МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА

На правах рукописи

УДК 515.12

КАНЕТОВА ДИНАРА ЭМЕНОВНА

РАВНОМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ И ГРУППАХ

(01.01.04 - геометрия и топология)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор,
академик НАН КР БОРУБАЕВ А.А.

Жалал-Абад - 2020

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

N – множество всех натуральных чисел.

“$\in$” – знак принадлежности.

“$\subset$” – знак теоретико-множественного включения.

“$\setminus$” – знак теоретико-множественной разности.

“$\cup$” – знак объединения.

“$\cap$” – знак пересечения.

$\varnothing$ – пустое множество.

“$\wedge$” – знак внутреннего пересечения.

$|\cdot|$ – мощность множества.

$\aleph_0$ – кардинальное число.

“$\cong$” – равномерная изоморфность.

“$\succ$” – знак вписанности.

“$\triangleright$” – знак звездной вписанности.

“$*\succ$” – знак сильно звездной вписанности.

$\{x : P(x)\}$ – множество элементов x, удовлетворяющих свойству “P”.

Если λ семейство подмножеств множества X, то $\cup\lambda = \cup\{L : L \in \lambda\}$ – объединение всех элементов λ.

$St(\lambda, x) = \{L \in \lambda : L \ni x\}$.

$St(\lambda, L) = \{L' \in \lambda : L \cap L' \neq \varnothing\}$

$\lambda(x) = \cup St(\lambda, x)$ – звезда точки $x \in X$ относительно семейства λ.

$\lambda(M) = \cup St(\lambda, M)$ – звезда множества $M \subset X$ относительно семейства λ.

$\lambda^{\angle} = \{\cup\lambda' : \lambda' \subset \lambda$ - конечное$\}$.

Если X – топологическое пространство, то $cl_X A$, $\overline{A}^X$ или $[A]_X$ – замыкание множества A в X.

$IntA$ или $\langle A \rangle$ – внутренность множества A в X.

$\prod$ – произведение.

Символы $f: X \to Y$, $y = f(x)$ означают отображения множества X в множество Y.

Символы $1_X : X \to X$, $1_X(x) = x$, $i: X \to X$, $i(x) = x$ означают тождественное отображение.

Если $f: X \to Y$ отображение и $A \subset X$, то $f|_A: A \to Y$ – сужение f на A множества Y.

$f(x)$ - образ точки $x \in X$, $f(A)$ – образ множества $A \subset X$.

$f^{-1}(y)$ - прообраз точки $y \in Y$, $f^{-1}(B)$ – прообраз множества $B \subset Y$.

$f^{\#}(A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$ – малый образ множества $A \subset X$.

$g \circ f : X \to Z$ – композиция отображений $f : X \to Y$ и $g: Y \to X$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ для любого $x \in X$.

(X,U) – равномерное пространство.

$w(U)$ – вес равномерности U.

U_X – универсальная равномерность.

U_p – предкомпактная равномерность.

(X,τ) – топологическое пространство.

τ_U – топология, индуцированная равномерности U.

(X,d) – метрическое пространство.

$H-\mu$-полнота – тип полноты.

ω-отображение – тип отображения.

U_f – база равномерно непрерывного отображения f.

$w(U)$ – вес равномерно непрерывного отображения f.

$ic(X)$ – индекс компактности.

$ic_\mu(U)$ – индекс μ-полноты.

$U_I(X)$ – множество всех η-предлинделёфовых равномерностей.

$U_{SP}(X)$ – множество всех предсуперпаракомпактных равномерностей.

$\varphi(X)$ – множество всех минимальных фильтров Коши.

$T(X)$ – множество всех тихоновских расширений.

$I(X)$ – множество всех индекс компактности $\leq \eta$ расширений.

$SP(X)$ – множество всех суперпаракомпактных расширений.

$(G,\cdot,\tau)$ – топологическая группа.

$(G,\cdot,U)$ – равномерная группа.

U_L , U_R , U_T - левые, правые и двусторонние равномерности.

F – фильтр.

$\{y\}$ – одноточечное множество.

$\alpha(x)$ – звезда точки x относительно семейства α .

Top – категория топологических пространств и непрерывных отображений.

$Unif$ – категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

[i] - ссылка на библиографический источник за номером i.

Нумерация всех утверждений (определения, леммы, предложения, теоремы, следствия и.т.д.) тройная: первый номер соответствует номеру главы, второй номер соответствует номеру раздела, а третий соответствует порядковому номеру в разделе. Например, ТЕОРЕМА 3.2.1. - это 1-я теорема 2-го раздела 3-й главы.

Многие обозначения и терминология взяты автором из книг: Архангельский А.В., Пономарев В.И. ([6]), Борубаев А.А. ([12]), Энгелькинг Р. ([54]).

ВВЕДЕНИЕ

Теория равномерных пространств является одним из основных направлений теоретико-множественной топологии, интенсивно развивающаяся в настоящее время и имеющая приложения в различных областях математики. С равномерными структурами тесно связаны структуры близости, меротопические структуры, структуры смежности. Она особенно тесно связана с топологическими структурами и между ними существует глубокая аналогия.

Исследования равномерных аналогов топологических свойств, с одной стороны, позволяет обобщить топологические результаты, а с другой стороны позволяет применить равномерные структуры для решения чисто топологических задач. Так, в работе А.А. Борубаева [12] униформизованы некоторые важнейшие топологические свойства, выяснена равномерностная природа некоторых топологических результатов и показана естественность аппарата равномерных структур. В работах Ю.М. Смирнова [46], [47] и Дж. Исбелла [65] развита теория размерности равномерных пространств и дано ее приложение к теории размерности топологических пространств. В работе Е.Г. Скляренко [45] посредством равномерных структур исследованы совершенные расширения топологических пространств.

