Национальная академия наук Кыргызской Республики
Институт математики

Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.19.598

На правах рукописи
УДК 515.12

Канетова Динара Эменовна

Равномерные структуры на пространствах и группах

Специальность 01.01.04 - геометрия и топология

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек - 2020

Работа выполнена на кафедре автоматизированные системы управления Жалал-Абадского государственного университета имени Б. Осмонова.

Научный руководитель: Борубаев Алтай Асылканович
доктор физико-математических наук, профессор, академик, директор Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Официальные оппоненты: Садовничий Юрий Викторович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры обшей топологии и геометрии Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Абдраимова Махабат Асанбековна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына

Ведущая организация: Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, кафедра геометрии и топологии, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.

Защита состоится 30 октября 2020 г. в 14.00 ч. на заседании диссертационного совета Д 01.19.598 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374., www.math.kg.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Национальной академии наук Кыргызской Республики, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан 28 сентября 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теория равномерных пространств является одним из основных направлений теоретико-множественной топологии, интенсивно развивающаяся в настоящее время и имеющая приложения в различных областях математики. С равномерными структурами тесно связаны структуры близости, меротопические структуры, структуры смежности. Она особенно тесно связана с топологическими структурами и между ними существует глубокая аналогия.

Исследования равномерных аналогов топологических свойств, с одной стороны, позволяет обобщить топологические результаты, а с другой стороны применить равномерные структуры для решения чисто топологических задач. Так, в работе А.А. Борубаева униформизованы некоторые важнейшие топологические свойства, выяснена равномерностная природа некоторых топологических результатов и показана естественность аппарата равномерных структур для решения некоторых чисто топологических задач. В работах Ю.М. Смирнова и Дж. Исбелла развита теория размерности равномерных пространств и дано ее приложение к теории размерности топологических пространств. В работе Е.Г. Скляренко посредством равномерных структур исследованы совершенные расширения топологических пространств.

Особые приложения равномерные структуры имеют в теории топологических групп. Здесь важную роль играют естественно определяемые в группе равномерные структуры. Многие полученные результаты в теории топологических групп связаны именно с этими структурами. Например, в доказательстве теоремы С. Какутани о метризуемости всякой топологической группы, удовлетворяющей первой аксиоме счетности, ключевую роль играет естественно определяемая в группе равномерная структура. Действительно, естественно определяемая в группе равномерная структура, приводит к тому, что счетная база единичного элемента группы, будучи разнесена по всей группе, приводит к счетной базе равномерности и, следовательно, к ее метризуемости. Также, в доказательстве теоремы А.В. Архангельского о сильной паракомпактности всякой локально компактной топологической группы, опять ключевую роль играет естественно определяемая в группе равномерная структура. Эта равномерная структура приводит к тому, что база единичного элемента группы, которая образует покрытие, состоящее из компактных множеств, приводит к равномерной локальной компактности равномерной структуры и, следовательно, к ее сильной паракомпактности.

Исследования показали, что при построении паракомпактных, сильно паракомпактных, линделёфовых и полных по Дьедонне расширений данного тихоновского пространства равномерная структура стала удобным и естественным способом. Однако при построении паракомпактных и близких к ним расширений не изученным оказались всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений.

В последнее время многие понятия и утверждения равномерной топологии были распространены со случая пространств на случай равномерно непрерывных отображений. При этом равномерное пространство понимается как простейшее равномерно непрерывное отображение этого равномерного пространства в одноточечное пространство.

Проведенные исследования выявили большие равномерные аналоги непрерывных отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения равномерной топологии пространств, в работах А.А. Борубаева, З. Фролика, Б.А. Пасынкова, А.С. Мищенко, А.А. Чекеева и других. Метод перенесения результатов с пространств на отображения является универсальным, и не простым, но позволяющий многие результаты обобщить. Поэтому задача распространения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств, на отображения до сих пор не решена полностью.

