.** О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Я.В. Быков. – Фрунзе: Главное изд. мин-ва культуры КиргССР, 1957. – 328 с.
18. **Вазов, В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.Вазов. – Москва: Мир, 1968. – 224 с.
19. **Вахабов, Г.** Численно-аналитический метод исследования периодических систем интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Г.Вахабов // УМЖ. 1969. –№5. – С. 75-83.

20. **Вольтерра, В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вольтерра; пер. с англ. и доп. М. Керимова. – Москва: Наука, 1982. – 304 с.
21. **Грудо, Э.И.** О решениях многомерного интегрального уравнения Вольтерра в окрестности особых точек [Текст] / Э.И. Грудо // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 7. – С. 1119-1126.
22. **Грудо, Э.И.** О разложении решений многомерных интегральных уравнений Вольтерра в окрестности особых точек [Текст] / Э.И. Грудо // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т.4, № 6. – С. 1071-1080.
23. **Гурьянов, Н.Н.** К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Н.Н. Гурьянов // Исследования по интегро- дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе, 1961. – Вып.1. – С. 251-263.
24. **Джээнбаева, Г.А.** О влиянии полюса свободного члена и особенностей ядра на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева, С.А. Керимбаева // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2006. −Вып. № 1. −Сер. № 5. −С. 28-31.
25. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости начальной задачи сингулярно-возмущенной интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А. Джээнбаева // Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: инновации в науке и образовании». – Актюбинск, 2015. – С.131-138.
26. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2016. – Вып. № 6. –С. 8-11.
27. **Джээнбаева, Г.А.** Разрешимость и структура решений начальной задачи интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Наука,

новые технологии и инновации Кыргызстана. –Бишкек, 2017. – Вып. № 5, – С.100-104.

28. **Джээнбаева**, **Г.А.** О периодических решениях краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Международный научно-исследовательский журнал – Екатеринбург, 2018. – Вып.№08(74), –С.15-21. DOI: https//doi.org/10.23670/IRJ.2018.74.8.002. Импакт-фактор РИНЦ - 0,146.

29. **Джээнбаева, Г.А**. О разрешимости задачи Коши для систем нелинейных инетегро-дифференциальных уравнений в частных производных с параметром. [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Международный научно-исследовательский журнал. – Екатеринбург, 2018. – Вып. № 9 (75) сентябрь. часть.I. –С.17-24. (РИНЦ РФ). DOI:https//doi.org/10.23670/IRJ.2018.75.9.003

30. **Джээнбаева, Г.А.** О асимптотической структуре решений системы интегральных уравнений Вольтерра с особенностью [Текст] / А.Б. Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – Вып. № 9. – С.3-8.

31. **Джээнбаева, Г.А.** О разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Вестник ИМ НАН КР. – Бишкек, 2019. – С.123-128.

32. **Джээнбаева, Г.А.** О начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Г.А.Джээнбаева // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – Вып.№9. –С.9-14.

33. **Джээнбаева, Г.А.** Разрешимость задачи Коши систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева, М.М.Шаршенбеков // Междун. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и информатики». – Алматы, 2015. – С.31.

34. **Джээнбаева, Г.А.** Условия существования периодических решений краевой задачи для квазилинейных интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Международная научная конференция «II Борубаевские чтения». – Бишкек НАН КР, 2018. – С.39.
35. **Джээнбаева Г.А.** Об одном методе исследования проблемы разрешимости задачи Коши для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Б.Байзаков, Г.А.Джээнбаева // Тезисы докладов Международный научно-практической конференции «Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики». – Бишкек, 2019. – С.34.
36. **Донская, Н.В.** О достаточном условии существования решения систем интегро-дифференциальных уравнений в окрестности особой точки [Текст] / Н.В. Донская, П.С. Панков, А. Бектеналиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. – Фрунзе, 1973. – Вып. 9. – С. 220-226.
37. **Еругин**, **Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений [Текст] / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1979. – 743 с.
38. **Иванова, М.А.** Существование решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки [Текст] / М.А. Иванова // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск, 1976. – С. 230-237.
39. **Иманалиев**, М. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода [Текст] / М. Иманалиев. – Фрунзе: Илим, 1981. – 144 с.
40. **Иманалиев, М.** Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными [Текст] / М. Иманалиев. – Бишкек: Илим, 1992. – 112 с.
41. **Иманалиев, М.** Сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение второго порядка с точкой поворота [Текст] / М. Иманалиев, К. Какишов,