Особые приложения равномерные структуры имеют в теории топологических групп. Здесь важную роль играют естественно определяемые в группе равномерные структуры. Многие полученные результаты в теории топологических групп связаны именно с этими структурами. Например, в доказательстве теоремы С. Какутани о метризуемости всякой топологической группы, удовлетворяющей первой аксиоме счетности, ключевую роль играет естественно определяемая в группе равномерная структура, называемая равномерностью. Действительно, равномерность, приводит к тому, что счетная база единичного элемента группы, будучи разнесена по всей группе, приводит к счетной базе равномерности и, следовательно, к метризуемости топологической группы. Также, в доказательстве теоремы А.В. Архангельского [5] о сильной паракомпактности всякой локально компактной топологической группы, опять ключевую роль играет естественная равномерность группы. База единичного элемента группы, образует покрытие, состоящее из компактных множеств, приводит к равномерной локальной компактности равномерной структуры и, следовательно, к ее сильной паракомпактности.

Исследования показали, что при построении паракомпактных, сильно паракомпактных, линделёфовых и полных по Дьедонне расширений данного тихоновского пространства равномерная структура стала удобным и естественным способом. Однако при построении паракомпактных и близких к ним расширений не изученным оказались всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений.

В последнее время многие понятия и утверждения равномерной топологии были распространены со случая пространств на случай равномерно непрерывных отображений. При этом равномерное пространство понимается как простейшее равномерно непрерывное отображение этого равномерного пространства в одноточечное пространство.

Проведенные исследования выявили большие равномерные аналоги непрерывных отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения равномерной топологии пространств, в работах А.А. Борубаева, З. Фролика, Б.А. Пасынкова, А.С. Мищенко, А.А. Чекеева и других. Метод перенесения результатов с пространств на отображения является универсальным, и не простым, но позволяющий многие результаты обобщить. Поэтому задача распространения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств, на отображения до сих пор не решена полностью.

Таким образом, исследования некоторых важнейших топологических свойств при помощи равномерных структур и применения аппарата равномерных структур для решения задач теории топологических пространств, топологических групп и их отображений является актуальной.

Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями, крупными научными программами (проектами), основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках программы Института фундаментальных, прикладных исследований и инновационных технологий при Жалал-Абадском государственном университете имени Б. Осмонова: «Асимптотические компьютерные, топологические методы и технологии обучения» (2013-2019). Результаты диссертации включены в отчеты по этой программе.

Цель и задачи исследования. Установить характеристики важнейших свойств и утверждений топологических пространств, топологических групп и их отображений посредством равномерных структур.

Для достижения цели определены следующие задачи:

1. Исследовать компактность, линделёфовость, μ-компактность, μ-паракомпактность топологических пространств и топологических групп при помощи равномерных структур;
2. Построить индекс компактности $\leq\eta$ и суперпаракомпактных расширения тихоновских пространств посредством равномерных структур;
3. Исследовать локально линделёфовы и локально счетно компактные топологические группы при помощи равномерных структур;
4. Исследовать подгрупп индекс компактности $\leq\eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп;
5. Исследовать (квази)совершенные отображения и ω-отображения равномерных пространств.

Научная новизна полученных результатов. Впервые посредством равномерных структур в систематическом виде охарактеризованы важнейшие классы типа компактности и полноты тихоновских пространств, топологических групп и их непрерывных отображений. Найден индекс μ-полноты равномерных пространств. Построены все индекса компактности $\leq\eta$

и суперпаракомпактных расширения посредством равномерных структур. Доказана паракомпактность (счетная паракомпактность) локально линделёфовых (локально счетно компактных) топологических групп. Найдены характеристики подгрупп индекс компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп. Установлено сохранение важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях. Найден критерий счетно равномерно паракомпактных пространств посредством ω-отображений.

Практическая значимость полученных результатов диссертационной работы состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях теоретико-множественной топологии, в теории топологических групп, в функциональном анализе, а также при чтении специальных курсов в вузах.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- Получение характеристик компактных, линделёфовых, μ-компактных, μ-паракомпактных, локально линделёфовых паракомпактных, слабо μ-полных по Дьедонне пространств посредством равномерных структур.

- Построение всех индекс компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур.

- Установление индекса μ-полноты равномерных структур.

- Доказательство паракомпактности (счетно паракомпактности) локально линделёфовых (локально счетно компактных) групп.

- Установление характеристики подгрупп индекс компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп.

- Установление сохранения важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях.

- Установление критерия счетно равномерно паракомпактных пространств посредством ω-отображений.

Личный вклад соискателя. Цели и задачи исследования диссертации определены научным руководителем А.А. Борубаевым. В диссертационную работу включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследования апробированы:

- на международной научной конференции «Problems of Modern Topology and their Applications» (г. Ташкент, Узбекистан, 2016, 2019);
- на I, II, III Борубаевских чтениях (г. Бишкек, 2016, 2018, 2019);
- на международной научной конференции «Topology and its Applications» (г. Нафпактос, Греция, 2018);
- на международной научной конференции «International Conference on Analysis and Applied Mathematics» (ICAAM), (г. Лефкоса, Северный Кипр, 2018);
- на международной научной конференции «International workshop Fuzzy and Rough Mathematical Structures» (FARMS), (г. Рига, Латвия, 2019);
- на международной научной конференции «III International Conference of Mathematical Sciences» (ICMS), (г. Стамбул, Турция, 2019).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [24-29, 67-69], приведенных в списке использованных литератур. В работах [24, 25, 27, 28, 67-69] полученные результаты принадлежат соискателю, а соавторам - постановка задач и обсуждение полученных результатов. Статьи [67, 69] входят в базу данных Web of Science и Scopus, статьи [26, 28, 29] входят в базу данных РИНЦ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников из 84 наименований. Нумерация разделов - тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер раздела в главе, третья - на порядковый номер в разделе. Объем текста 109 страниц.

Краткое содержание диссертации. В первой главе диссертации содержится краткий анализ основных этапов развития теоретико-множественной топологии связанной с тематикой настоящей работы. Приведены некоторые понятия и утверждения других авторов, необходимые для последующих построений. Выделены те задачи теории топологических пространств, равномерных пространств, топологических групп и их отображений, которые остались не решенными.

Во второй главе очерчены проблемные ситуации топологических и равномерных пространств, топологических групп и их отображений. В концентрированном виде заключены направления поиска, важнейшие задачи, возможности и целесообразности их решения различными методами теоретико-множественной топологии.