Таким образом, исследования некоторых важнейших топологических свойств при помощи равномерных структур и применения аппарата равномерных структур для решения задач теории топологических пространств, топологических групп и их отображений является актуальной.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Диссертация выполнена в рамках программы Института фундаментальных, прикладных исследований и инновационных технологий при Жалал-Абадском государственном университете: «Асимптотические компьютерные, топологические методы и технологии обучения» (2013-2019). Результаты диссертации включены в отчеты по этой программе.

Цель и задачи исследования. Установить характеристики важнейших свойств и утверждений топологических пространств, топологических групп и их отображений посредством равномерных структур.

Для достижения цели определены следующие задачи:

1. Исследовать компактность, линделёфовость, μ -компактность, μ -паракомпактность топологических пространств и топологических групп при помощи равномерных структур;
2. Построить индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширения тихоновских пространств посредством равномерных структур;
3. Исследовать локально линделёфовы и локально счетно компактные топологические группы при помощи равномерных структур;
4. Исследовать подгруппы индекса компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп;
5. Исследовать (квази)совершенные отображения и ω -отображения равномерных пространств.

Научная новизна работы. Впервые посредством равномерных структур в систематическом виде охарактеризованы важнейшие классы типа компактности и полноты тихоновских пространств, топологических групп и их непрерывных отображений. Найден индекс μ -полноты равномерных пространств. Построены все индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширения посредством равномерных структур. Доказана паракомпактность (счетная паракомпактность) локально линделёфовых (локально счетно компактных) топологических групп. Найдены характеристики подгрупп индекса компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп. Установлено сохранение важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях. Найден критерий счетно равномерно паракомпактных пространств посредством ω -отображений.

Практическая значимость полученных результатов диссертационной работы состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях теоретико-множественной топологии, в теории топологических групп, в функциональном анализе, а также при чтении специальных курсов в вузах.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Получение характеристик компактных, линделёфовых, μ -компактных, μ -паракомпактных, локально линделёфовых паракомпактных, слабо μ -полных по Дьедонне пространств посредством равномерных структур.

- Построение всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур.

- Установление индекса μ -полноты равномерных структур.

- Доказательство паракомпактности (счетно паракомпактности) локально линделёфовых (локально счетно компактных) групп.

- Установление характеристики подгрупп индекса компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп.

- Установление сохранения важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях.

- Установление критерия счетно равномерно паракомпактных пространств посредством ω -отображений.

Личный вклад соискателя. Цели и задачи исследования диссертации определены научным руководителем А.А. Борубаевым. В диссертационную работу включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация результатов исследований. Основные результаты исследования апробированы:

- на международной научной конференции «Problems of Modern Topology and their Applications» (г. Ташкент, Узбекистан, 2016, 2019);

- на I, II, III Борубаевских чтениях (г. Бишкек, 2016, 2018, 2019);

- на международной научной конференции «Topology and its Applications» (г. Нафпактос, Греция, 2018);

- на международной научной конференции «International Conference on Analysis and Applied Mathematics» (ICAAM), (г. Лефкоса, Северный Кипр, 2018);

- на международной научной конференции «International workshop Fuzzy and Rough Mathematical Structures» (FARMS), (г. Рига, Латвия, 2019);
- на международной научной конференции «III International Conference of Mathematical Sciences» (ICMS), (г. Стамбул, Турция, 2019).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1-9], приведенных в списке использованных литератур. В работах [1, 2, 4-8] полученные результаты принадлежат соискателю, а соавторам - постановка задач и обсуждение полученных результатов. Статьи [5, 7, 8] входят в базу данных Web of Science и Scopus, статьи [3, 6, 9] входят в базу данных РИНЦ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников из 84 наименований. Нумерация разделов - тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер раздела в главе, третья - на порядковый номер в разделе. Объем текста 109 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертации содержится краткий анализ основных этапов развития теоретико-множественной топологии связанной с тематикой настоящей работы. Приведены некоторые понятия и утверждения других авторов, необходимые для последующих построений. Выделены те задачи теории топологических пространств, равномерных пространств, топологических групп и их отображений, которые остались не решенными.