Ж.К. Какишов // Тезисы докл. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и мат. физики». – Алматы, 2005. – С. 94.

42. **Иманалиев, М.** О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка [Текст] / М. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К. Какишов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2007. – Вып. 36. – С. 19-28.

43. **Иманалиев, М.** О структуре решений сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2008. – Вып. 38. – С. 181-187.

44. **Иманалиев, М.** О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Поиск. Сер. естеств.-техн. наук. – Алматы, 2009. – № 1. – С. 209-213. (Науч. прил. Междунар. журнал «Высшая школа Казахстана»).

45. **Иманалиев, М.** Об одном методе решения задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, Т.М. Иманалиев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2009. – Вып. 40. – С. 3-9.

46. **Иманалиев, М.** Об одном методе решения задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Информационные технологии и мат. моделирование в науке, технике и образовании: Материалы Междунар. конф., посвящ. 70-летию акад. А. Жайнакова. Изв. Кырг. гос. техн. ун-та им. И.Раззакова. – 2011. – № 24. – С. 57-61.

47. **Иманалиев, М.** Разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / М.

Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Тезисы докл. Междунар. науч. конференции «Функциональный анализ и его приложения». – Астана, 2012. –С.135.

48. **Иманалиев, М.** Разрешимость задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с точкой поворота [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2012. – Вып. 45. – С. 5-10.

49. **Иманалиев, М.** О разрешимости задачи Коши одного класса дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Республиканская конференция с участием ученых стран СНГ "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения". – Ташкент, 2013. – С. 269.

50. **Иманалиев, М.** Разрешимость и структура решений задачи коши одного класса интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка [Текст] /М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев // Тезисы докл. II Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвящ. 20-летию образования Кыргызско-Российского (Славянского) ун-та и 100-летию основателя матем. школы в Кыргызстане проф. Я.В. Быкова. – Бишкек, 2013. – С. 91.

51. **Иманалиев, Т.М.** Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст]: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.М. Иманалиев. – Бишкек, 2000. – 128 с.

52. **Коддингтон, Э.А.** Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. –Москва: ИЛ, 1958.

53. **Колмогоров, А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Москва: Наука, 1972. – 544 с.

54. **Курманбаева, А.К.** Смешанная задача для псевдогиперболического уравнения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек, 2000. – Вып. 29. – С. 310-315.
55. **Курманбаева, А.К.** Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.К. Курманбаева. – Бишкек, 2002. – 15 с.
56. **Кыдыралиев, Т.Р.** Применение метода преобразования решений в асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Т.Р. Кыдыралиев. – Бишкек, 2019. – 18с.
57. **Локшин, А.А.** Математическая теория распространения волн в средах с памятью [Текст] / А.А. Локшин, Ю.В. Суворова. – Москва: Изд-во МГУ, 1982. – 152 с.
58. **Магницкий, Н.А.** Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерра I рода [Текст] / Н.А. Магницкий // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 1. – С. 29-32.
59. **Магницкий, Н.А.** Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем [Текст] / Н.А. Магницкий. – Москва: Наука, 1992. – 160 с.
60. **Михлин, С.Г.** Лекции по линейным интегральным уравнениям [Текст] / С.Г. Михлин. – Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.
61. **Панов, Л.И.** Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка [Текст] / Л.И.Панов // Докл. АН ТаджССР. –1967. –Т.10, №6. –С. 3-7.
62. **Рафатов, Р.Р.** К аналитической теории нелинейных операторных интегральных уравнений типа Вольтерра [Текст] / Р.Р. Рафатов // Вестник Кырг. гос. нац. ун-та. Сер. 3. – 2001. – Вып. 5. – С. 122- 125.
63. **Сретенский, Л.Н.** Memoire sur les equations de M. V. Volterra [Текст] / Л.Н. Сретенский // Математический сб. – 1931. – Т. 38. – Вып. 1/2. – С. 1-44.