В третьей главе получены новые характеристики важнейших классов типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур. Исследованы локально компактные паракомпактные и родственные к ним пространства посредством равномерных структур, а также μ-полнота равномерных пространств. Построены всех индекса компактности $\leq\eta$ и суперпаракомпактных расширений данного тихоновского пространства с помощью его равномерных структур.

Глава 3 состоит из пяти разделов. В первом разделе изучен вопрос о характеризации важнейших свойств типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

Основные результаты этой главы таковы:

ТЕОРЕМА 3.1.1. Тихоновское пространство X является μ-компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является μ-полным.

Теорема 3.1.1. является характеристикой μ-компактных пространств посредством равномерных структур.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. Тихоновское пространство X является счетно компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным.

Следующая теорема усиливает результаты Г. Корсона [58] и Д. Бухаджера и Б.А. Пасынкова [76].

ТЕОРЕМА 3.1.2. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является (сильно) равномерно паракомпактным.

Как известно, существуют различные характеристики компактности тихоновских пространств. Следующая теорема дает новую характеристику компактности тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным и (сильно) равномерно паракомпактным.

Следующая теорема является характеристикой μ-паракомпактных пространств при помощи универсальных равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.4. Тихоновское пространство X является μ-паракомпактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) является равномерно μ-паракомпактным, где U_X - универсальная равномерность.

Во втором разделе изучен вопрос о характеризации локально компактных паракомпактных и близких к ним пространств при помощи равномерных структур.

Равномерное пространство (X,U) называется равномерно локально компактным (соответственно равномерно локально линделёфовым, равномерно локально μ-компактным) если существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого компактно (соответственно линделёфово, μ-компактно). Ясно, что любое равномерно локально компактное пространство является равномерно локально μ-компактным, а последнее - равномерно μ-паракомпактным.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально μ-компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально μ-компактно и μ-паракомпактно.

В следующих теоремах при помощи универсальной равномерной структуры охарактеризуются локально компактные индекс компактности $\leq \eta$, локально компактные суперпаракомпактные и локально линделёфовы паракомпактные пространства.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Тихоновское пространство X является локально компактным и индекс компактности $\leq \eta$, т.е. $ic(X) \leq \eta$ тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит покрытие, состоящее из компактных подмножеств мощности $\leq \eta$.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Тихоновское пространство X является локально компактным и суперпаракомпактным тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит конечнокомпонентное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.2.4. Для того чтобы тихоновское пространство X было локально линделёфовым и паракомпактным, необходимо и достаточно его универсальная равномерность U_X содержало покрытие, состоящее из подмножеств замыкание которых линделёфово.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.8. Для того, чтобы тихоновское пространство X было локально компактным и паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы его универсальная равномерность U_X содержало покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.2.5. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально линделёфово, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально линделёфово и паракомпактно.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.14. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально компактно и паракомпактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.8. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда существует равномерность U, согласующаяся с топологией пространства X и содержащая счетное покрытие, состоящее из линделёфовых подмножеств.

Равномерное пространство (X,U) называется равномерно локально счетно компактным, если существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого счетно компактно.

Всякое равномерно локально компактное пространство является равномерно локально счетно компактным.

ТЕОРЕМА 3.2.6. Всякое равномерно локально счетно компактное пространство является счетно равномерно паракомпактным.

ТЕОРЕМА 3.2.7. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально счетно компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально счетно компактно и счетно паракомпактно.

Во третьем разделе данной главы изучена μ-полнота равномерных структур.

Как известно в «природе» встречаются свойства равномерных пространств более «тонкие» нежели полнота – это H-полнота равномерных пространств. Естественно, возникает задача: как определяется индекс μ-полноты равномерных пространств?

Аналогичная задача для полных пространств исследована А.А. Борубаевым [12].

Равномерное пространство (X,U) называется μ-полным, если всякий фильтр Коши имеющий базу мощности $\leq \mu$ сходится.

Пусть (X,U) - равномерное пространство и $H \subset U$. Равномерное пространство (X,U) называется $H-\mu$-полным, если всякий H-фильтр Коши F, имеющий базу мощности $\leq \mu$, имеет по крайней мере одну точку прикосновения.

Наименьшее кардинальное число η называется индексом μ-полноты (секвенциальной полноты) равномерного пространства (X,U), если существует такая система $H \subset U$, что $|H| = \eta$ и (X,U) является $H-\mu$-полным (H-секвенциально полным).

Следующая теорема определяет степень μ-полноты равномерных пространств.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Для μ-полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic_{\mu}(U) = 1$;

2) (X,U) равномерно локально μ-компактно.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic_{\aleph_0}(U) = 1$;

2) (X,U) - равномерно локально счетно компактно.

Равномерное пространство (X,U) называется слабо μ-полным, если всякий максимальный фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$, сходится в нем. Слабо $\aleph_0$-полные пространства называются слабо секвенциально полными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.3. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное отображение. Тогда, если равномерное пространство (X,U) слабо μ-полно, то равномерное пространство (Y,V) также слабо μ-полно.

Тихоновское пространство X называется слабо μ-полным по Дьедонне, если на нем существует слабо μ-полная равномерность.

Характеристика слабо μ-полных по Дьедонне пространств посредством универсальных равномерных структур дается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.3.4. Тихоновское пространство X является слабо μ-полным по Дьедонне пространством, тогда и только тогда, когда универсальная равномерность является слабо μ-полным.

В четвертом разделе построены всех индекс компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений посредством равномерных структур.

Пусть $(T(X), \leq)$ - частично упорядоченное множество всех тихоновских расширений тихоновского пространства X. $I(X)$ - множество всех индекс компактности $\leq \eta$ расширений, $SP(X)$ - множество всех суперпаракомпактных расширений тихоновского пространства X.

Множества $I(X)$ и $SP(X)$ являются подмножествами частично упорядоченного множества $(T(X), \leq)$ и относительно отношение порядка, индуцированного из $(T(X), \leq)$, являются частично упорядоченными множествами.

Пусть (X, U)- равномерное пространство, а $\varphi(X)$ - множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X, U).