Во второй главе очерчены проблемные ситуации топологических и равномерных пространств, топологических групп и их отображений. В концентрированном виде заключены направления поиска, важнейшие задачи, возможности и целесообразности их решения различными методами теоретико-множественной топологии.

В третьей главе получены новые характеристики важнейших классов типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур. Исследованы локально компактные паракомпактные и родственные к ним пространства посредством равномерных структур, а также μ-полнота равномерных пространств. Построены всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений данного тихоновского пространства с помощью его равномерных структур.

Глава 3 состоит из пяти разделов. В первом разделе изучен вопрос о характеризации важнейших свойств типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

Основные результаты этой главы таковы:

ТЕОРЕМА 3.1.1. Тихоновское пространство X является μ-компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является μ-полным.

Теорема 3.1.1. является характеристикой μ -компактных пространств посредством равномерных структур.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Тихоновское пространство X является счетно компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X, U) является секвенциально полным.

Следующая теорема усиливает результаты Г. Корсона, Д. Бухаджера и Б.А. Пасынкова.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Тихоновское пространство X является лиделёфовым тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X, U) является (сильно) равномерно паракомпактным.

Как известно, существуют различные характеристики компактности тихоновских пространств. Следующая теорема дает новую характеристику компактности тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X, U) является секвенциально полным и (сильно) равномерно паракомпактным.

Следующая теорема является характеристикой μ -паракомпактных пространств при помощи универсальных равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.4. Тихоновское пространство X является μ -паракомпактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) является равномерно μ -паракомпактным, где U_X - универсальная равномерность.

Во втором разделе изучен вопрос о характеризации локально компактных паракомпактных и близких к ним пространств при помощи равномерных структур.

Равномерное пространство (X, U) называется равномерно локально компактным (соответственно равномерно локально линделёфовым, равномерно локально μ -компактным) если существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого компактно (соответственно линделёфово, μ -компактно). Ясно, что любое равномерно локально компактное пространство является равномерно локально μ -компактным, а последнее - равномерно μ -паракомпактным.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Совместимая с топологией τ равномерность U , для которой равномерное пространство (X, U) равномерно локально μ -компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X, τ) локально μ -компактно и μ -паракомпактно.

В следующих теремах при помощи универсальной равномерной структуры охарактеризуются локально компактные индекс компактности $\leq \eta$, локально компактные суперпаракомпактные и локально линделёфовы паракомпактные пространства.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Тихоновское пространство X является локально компактным и индекс компактности $\leq \eta$, т.е. $ic(X) \leq \eta$ тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит покрытие мощности $\leq \eta$, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Тихоновское пространство X является локально компактным и суперпаракомпактным тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит конечнокомпонентное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.2.4. Для того чтобы тихоновское пространство X было локально линделёфовым и паракомпактным, необходимо и достаточно чтобы его универсальная равномерность U_X содержала покрытие, состоящее из подмножеств замыкание которых линделёфово.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.3. Для того, чтобы тихоновское пространство X было локально компактным и паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы его универсальная равномерность U_X содержала покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.2.5. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально линделёфово, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально линделёфово и паракомпактно.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.7. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально компактно и паракомпактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.8. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда существует равномерность U, согласующаяся с топологией пространства X и содержащая счетное покрытие, состоящее из линделёфовых подмножеств.

Равномерное пространство (X,U) называется равномерно локально счетно компактным, если существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого счетно компактно.

Всякое равномерно локально компактное пространство является равномерно локально счетно компактным.

ТЕОРЕМА 3.2.6. Всякое равномерно локально счетно компактное пространство является счетно равномерно паракомпактным.

ТЕОРЕМА 3.2.7. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально счетно компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально счетно компактно и счетно паракомпактно.

В третьем разделе данной главы изучена μ-полнота равномерных структур.

Как известно в «природе» встречаются свойства равномерных пространств более «тонкие» нежели полнота – это H-полнота равномерных пространств. Естественно возникает задача: как определяется индекс μ-полноты равномерных пространств ?

Аналогичная задача для полных пространств исследована А.А. Борубаевым.