64. **Территин, Х.** Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary differential equations [Текст] / Х. Территин // Contributions of Theory of Nonlinear oscillations, II. Ann. of Math. Studies, Princeton. – 1952. – Vol. 29. – P. 81-116. (Рус. пер.: Математика: сборник. – 1957. – № 1/2. – С. 29-59)/
65. **Трикоми, Д.** Интегральные уравнения [Текст] / Д. Трикоми; пер. с англ. Боярского, И.И. Данилюка. – Москва: ИЛ, 1960. – 300 с.
66. **Фалалеев, М.В.** Асимптотические представления непрерывных и обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра I-рода [Текст] / М.В. Фалалеев. – Иркутск, 1987. – 43 с. – Деп. в ВИНИТИ.
67. **Халилова, Т.Т.** Единственность и ветвление в решении задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.Т. Халилова. – Бишкек, 2013. – 24 с.
68. **Цалюк, З.Б.** Интегральные уравнения Вольтерра [Текст] / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – Москва, 1977. – Т.15. – С. 131-198.
69. **Чистяков, В.Ф.** О разрешимости интегральных уравнений типа Вольтерра IV рода [Текст] / В.Ф. Чистяков // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 698-707.
70. **Шмарда, З.О.** поведении решений одного интегро-дифференциального уравнения вблизи особой точки [Текст] / З. Шмарда // Современный анализ и его прил.: сб. науч. тр. – Киев, 1989. – С. 213-218.
71. **Щерба, А.З.** Асимптотическое разложение решения интегрального уравнения Вольтерра [Текст] / А.З. Щерба // Математический анализ. – Краснодар, 1971. – С. 85-97.
72. **Щерба, А.З.** Голоморфные решения одного класса интегральных уравнений Вольтерра [Текст] / А.З. Щерба // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10, № 11. – С. 2079-2080.
73. **Alymkulov, K.** Method of boundary layer function for constructing of the asymptotic expansion of the solution of the singularly perturbed equation of the second order, Lighthill’s type [Text] / K. Alymkulov, B. Azimov //Proceedings

of the V Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Bishkek, 2014. – P. 78-83.

74. **Alymkulov, K.** New statement of the initial Cauchy's problem for perturbed differential equations of Lighthill types [Text] / K. Alymkulov, A. Khalmatov, N. Sultanova // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum. – Bishkek, 2015. – P. 29.

75. **Angell, J.S.** Singularity perturbed Volterra integral equations [Text] / J.S. Angell, W.E. Olmstead // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1987. – Vol. 48, No.1. – P. 1-15.

76. **Asanov, A.** Regularisation, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the first kind [Text] / A. Asanov. – Utrecht, The Netherlands, Tokyo, Japan, 1998. – 272 p.

77. **Baizakov, A.B.** On a solution of Volterra equations with irregular Singularities [Text] / A.B. Baizakov, K.A. Aitbaev // Abstracts of the IV Congress of the Turkic World Mathematical Society, Baku, 1-3 July, 2011. – Baku, 2011. – P. 145.

78. **Bart, G.R.** Three Theorems of Third-kind linear integral equations [Text] / G.R. Bart // Journal Math. Anal. Appl. – 1981. – Vol. 79. – P. 48-57.