Равномерность U называется η-предлинделёфовой (предсуперпаракомпактной) равномерности, если всякое покрытие α множества X такое, что $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi(X)$ принадлежит U, и она имеет базу, состоящую из (конечнокомпонентных покрытий) покрытий мощности $\leq \eta$.

Обозначим через $U_I(X)$ - множество всех η -предлинделёфовой равномерностей тихоновского пространства X, а через $U_{SP}(X)$ - множество всех предсуперпаракомпактных равномерностей тихоновского пространства X.

Одним из основных результатов этого раздела является следующая теорема, которая показывает методику построения всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений посредством равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Для любого тихоновского пространства X следующие частично упорядоченные множества:

1) $(I(X),\leq)$ и $(U_I(X),\subset)$;

2) $(SP(X),\leq)$ и $(U_{SP}(X),\subset)$

попарно изоморфны.

В следующих теоремах составляется «мостик» между частично упорядоченным множеством всех локально компактных индекс компактности $\leq \eta$ (суперпаракомпактных, сильно паракомпактных) расширений и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей, содержащих равномерное покрытие мощности $\leq \eta$ (конечнокомпонентное равномерное покрытие, звездно конечное равномерное покрытие), состоящее из предкомпактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.4.2. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и индекса компактности $\leq \eta$ расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих равномерное покрытие мощности $\leq \eta$, состоящее из предкомпактных подмножеств.

Теорема 3.4.2. является обобщением теоремы А.А. Борубаева о локально компактных линделёфовых расширениях [12].

ТЕОРЕМА 3.4.3. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и суперпаракомпактных расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих конечнокомпонентное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.4.4. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и сильно паракомпактных расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих звездно конечное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

В четвертой главе получена характеристика подгрупп сильно паракомпактных, суперпаракомпактных и индекс компактности $\leq \eta$ топологических групп. Исследованы локально линделёфовы и локально счетно компактные топологические группы, а также μ-полные группы. Исследованы (квази)совершенные отображения и ω-отображения равномерных пространств.

В первом разделе четвертой главы изучены равномерные структуры на топологических группах.

Следующие две теоремы характеризуют подгруппы сильно паракомпактных, суперпаракомпактных и индекс компактности $\leq \eta$ топологических групп.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой индекса компактности $\leq \eta$ топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является η -предлинделёфовой равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ТЕОРЕМА 4.1.2. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой суперпаракомпактной топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является предсуперпаракомпактной равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ТЕОРЕМА 4.1.3. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой сильно паракомпактной топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является сильно предпаракомпактной равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

Следующая теорема устанавливает паракомпактность всякой локально линделёфовой топологической группы.

ТЕОРЕМА 4.1.4. Локально линделёфова топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является паракомпактной.

Счетная паракомпактность всякой локально счетно компактной группы установлена в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.1.5. Локально счетная компактная топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является счетно паракомпактной.

Во втором разделе изучено поведение (квази)совершенных отображений и ω-отображений равномерных пространств.

Класс совершенных отображений был введен и изучен И.А. Вайнштейном [20], квазисовершенные отображения К. Моритой [75], а ω-отображения П.С. Александровым [2]. Как известно, класс совершенных отображений играют среди всех непрерывных отображений роль, сходную с ролью компактов среди всех топологических пространств, и они используются достаточно широко. Они сохраняют важнейшие топологические свойства как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ - непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ). Будем говорить, что пара равномерных структур U на X и V на Y согласуются, если 1) $\tau_U = \tau$ и $\mu_V = \mu$; 2) $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение.

Следующая теорема распространяет на отображения такой фундаментальный результат: тихоновское пространство X компактно тогда и только тогда, когда для любой равномерности U в X, согласующихся с топологией пространства X, равномерное пространство (X,U) является полным.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Непрерывное отображение $f:(X,\tau) \to (Y,\mu)$ топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) является совершенным тогда и только тогда, когда для любых пар согласованных равномерных структур U на X и V на Y, отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ является полным.

На равномерных пространствах роль совершенных отображений среди всех непрерывных отображений в некоторой степени вскрывается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 4.2.2. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - совершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства сохраняются в сторону прообраза:

1) (μ)-полнота;
2) индекс (μ)-полноты $\leq \eta$;
3) равномерно локальная (μ)-компактность;
4) равномерная (μ)-полнота по Чеху;
5) равномерная R-паракомпактность;
6) сильно равномерная R-паракомпактность;
7) равномерная R-суперпаракомпактность;
8) счетная равномерная R-паракомпактность;
9) равномерная A-паракомпактность;
10) сильно равномерная A-паракомпактность;

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно квазисовершенным, если оно одновременно предкомпактно и квазисовершенно.

Роль равномерно квазисовершенных отображений среди всех равномерно непрерывных отображений в некоторой степени вскрывается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 4.2.4. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно квазисовершенное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняются как в сторону образа, так и в сторону прообраза:

1. предкомпактность;
2. τ-ограниченность;
3. слабая секвенциальная полнота;
4. счетная равномерная паракомпактность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.9. При равномерно открытых квазисовершенных отображениях счетная равномерная паракомпактность сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Равномерное пространство (X,U) называется счетно равномерно B-паракомпактным, если для любого конечно аддитивного счетного открытого покрытия λ пространства (X,U) существует последовательность $\{\alpha_n\}\subset U$ равномерных покрытий удовлетворяющая условию: для любой точки $x\in X$ найдутся номер $n\in N$ и элемент $L\in\lambda$ такие, что $\alpha(x)\subset L$ (UP).

Каждое счетно равномерно R-паракомпактное пространство является счетно равномерно B-паракомпактным.

Следующая теорема является критерием счетно равномерно паракомпактных пространств посредством ω-отображений.

ТЕОРЕМА 4.2.6. Равномерное пространство (X,U) является счетно равномерно B-паракомпактным, тогда и только тогда, для каждого конечно аддитивного счетного открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение f равномерного пространства (X,U) на некоторое метризуемое равномерное пространство (Y,V).

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУР

1.1. Важнейшие свойства типа компактности топологических пространств, равномерных пространств и топологических групп

Как известно, существуют разные подходы к определению равномерной структуры, например, на языке покрытий [12], [65], окружений диагонали [81], [35], окрестностей [22], на языке комплекта псевдометрик [63], на языке метрик над полуполями [3], на языке малых множеств [43], на языке эквивалентных направленностей [21], а также их обобщений [45], [61]. Исследования показали преимущество равномерных структур заданных покрытиями.