Равномерное пространство (X,U) называется μ -полным, если всякий фильтр Коши имеющий базу мощности $\le \mu$ сходится.

Пусть (X,U) - равномерное пространство и $H \subset U$. Равномерное пространство (X,U) называется $H-\mu$ -полным, если всякий H -фильтр Коши F , имеющий базу мощности $\le \mu$, имеет по крайней мере одну точку прикосновения.

Наименьшее кардинальное число η называется индексом μ -полноты (секвенциальной полноты) равномерного пространства (X,U) , если существует такая система $H \subset U$, что $|H| = \eta$ и (X,U) является $H-\mu$ -полным (H -секвенциально полным).

Следующая теорема определяет степень μ -полноты равномерных пространств.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Для μ -полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic_{\mu}(U) = 1$;

2) (X,U) равномерно локально μ -компактно.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic_{\aleph_0}(U) = 1$;

2) (X,U) равномерно локально счетно компактно.

Равномерное пространство (X,U) называется слабо μ -полным, если всякий максимальный фильтр Коши, имеющий базу мощности $\le \mu$, сходится в нем. Слабо $\aleph_0$ -полные пространства называются слабо секвенциально полными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.1. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное отображение. Тогда, если равномерное пространство (X,U) слабо μ -полно, то равномерное пространство (Y,V) также слабо μ -полно.

Тихоновское пространство X называется слабо μ -полным по Дьедонне, если на нем существует слабо μ -полная равномерность.

Характеристика слабо μ -полных по Дьедонне пространств посредством универсальных равномерных структур дается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.3.3. Тихоновское пространство X является слабо μ -полным по Дьедонне пространством, тогда и только тогда, когда универсальная равномерность является слабо μ -полным.

В четвертом разделе построены всех индекс компактности $\le \eta$ и суперпаракомпактных расширений посредством равномерных структур.

Пусть $(T(X),\le)$ - частично упорядоченное множество всех тихоновских расширений тихоновского пространства X . $I(X)$ - множество всех индекс компактности $\leq \eta$ расширений, $SP(X)$ - множество всех суперпаракомпактных расширений тихоновского пространства X.

Множества $I(X)$ и $SP(X)$ являются подмножествами частично упорядоченного множества $(T(X), \leq)$ и относительно отношение порядка, индуцированного из $(T(X), \leq)$, являются частично упорядоченными множествами.

Пусть (X, U) - равномерное пространство, а $\varphi(X)$ - множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X, U). Пусть $U(X)$ - множество всех равномерностей на множестве X. Две равномерности U и V называется эквивалентными, если $\varphi(U) = \varphi(V)$, и обозначается $U \sim V$. Положим $E(U) = \{V \in U(X) : U \sim V\}$. Ясно, что $E(U)$ является частично упорядоченным множеством. Нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X называется $\varphi(U)$-нормальной, если $\alpha_n \cap F \neq \varnothing$ для любых $F \in \varphi(U)$ и $n \in N$. Для любой равномерности U на множестве X множество $E(U)$ имеет наибольший элемент. Система U_φ всех $\varphi(U)$-нормальных последовательностей покрытий множества X является равномерностью на множестве X. Легко видеть, что $\varphi(U) = \varphi(U_\varphi)$ и U_φ - наибольший элемент множества $E(U)$. Наибольший элемент U_φ частично упорядоченного множества $E(U)$ называется φ-лидером равномерности U. Равномерное пространство (X, U) называется предуниверсальным, если $U = U_\varphi$.

Равномерность U называется η-предлинделёфовой (предсуперпаракомпактной) равномерности, если всякое покрытие α множества X такое, что $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi(X)$ принадлежит U, и она имеет базу, состоящую из (конечнокомпонентных покрытий) покрытий мощности $\leq \eta$.

Обозначим через $U_I(X)$ множество всех η-предлинделёфовой равномерностей тихоновского пространства X, а через $U_{SP}(X)$ - множество всех предсуперпаракомпактных равномерностей тихоновского пространства X.