79. **Boundi, M.S.** Singular nonlinear Cauchy problems [Text] / M.S. Boundi, C. Cauloouic // Journal of differential equations. – 1970. – Vol. 22, No2. – P. 261-291.

80. **Burton, T.A.** Volterra Integral and Differential Equations [Text] / T.A. Burton. – New York, London: Academic press, 1983. – 314 p.

81. **Chambers, L.G.** The problem of eigenvalues in some singular homegeneous Volterra integral equations [Text] / L.G. Chambers // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 42, No.1. – P. 140-142.

82. **Dzheenbaeva, G.A.** On the solvability of the Cauchy problem for integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order. [Text] / A.B.Baizakov, G.A.Dzheenbaeva, K.A. Aitbaev // Тезисы докладов

Международной научной конференции “III Борубаевские чтения”. – Бишкек, 2019. – С.40.

83. **Evans, G.C.** The integral equation of the second kind of Volterra with singular kernel [Text] / G.C. Evans // Bull. Amer. Math. Soc. – 1909. – Vol. 16. – P. 130-136.

84. **Evans, G.C.** Volterra’s integral equation of the second kind with discontinuos kernel [Text] / G.C. Evans // Trans. Amer. Math. Soc. – 1910. – Vol. 11. – P. 393-413; 1911. – Vol. 12. – P. 429-472.

85. **Fenyes, T.** On the operational solution of the convolution type integral equation of the third kind [Text] / T.Fenyes // Stud. Sci. Math. Hung. – 1977, Vol. 12. – No 1/2. – P. 65-75.

86. **Guderley, K.G.** Asymptotic representatives for differential equations with a regular singular point [Text] / K.G. Guderley // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1959. –Vol .3. – P. 206-218.

87. **Horn, J.** Uber eine nicht lineare Volterrashe Integralgleichung [Text] / J. Horn //Jahresbericht d.D. Math. – Ver. – 1914. – Vol. 23. – S. 85-90.

88. **Horn, J.** Singulare Systeme linerer Volterrasher Integralgleichungen [Text] / J. Horn // Math. Zeitschr. – 1919. – Vol. 3. – S. 265-313.

89. **Imanaliev, M.** Problem of Cauchy for the singularly-perturbed systems of the integro-differential equations with the turn point [Text] / M. Imanaliev, A.B. Baizakov, T.M. Imanaliev // Repots of the third Congress of the World mathematical Society of Turkic countries. – Almaty, 2009. – Vol. 1. – P. 296-301.

90. **Lalesco, T.** Introduction a la theorie des equations integrales [Text] / T. Lalesco. – Paris, 1912. – 152 p.

91. **Sato, T.** Sur E’quation integrale [Text] / T. Sato // Journal of the math. Society of Japan. – 1953. – Vol. 5, No. 1. – P. 145-153.

92. **Sell, G.R.** The geometric theory of Volterra integral equations. A preliminary report [Text] / G.R. Sell // Proc. EQADIFF III. III Czechosl. Conf. 1972, Brno, J.E. Purkune Univ. – 1973. – P. 139-143.

93. **Takesada, T.** On the singular point of equations of Volterra type [Text] / T. Takesada // Journal of the math. Society of Japan. – 1955. – Vol. 7, No.2. – P. 123-136.

94. **Volterra, V.** Lecons sur les equations integrals et les equations integro-differentieles [Text] / V. Volterra. – Paris, 1913. – 162 p.

95. **Wasow, W.A.** Turning point problem for systems of linear differential equations [Text] / W.A Wasow // J. Math Phys Comm. Purl. Appl. Math. – 1960. – Vol. 38. – P. 257-278.

96. **Wasow, W.A.** Turning point problem for systems of linear equations I. The formal theory [Text] / W.A. Wasow // Comm. Purl. Appl. Math. – 1961. – Vol. 14. – P. 657-673.

97. **Wasow, W.A.** Turning point problem for systems of linear equations II. The analytic theory [Text] / W.A. Wasow // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – Vol. 15. – P. 173-187.