Пусть X - не пустое множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. [12]. Семейство U покрытий множества X называется равномерностью на X, если выполняются условия:

(Р1) Если $\alpha \in U$ и α вписано в некоторое покрытие β множества X, то $\beta \in U$;

(Р2) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in U$ существует $\alpha \in U$, которое вписано и в α_1 и в α_2;

(Р3) Для любого $\alpha \in U$ существует $\beta \in U$, сильно звездно вписанное в α;

(Р4) Для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in U$, что ни один элемент покрытия α не содержит одновременно x и y.

Пара (X,U), состоящая из множества X и равномерностью U называется равномерным пространством.

Семейство $B \subset U$ называется базой равномерности U, если для любого $\alpha \in U$ существует такое $\beta \in B$, что $\beta \succ \alpha$.

Наименьшее кардинальное число, являющееся мощности какой-либо базы равномерности U называется весом равномерности U и обозначается $\omega(X,U)$ или $\omega(U)$.

Каждая равномерность U на X порождает некоторую топологию τ на X следующим образом:

ТЕОРЕМА 1.1.1. [12]. Для любой равномерности U на X семейство $\tau_U = \{O \subset X$: для каждого $x \in O$ существует такое $\alpha \in U$, что $\alpha(x) \subset O$ $\}$ образует топологию на X, и топологическое пространство (X, τ_U) является T_1 пространством.

Пусть $f : X \to Y$ - отображение множества X в множество Y. Легко показать, что если α и β - покрытия множества X и Y соответственно, то $f(\alpha) = \{f(A) : A \in \alpha\}$ и $f^{-1}(\beta) = \{f^{-1}(B) : B \in \beta\}$ являются покрытиями множества Y и X соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. [12]. Отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) называется равномерно непрерывным, если для любого $\beta \in V$ существует такое $\alpha \in U$, что $f\alpha \succ \beta$.

Биективное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V) называется равномерным гомеоморфизмом или равномерным изоморфизмом, если отображения $f : (X, U) \to (Y, V)$ и $f^{-1} : (Y, V) \to (X, U)$ являются равномерно непрерывными.

Итак, равномерные пространства (X, U) и (Y, V) называются равномерно гомеоморфными или равномерно изоморфными, если между ними существует равномерный гомеоморфизм или равномерный изоморфизм.

Изучение равномерных свойств или инвариантов равномерных изоморфизмов является предметом теории равномерных пространств.

В процессе зарождения математики понятие расстояния появилось одним из первых. Первоначально равномерные пространства возникли как обобщение метрических пространств. Поэтому сравнение их является актуальной и интересной.

Пусть (X, U) - произвольное равномерное пространство и ρ - некоторая псевдометрика на множестве X.

ТЕОРЕМА 1.1.2. [16]. Равномерное пространство (X,U) метризуемо тогда и только тогда, когда $w(U) \leq \aleph_0$.

Компактность, суперпаракомпактность, сильная паракомпактность, линделёфовость, паракомпактность являются важнейшими свойствами типа компактности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Пространство X называется компактным [2] (соответственно, суперпаракомпактным [38], сильно паракомпактным [54], паракомпактным [54], финально компактным [54], счетно сильно паракомпактным [54]), если в каждое его открытое покрытие можно вписать конечное (соответственно, конечнокомпонентное, звездно конечное, локально конечное, счетное, звездно счетное) открытое покрытие.

Регулярное финально компактное пространство называется линделёфовым пространством. Пространство X называется счетно паракомпактным [54], если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Всякое компактное пространство суперпаракомпактно, а всякое суперпаракомпактное пространство сильно паракомпактно. Бесконечное дискретное пространство суперпаракомпактно и локально компактно, но не компактно.

Простые примеры показывают, что класс суперпаракомпактных пространств находится строго между классами компактных и сильно паракомпактных пространств, класс сильно паракомпактных пространств находится строго между классами суперпаракомпактных и паракомпактных пространств.

З. Фроликом на семинаре по топологии в Карловском университете поставлена следующая проблема: найти и исследовать равномерные аналоги важнейших классов топологических пространств и непрерывных отображений.

В связи с этой задачей было несколько попыток ввести равномерные аналоги суперпаракомпактности, линделёфовости, сильно паракомпактности,

паракомпактности и счетно паракомпактности и в результате появились различные варианты равномерной паракомпактности, равномерной линделёфовости, равномерной суперпаракомпактности, счетной равномерной паракомпактности равномерных пространств. Например, введены и исследованы следующие важнейшие типы:

1) равномерно R-паракомпактность в смысле М.Д. Райса [77];

2) равномерно B-паракомпактность в смысле А.А. Борубаева [12];

3) равномерно F-паракомпактность в смысле З. Фролика [62];

4) равномерно P-паракомпактность в смысле Б.А. Пасынкова [76];

5) равномерно A-паракомпактность в смысле Л.В. Апариной [4];

6) равномерно I-паракомпактность в смысле Дж. Исбелла [65].

7) равномерно B-линделёфовость в смысле А.А. Борубаева [12];

8) равномерно A-линделёфовость в смысле Л.В. Апариной [4];

9) сильно равномерно K-паракомпактность в смысле Б.Э. Канетова [30];

10) сильно равномерно R-паракомпактность в смысле Д.К. Мусаева [38];

11) равномерно R-суперпаракомпактность в смысле Д.К. Мусаева [38];

12) счетно равномерно R-паракомпактность в смысле М.Д. Маркони [72];

Любое компактное равномерное пространство является равномерно R-суперпаракомпактным, любое равномерно R-суперпаракомпактное пространство является сильно равномерно R-паракомпактным, любое сильно равномерно R-паракомпактное пространство является сильно равномерно K-паракомпактным, любое сильно равномерно K-паракомпактное пространство является равномерно A-паракомпактным, а любое равномерно A-паракомпактное пространство является равномерно R-паракомпактным, последнее является счетно равномерно R-паракомпактным. Любое равномерно R-паракомпактное пространство является равномерно B-паракомпактным, но не обратно, т.е. существуют неполные метризуемые равномерные пространства не являющиеся равномерно R-паракомпактными пространствами. Всякое равномерно P-паракомпактное пространство также является равномерно B-паракомпактным. Любое метризуемое равномерное пространство является как равномерно B-паракомпактным, так и равномерно F-паракомпактным. Существует пример равномерно F-паракомпактного, но не равномерно B-паракомпактного пространства.