Одним из основных результатов этого раздела является следующая теорема, которая показывает методику построения всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений посредством равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Для любого тихоновского пространства X следующие частично упорядоченные множества

1) $(I(X), \leq)$ и $(U_I(X), \subset)$;

2) $(SP(X), \leq)$ и $(U_{SP}(X), \subset)$

попарно изоморфны.

В следующих теоремах составляется “мостик” между частично упорядоченным множеством всех локально компактных индекс компактности $\leq \eta$ (суперпаракомпактных, сильно паракомпактных) расширений и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей, содержащих равномерное покрытие мощности $\leq \eta$ (конечнокомпонентное равномерное покрытие, звездно конечное равномерное покрытие), состоящее из предкомпактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.4.2. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и индекса компактности $\leq \eta$ расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих равномерное покрытие мощности $\leq \eta$, состоящее из предкомпактных подмножеств.

Теорема 3.4.2. является обобщением теоремы А.А. Борубаева о локально компактных линделёфовых расширениях.

ТЕОРЕМА 3.4.3. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и суперпаракомпактных расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих конечнокомпонентное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.4.4. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и сильно паракомпактных расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих звездно конечное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

В четвертой главе получена характеристика подгрупп сильно паракомпактных, суперпаракомпактных и индекс компактности $\leq \eta$ топологических групп. Исследованы локально линделёфовы и локально счетно компактные топологические группы, а также μ-полные группы. Исследованы (квази)совершенные отображения и ω-отображения равномерных пространств.

В первом разделе четвертой главы изучены равномерные структуры на топологических группах.

Следующие две теоремы характеризуют подгруппы сильно паракомпактных, суперпаракомпактных и индекс компактности $\leq \eta$ топологических групп.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой индекса компактности $\leq \eta$ топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;
2) U является η-предлинделёфовой равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ТЕОРЕМА 4.1.2. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой суперпаракомпактной топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;
2) U является предсуперпаракомпактной равномерностью;
3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ТЕОРЕМА 4.1.3. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой сильно паракомпактной топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;
2) U является сильно предпаракомпактной равномерностью;
3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

Следующая теорема устанавливает паракомпактность всякой локально линделёфовой топологической группы.

ТЕОРЕМА 4.1.4. Локально линделёфова топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является паракомпактной.

Счетная паракомпактность всякой локально счетно компактной группы установлена в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.1.5. Локально счетная компактная топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является счетно паракомпактной.

Во втором разделе изучено поведение (квази)совершенных отображений и ω -отображений равномерных пространств.

Класс совершенных отображений был введен и изучен И.А. Вайнштейном, квазисовершенные отображения К. Моритой, а ω -отображения П.С. Александровым. Как известно, класс совершенных отображений играют среди всех непрерывных отображений роль, сходную с ролью компактов среди всех топологических пространств и они используются достаточно широко. Они сохраняют важнейшие топологические свойства как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ - непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ). Будем говорить, что пара равномерных структур U на X и V на Y согласуются, если 1) $\tau_U = \tau$ и $\mu_V = \mu$; 2) $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывно отображение.

Следующая теорема распространяет на отображения такой фундаментальный результат: тихоновское пространство X компактно тогда и только тогда, когда для любой равномерности U в X, согласующейся с топологией пространства X, равномерное пространство (X,U) является полным.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) является совершенным тогда и только тогда, когда для любых пар согласованных равномерных структур U на X и V на Y, отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является полным.

На равномерных пространствах роль совершенных отображений среди всех непрерывных отображений в некоторой степени вскрывается следующей теоремой

ТЕОРЕМА 4.2.2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - совершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства сохраняются в сторону прообраза:

1) (μ)-полнота;
2) индекс (μ)-полноты $\leq\eta$;
3) равномерно локальная (μ)-компактность;
4) равномерная (μ)-полнота по Чеху;
5) равномерная R-паракомпактность;
6) сильно равномерная R-паракомпактность;
7) равномерная R-суперпаракомпактность;
8) счетная равномерная R-паракомпактность;
9) равномерная A-паракомпактность;
10) сильно равномерная A-паракомпактность;

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно квазисовершенным, если оно одновременно предкомпактно и квазисовершенно.