В равномерной топологии особый интерес представляет вопрос о выделении и исследовании тех равномерных свойств, которые для любого конечно аддитивного открытого покрытия ω обладают равномерно непрерывным ω-отображением на некоторое метризуемое пространство. К этой проблеме обратились Борубаев А.А. [12], Пасынков Б.А. и Бухаджер Д. [76], Мусаев Д.К. [38], Канетов Б.Э. и Байгазиева Н.А. [7], [33].

Поэтому исследование тех равномерных пространств, которые для любого конечно аддитивного счетного открытого покрытия ω обладают равномерно непрерывным ω-отображением на некоторое метризуемое пространство является актуальной.

Равномерные структуры можно рассматривать как тонкое средство для изучения самих же топологических пространств. В связи с этим естественным является характеризация и систематизация важнейших свойств топологических пространств посредством равномерных структур.

Топологической группой называется тройка $(G,\cdot,\tau)$, которая одновременно является группой и топологическим T_1 пространством и удовлетворяет следующим условиям:

(ТГ1) Формула $f(x,y)=x\cdot y$ определяет непрерывное отображение $f:(G,\tau)\times(G,\tau)\to(G,\tau)$;

(ТГ2) Формула $f(x)=x^{-1}$ определяет непрерывное отображение $f:(G,\tau)\to(G,\tau)$;

Пусть A,B - подмножества группы $(G,\circ,\tau)$. Положим $A\cdot B=\{x\cdot y: x\in A, y\in B\}$ и $A^{-1}=\{x^{-1}: x\in A\}$.

Пусть $(G,\cdot,\tau)$ - топологическая группа и $B(e)$ ее база в e.

Каждый элемент $H\in B(e)$ определяет три покрытия на G: $\alpha_H^L=\{xH: x\in G\}$, $\alpha_H^r=\{Hx: x\in G\}$ и $\alpha_H=\{xHy: x,y\in G\}$.

Обозначим через U_L, U_R и U_T соответственно семейства всех покрытий множества G, в каждое из которых соответственно вписаны покрытия вида α_H^L, α_H^R и α_H^T, где $H \in B(e)$. Каждое из семейств U_L, U_R и U_T обладает свойствами (P1) - (P4), т.е. каждое из этих семейств образует равномерность на G. Топология, порожденная каждой из равномерностей U_L, U_R и U_T совпадает с исходной топологией τ. Равномерность U_L называется левой, U_R - правой, а U_T - двусторонней равномерностью топологической группы $(G,\cdot,\tau)$.

Топологическое пространство, у каждой точки которого существует открытая окрестность, замыкание которой компактно называется локально компактным пространством [2].

Локальная компактность особенно важна при изучении топологических групп, поскольку на любой хаусдорфовой локально компактной группе можно ввести меру Хаара, позволяющую интегрировать функции на этой группе. Как известно, мера Лебега на пространстве действительных чисел является частным случаем меры Хаара.

Группа, двойственная по Понтрягину к абелевой топологической группе G, локально компактна тогда и только тогда, когда G локально компактна т.е. категория локально компактных абелевых групп является самодвойственной относительно двойственности Л.С. Понтрягина [42].

Многие полученные результаты в теории топологических групп связаны с равномерными структурами. Например, в доказательстве теоремы А.В. Архангельского о сильной паракомпактности всякой локально компактной топологической группы [5], ключевую роль играет естественно определяемая в группе равномерная структура. Эта равномерная структура приводит к тому, что база единичного элемента группы, которая образует покрытие, состоящее из компактных множеств, приводит к равномерной локальной компактности равномерной структуры и, следовательно, к ее сильной паракомпактности.

Исходя из этого следует важность исследования локально линделёфовых и локально счетно компактных топологических групп посредством равномерных структур.

1.2. О расширениях топологических пространств

М. Стоун [79] отмечал, что одной из интересных и трудных проблем общей топологии является изучение всех расширений данного топологического пространства. П.С. Александровым [35] была поставлена проблема классификации компактных расширений и сформулированы различные общие задачи о расширениях топологических пространств. Исходя из общей проблемы М. Стоуна, Б. Банашевский [55] систематизировал задачи теории расширений топологических пространств следующим образом:

а) При каких условиях существует расширение данного пространства с заданными наперед свойствами?

б) Указать общий способ построения расширений с заданными свойствами.

в) Если D – класс расширений пространства X, то при каких условиях в D существует максимальный элемент?

Под расширением произвольного тихоновского пространства X понимается любое тихоновское пространство tX, в которое X можно вложить в качестве всюду плотного подпространства посредством гомеоморфного вложения а $t : X \to tX$. Расширения t_1X и t_2X пространства X называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $f : t_1X \to t_2X$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} t_1X & \xrightarrow{f} & t_2X \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{i_X} & X \end{array}$$

коммутативна, где $i_X : X \to X$ - тождественное отображение.

Во множестве $T(X)$ вводится частичная упорядоченность следующим образом: $t_2X \le t_1X$ тогда и только тогда, когда существует такое непрерывное отображение $f : t_1X \to t_2X$, что $ft_1 = t_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.1. [12]. Расширения t_1X и t_2X тихоновского пространства X эквивалентны тогда и только тогда, когда $t_1X \le t_2X$ и $t_2X \le t_1X$.

Пусть (X,U) - равномерное пространство и $\varphi(U)$ - множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X,U). Пусть $U(X)$ - множество всех равномерностей на множестве X. Две равномерности U и V будем считать эквивалентными $U \sim V$, если $\varphi(U)=\varphi(V)$. Положим $E(U)=\{V \in U(X): U \sim V\}$. Ясно, что $E(U)$ является частично упорядоченным отношением.

Нормальную последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X будем называть $\varphi(U)$-нормальной, если $\alpha_n \cap F \neq \varnothing$ для любых $F \in \varphi(U)$ и $n \in N$.

Для любой равномерности U на множестве X множество $E(U)$ имеет наибольший элемент. В самом деле, если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - две $\varphi(U)$-нормальные последовательности покрытий множества X, то легко видеть, что $\{\alpha_n \wedge \beta_n\}$ также является $\varphi(U)$-нормальной последовательностью покрытий множества X. Следовательно, система U_φ всех $\varphi(U)$-нормальных последовательностей покрытий множества X является равномерностью на множестве X. Ясно, что $\varphi(U)=\varphi(U_\varphi)$. Теперь покажем, что U_φ - наибольший элемент множества $E(U)$. Пусть V - произвольный элемент множества $E(U)$ и γ - произвольное равномерное покрытие из V. Тогда существует нормальная последовательность покрытий $\{\gamma_n\}$ из V такая, что $\gamma=\gamma_1$. $\{\gamma_n\}$ - $\varphi(U)$-нормальная последовательность покрытий, так как $\varphi(U)=\varphi(V)$. Следовательно, $\{\gamma_n\} \subset U_\varphi$. Значит, $V \subset U_\varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. [12]. Наибольший элемент U_φ частично упорядоченного множества $E(U)$ называется φ-лидером равномерности U. Равномерное пространство (X,U) называется предуниверсальным, если $U=U_\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.2. [12]. Равномерное пространство (X,U) является предуниверсальным тогда и только тогда, когда пополнение $(\tilde{X},\tilde{U})$ равномерного пространства (X,U) является универсальным пространством.

Топологическое пространство X называется полным по Дьедонне, если на нем существует полная равномерность.

Топологическое пространство X полно по Дьедонне тогда и только тогда, когда универсальная равномерность пространства X полна [35].

Пусть $(T(X),\leq)$ - частично упорядоченное множество всех тихоновских расширений тихоновского пространства X.

Рассмотрим следующие множества расширений тихоновского пространства X [8]:

1) $D(X)$ - множество всех полных по Дьедонне расширений;

2) $P(X)$ - множество всех паракомпактных расширений;

3) $L(X)$ - множество всех линделёфовых расширений;

4) $S(X)$ - множество всех сильно паракомпактных расширений.

Множества $D(X)$, $P(X)$, $L(X)$ и $S(X)$ являются подмножествами частично упорядоченного множества $(T(X),\leq)$ и по отношению порядка, индуцированного из $(T(X),\leq)$, являются частично упорядоченными множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.2. [8]. Пусть (X,U)- равномерное пространство. Равномерность U называется:

1) предпаракомпактной, если всякое покрытие γ множества X такое, что $\gamma \cap F \neq \varnothing$ для любого пространства $F \in \varphi(U)$ принадлежит U;

2) сильно предпаракомпактной, если U является предпаракомпактной и имеет базу, состоящую из звездно конечных покрытий;

3) предлинделёфовой, если U является предпаракомпактной и имеет базу, состоящую из счетных покрытий.

Через $U_D(X)$ (соответственно через $U_P(X)$, $U_S(X)$ и $U_L(X)$) обозначим множества всех предуниверсальных (соответственно предпаракомпактных, сильно предпаракомпактных, предлинделёфовых) равномерностей тихоновского пространства X. Множества $U_D(X)$, $U_P(X)$, $U_S(X)$ и $U_L(X)$) частично упорядочены по включению "$\subset$".

ТЕОРЕМА 1.2.1. [8]. Для любого тихоновского пространства X следующие частично упорядоченные множества

1) $(D(X),\leq)$ и $(U_D(X),\subset)$;

2) $(P(X),\leq)$ и $(U_P(X),\subset)$;

3) $(S(X),\leq)$ и $(U_S(X),\subset)$;

4) $(L(X),\leq)$ и $(U_L(X),\subset)$;

попарно изоморфны.

Эти исследования А.А. Борубаева показывают, что построение паракомпактных и близких к ним расширений данного тихоновского пространства посредством равномерных структур является естественным. Однако не исследованными оказались множество всех суперпаракомпактных расширений и множество всех индекса компактности $\leq \tau$ расширений.

1.3. Отображения пространств

В последнее время в современной топологии бурно развивается теория отображений. Эта теория посвящена, в первую очередь, распространению на отображения основных понятий и утверждений, касающихся пространств. При этом пространство понимается как простейшее отображение этого пространства в одноточечное пространство.

Проведенные исследования выявили большие аналоги отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения пространств. Так, в работах Г.Т. Уайборна [82], Г.Л. Чейна [57], В.М. Ульянова [50], А. Тайманова [49], Н. Кролевец [36] развита компактификация отображений. В работе Б.А. Пасынкова [40] для отображений было введено и исследовано тихоновость и нормальность.

В работе А.А. Борубаева [24] развита теория равномерно непрерывных отображений. Были введены и исследованы класс равномерно открытых, предкомпактных, полных, равномерно совершенных отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. [14]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно открытым, если отображение f переводит каждое открытое покрытие $\alpha\in U$ в открытое покрытие $f\alpha\in V$.

Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Псевдоравномерность $U_f\subset U$ называется базой равномерно непрерывного отображения f, если для любого $\alpha\in U$ существуют такие $\beta\in V$ и $\gamma\in U_f$, что покрытие $f^{-1}\beta\wedge\gamma$ вписано в покрытие α.

Наименьшее кардинальное число τ, являющееся весом какой-либо базы U_f отображения f, называется весом равномерно непрерывного отображения f и обозначается через $w(f)$. Для всякого равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$ имеет место следующее соотношение $w(U)\le w(f)+w(V)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.2. [9]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется предкомпактным, если отображение f имеет предкомпактную базу U_f.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.3. [9]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется совершенным, если оно одновременно предкомпактно и совершенно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.4. [14]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется полным, если всякий фильтр Коши F в (X,U), для которого fF сходится в (Y,V), сходится в (X,U).

ТЕОРЕМА 1.3.1. [9]. Отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) равномерно совершенно тогда и только тогда, когда оно полно и предкомпактно.