Роль равномерно квазисовершенных отображений среди всех равномерно непрерывных отображений в некоторой степени вскрывается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 4.2.4. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно квазисовершенное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняются как в сторону образа, так и в сторону прообраза:

1. предкомпактность;
2. τ-ограниченность;
3. слабая секвенциальная полнота;
4. счетная равномерная паракомпактность.

Равномерное пространство (X,U) называется счетно равномерно B-паракомпактным, если для любого конечно аддитивного счетного открытого покрытия λ пространства (X,U) существует последовательность $\{\alpha_n\}\subset U$ равномерных покрытий удовлетворяющая условию: для любой точки $x\in X$ найдутся номер $n\in N$ и элемент $L\in\lambda$ такие, что $\alpha(x)\subset L$ (UP).

Каждое счетно равномерно R -паракомпактное пространство является счетно равномерно B -паракомпактным.

Следующая теорема является критерием счетно равномерно паракомпактных пространств посредством ω -отображений.

ТЕОРЕМА 4.2.6. Равномерное пространство (X, U) является счетно равномерно B -паракомпактным, тогда и только тогда, для каждого конечно аддитивного счетного открытого покрытия ω пространства (X, U) существует равномерно непрерывное ω -отображение f равномерного пространства (X, U) на некоторое метризуемое равномерное пространство (Y, V).

ВЫВОДЫ

- Получены характеристики компактных, линделёфовых, μ-компактных, μ-паракомпактных, локально линделёфовых паракомпактных, слабо μ-полных по Дьедонне пространств посредством равномерных структур.
- Построены всех индекс компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур.
- Найден индекс μ-полноты равномерных структур.
- Доказаны паракомпактность локально линделёфовых и счетная паракомпактность локально счетно компактных топологических групп.
- Найдены характеристики подгрупп индекса компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп.
- Установлено сохранение важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях.
- Найден критерий счетно равномерно B-паракомпактных пространств посредством ω-отображений.

В заключении автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору, академику НАН КР Борубаеву Алтаю Асылкановичу за постановку проблем, постоянное внимание к работе и всестороннюю помощь.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертационной работы могут быть применены в теории топологическх пространств и непрерывных отображений, в теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, в теории расширений топологических пространств, в теории топологических и равномерных групп, в функциональном анализе, а также при чтении специальных курсов в вузах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Канетова, Д. Э.** Равномерная структура на линейном топологическом пространстве [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова // Вестник ЖАГУ. – 2003. – Вып. 1. – С. 60-62.
2. **Канетова, Д. Э.** Некоторые свойства наростов равномерных пространств [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова // Вестник ЖАГУ. – 2003. – Вып. 1. – С. 62-66.
3. **Канетова, Д. Э.** О μ-полноте топологических групп [Текст] / Д.Э. Канетова // Известия вузов Кыргызстана. – 2017. – Вып. 6. – С. 11-14.
4. **Канетова, Д. Э.** Об одном свойстве типа компактности равномерных пространств [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова, Н.А. Байгазиева // Вестник Института математики НАН КР. – 2018. – Вып. 1. – С. 168-177.
5. **Kanetova, D.** Characterization of some types of compactness and a construction of index compactness $\leq \tau$ extensions by means of uniform structures [Text] / B. Kanetov, D. Kanetova // AIP Conference Proceedings. “International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2018”. – Melville. – New York. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020023–1-020023–5.
6. **Канетова, Д. Э.** Характеризация некоторых свойств тихоновских пространств [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2018. – Вып. 4 (96). – С. 23-27.
7. **Kanetova, D.** Some remainders properties of uniform spaces and uniformly continuous mappings [Text] / B. Kanetov, U. Saktanov, D. Kanetova // AIP Conference Proceedings “ 3^{rd} International conference of mathematical sciences” (ICMS 2019). – AIP Conference proceedings. – 2019. – Vol. 2183. – P. 030011–1-030011–3.
8. **Kanetova, D.** On some completeness properties of uniform spaces [Text] / B. Kanetov, D. Kanetova, M. Zhanakunova // AIP Conference Proceedings “ 3^{rd} International conference of mathematical sciences” (ICMS 2019). – AIP Conference proceedings. – 2019. – Vol. – 2183. – P. 030010–1-030010–3.
9. **Канетова, Д. Э.** О полноте равномерных пространств [Текст] // Д.Э. Канетова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Спец. вып. – 2019. – С. 23-27.

Канетова Динара Эменовнанын 01.01.04 - геометрия жана топология адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн «Мейкиндиктердеги жана группалардагы бир калыптуу структуралар» деген темадагы диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр. Бир калыптуу структура, топологиялык группа, тихоновдук мейкиндиктердин кеңейүүлөрү, жеткилең чагылдыруу, квазижеткилең чагылдыруу, ω -чагылдыруу.

Изилдөөнүн объектиси. Теориялык -көптүктүк топология.

Изилдөөнүн предмети. Топологиялык мейкиндиктер, бир калыптуу мейкиндиктер, топологиялык группалар жана алардын чагылдырууары.

Изилдөөнүн максаты. Бир калыптуу структуралар аркылуу топологиялык мейкиндиктердин, топологиялык группалардын жана алардын чагылдырууларынын маанилүү касиеттеринин жана жыйынтыктарынын мүнөздөмөлөрүн тургузуу.

Изилдөөнүн усулдары жана аппаратура. Жабдуу ыкмасы, фильтрлер ыкмасы жана мейкиндиктерди жана чагылдырууларды өз-ара классификациялоо ыкмасы колдонулган.

Алынган жыйынтыктар жана алардын илимий жаңылыгы. Бир калыптуу структуралар аркылуу тхоновдук мейкиндиктердин, топологиялык группалардын жана алардын чагылдырууларынын компактуу жана толуктуулук типтеринин маанилүү касиеттери алгачкы жолу системалык түрдө мүнөздөлгөн. Бир калыптуу мейкиндиктердин μ -толуктуулук индекси табылган. Бир калыптуу структуралар аркылуу бардык индекс компакттуулугу $\leq \eta$ болгон жана суперпаракомпакттуу кеңейүүлөр тургузулган. Локалдуу линделёфтук топологиялык группалардын паракомпактуулугу жана локалдуу санактуу компактуу топологиялык группалардын санактуу паракомпактуулугу далилденген. Компактуулук индекси $\leq \eta$ болгон жана суперпаракомпактуу топологиялык группалардын камтылган группаларынын мүнөздөмөлөрү табылган. Бир калыптуу мейкиндиктердин маанилүү компактуу жана толуктуулук касиеттеринин (квази)жеткилең чагылдыруудагы сакталуулары тургузулган. Санактуу бир калыптуу мейкиндиктердин ω -чагылдыруу аркылуу критерийи табылган.

Пайдалануу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Алынган натыйжалар тихоновдук мейкиндиктердин компактуулугунун жана толуктуулугунун башка касиеттерин жана тихоновдук мейкиндиктердин түрдүү кеңейүүлөрүн бир калыптуулук структура аркылуу мүнөздөөдө жана тургузууда пайдаланылышы мумкүн.

Колдонуу аймагы. Топологиялык мейкиндиктердин жана үзгүлтүксүз чагылдыруулардын, топологиялык мейкиндиктердин кеңейүүлөрү жана топологиялык жана бир калыптуулук группалардын теориясы.

РЕЗЮМЕ

диссертации Канетовой Динары Эменовны на тему: «Равномерные структуры на пространствах и группах» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология

Ключевые слова. Равномерная структура, топологическая группа, расширения тихоновских пространств, совершенное отображение, квазисовершенное отображение, ω -отображение.

Объект исследования. Теоретико-множественная топология.

Предмет исследования. Топологические пространства, равномерные пространства, топологические группы и их отображения.

Цель работы. Установить характеристики важнейших свойств и утверждений топологических пространств, топологических групп и их отображений посредством равномерных структур.

Методы исследования и аппаратура. Использованы метод покрытий, метод фильтров и метод взаимной классификации пространств и отображений.

Полученные результаты и их новизна. Впервые посредством равномерных структур в систематическом виде охарактеризованы важнейшие свойства типа компактности и полноты тихоновских пространств, топологических групп и их непрерывных отображений. Найден индекс μ -полноты равномерных пространств. Посредством равномерных структур построены всех индекс компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений. Доказана паракомпактность локально линделёфовых топологических групп и счетная паракомпактность локально счетно компактных топологических групп. Найдены характеристики подгрупп индекс компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп. Установлено сохранение важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях. Посредством ω -отображения найден критерий счетно равномерно паракомпактных пространств.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты могут применяться для установления характеристики других типов компактности и полноты тихоновских пространств и построения различных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур.

Область применения. Теория топологических пространств и непрерывных отображений, теория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, теория расширения топологических пространств и теория топологических и равномерных групп.

SUMMARY

on the dissertation "Uniform Structures on the Spaces and Groups" by Kanetova Dinara Emenovna submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.04 - geometry and topology

Key words. Uniform structure, topological group, extensions of Tychonoff spaces, perfect mapping, quasi perfect mapping, ω -mapping.

Object of research. Set theoretical topology.

Subject of research. Topological spaces, uniform spaces, topological groups and its mappings.

Aim of research. To establish the characterizations of the most important properties and statements of topological spaces, topological groups and their mappings by means of uniform structures.

Methods of research. Coverings method, filters method and mutual classification of spaces and mappings method are used.

The scientific results and novelty. For the first time, through uniform structures in a systematic form, the most important properties types compactness and completeness of Tychonoff spaces have been characterized y means of uniform structures. The μ -completeness index of uniform spaces is found. All compactness index $\leq \eta$ and superparacompact extensions by means of uniform structures are constructed. The paracompactness of locally Lindelöf topological groups and the countable paracompactness of locally countably compact topological groups are proved. Characterizations of subgroups of compactness index $\leq \eta$, strongly paracompact and superparacompact topological groups are found. Preservation of the most important properties such as compactness and completeness under (quasi)perfect mappings. A criterion for countably uniformly paracompact spaces by means of ω -mappings is found.

Recommendations on using. The results can be used to establish the characterizations of other types of compactness and completeness of Tychonoff spaces and to construct various extensions of Tychonoff spaces by means of uniform structures.

Field of applications. Theory of topological spaces and continuous mappings, theory of uniform spaces and uniformly continuous mappings, theory of extensions of topological spaces and theory of topological and uniform groups.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТЕРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

"$\in$" – знак теоретико-множественной принадлежности.
"$\subset$" – знак теоретико-множественного включения.
"$\cap$" – знак теоретико-множественного пересечения.
$|\cdot|$ – мощность множества.
N – множество всех натуральных чисел.
$\aleph_0$ – кардинальное число.
$\{A\}$ – семейство, состоящее из множества A.
Символы $f: X \to Y$, $y = f(x)$ означают отображения множества X в множество Y.
(X, U) – равномерное пространство.
U_X – универсальная равномерность.
(X, τ) – топологическое пространство.
τ_U – топология, индуцированная равномерности U.
$H-\mu$ -полнота – тип полноты.
ω -отображение – тип отображения.
$ic(X)$ – индекс компактности.
$ic_\mu(U)$ – индекс μ -полноты.
$U_I(X)$ – множество всех η -предлинделёфовых равномерностей.
$U_{SP}(X)$ – множество всех предсуперпаракомпактных равномерностей.
$\varphi(X)$ – множество всех минимальных фильтров Коши.
$T(X)$ – множество всех тихоновских расширений.
$I(X)$ – множество всех индекс компактности $\leq \eta$ расширений.
$SP(X)$ – множество всех суперпаракомпактных расширений.
$(G, \cdot, \tau)$ – топологическая группа.
$(G, \cdot, U)$ – равномерная группа.
F – фильтр.
$\{y\}$ – одноточечное множество
$\alpha(x)$ – звезда точки x относительно семейства α.