Класс сильно равномерно открытых и сильно равномерно замкнутых отображений был введен А.С. Мищенко [37].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.5. [37]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется сильно равномерно открытым, если для любого $\alpha\in U$ существует такое $\beta\in U$, что $f(\alpha(x))\supset\beta(f(x))$ для любого $x\in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.6. [37]. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется сильно равномерно замкнутым, если для любого $\alpha\in U$ существует такое $\beta\in U$, что $\alpha(f^{-1}y)\supset f^{-1}(\beta(y))$ для любого $y\in Y$.

Равносильность определения сильно равномерно открытых и сильно равномерно замкнутых отображений было замечено Вилимовским [80].

Всякое сильно равномерно открытое отображение является равномерно открытым [80].

Поэтому актуальной является следующая задача:

«Распространить на отображение понятия и утверждения, имеющихся для равномерного пространства».

1.4. Заключение по главе 1

В главе 1 содержится краткий анализ основных этапов развития теоретико-множественной топологии. Приводится некоторые понятия и утверждения других авторов, необходимые для последующих построений.

Проблема униформизации теории топологических пространств является актуальной, ибо они не только поднимает на новый уровень теорию равномерных пространств, но дают тонкое средство для изучения самих топологических свойств. Поэтому исследования свойств топологических пространств, топологических групп и их отображений посредством равномерных структур является актуальной. Кроме того, проблема построения всех расширений данного тихоновского пространства посредством равномерных структур еще остается актуальной проблемой теории расширений тихоновских пространств. Именно такие проблемы исследованы в данной диссертационной работе.

ГЛАВА 2. МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются общая и равномерная топология.

Предметом исследования являются равномерные структуры на топологических пространствах и топологических группах.

Равномерные структуры можно рассматривать как тонкое средство для изучения самих же топологических структур.

Свойства типа компактности – компактность, суперпаракомпактность, линделёфовость, сильная паракомпактность, счетная паракомпактность принадлежат к числу важнейших классов топологических пространств. Характеризация этих классов при помощи равномерных свойств является интересной задачей. В связи с этим возникает следующая задача:

«Исследовать компактность, линделёфовость, μ-компактность, μ-паракомпактность топологических пространств при помощи равномерных структур».

Одной из центральных тем в общей топологии является тема, связанная с расширениями топологических пространств.

Как известно [12], на каждом паракомпактном пространстве X его универсальная равномерность U_X является полной. Если Y - всюду плотное подпространство пространства X, а V - равномерность на Y, индуцированная равномерностью U_X, то равномерное пространство (X,U_X) является пополнением равномерного пространства (Y,V). При этом V, вообще говоря, не является универсальной равномерностью, но обладает специальным свойством, названным предпаракомпактностью. Оказывается, по этим равномерным структурам пространства Y можно построить все его паракомпактные расширения.

В работе А.А. Борубаева [7] построено множество всех полных по Дьедонне, паракомпактных, сильно паракомпактных и линделёфовых расширений посредством равномерных структур. В связи с этим, естественно, возникает следующая чисто топологическая задача:

«Построить индекса компактности $\leq \tau$ и суперпаракомпактных расширений посредством равномерных структур»

На каждой топологической группе определены три естественные равномерности – левая, правая и двусторонняя. Базисные элементы правой (левой) равномерности получаются умножениями единицы на всевозможные элементы группы. Двусторонняя равномерность — это верхняя грань правой и левой равномерностей.

А.В. Архангельский [5] доказал, что всякая локально компактная топологическая группа сильно паракомпактна. Используя средства равномерных структур легко увидеть справедливость этого утверждения. Исходя из этого, возникает следующие относящиеся к топологическим группам задачи:

«Исследовать локально линделёфовы и локально счетно компактные топологические группы при помощи равномерных структур»,

«Исследовать подгрупп суперпаракомпактных и индекс компактности $\leq \tau$ топологических групп при помощи равномерных структур.

В последнее время многие понятия и утверждения равномерной топологии были распространены со случая пространств на случай отображений. При этом пространство понимается как простейшее отображение этого пространства в одноточечное пространство.

Проведенные исследования выявили большие (равномерные) аналоги непрерывных отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения (равномерной) топологии пространств. Так, в работе [12] А.А. Борубаев ввел и исследовал предкомпактные, τ-ограниченные, полные, равномерно совершенные и равномерно открытые отображения, показал роль равномерно совершенных отображений среди всех отображений и применил их при построении абсолюта равномерных пространств. А.С. Мищенко [37] ввел и исследовал сильно равномерно замкнутые и сильно равномерно открытые отображения и применил их при нахождении таких классов отображений, при которых вес образа не превосходит веса прообраза. Б.А. Пасынковым в работе [40] на непрерывные отображения перенесены локально компактность, паракомпактность, сильная паракомпактность, полнота по Чеху и полнота по Дьедонне пространства и проведены их исследования.

В связи с этим возникает следующая задача:

«Исследовать ω-отображения, совершенные и квазисовершенные отображения равномерных пространств и групп».

2.2. Метод покрытий, фильтров и взаимная классификация пространств и отображений

При построении классификации топологических пространств, главную роль занимает метод покрытий. В применениях метода покрытий первостепенное значение приобретают свойства покрытий, связанные с характером их элементов, со взаимным расположением этих элементов и отношения вписанности между покрытиями.

Метод покрытий имеет универсальное значение для общей и равномерной топологии [16], в частности, для теории размерности [65], теории метризации [65], теории компактных пространств [54], общей теории непрерывных и равномерно непрерывных отображений [12], теории принципа селекции [70], [71]. Системы покрытий служат основой построения обратных спектров топологических и равномерных пространств. На методе покрытий и обратных спектров основана и общая теория гомологий, представляющая собой один из наиболее плодотворных контактов топологии и алгебры.

Пусть X - непустое множество. Семейство α подмножеств множества X называется покрытием множества X, если $\cup\{A : A \in \alpha\} = X$.

Пусть α и β - покрытия множества X. Тогда покрытие $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$ называется структурным (внутренним) пересечением покрытий α и β, и обозначается через $\alpha \wedge \beta$.

Переход от покрытия α вписанному в α новому покрытию, как правило, бывает вызван желанием получить покрытие с рядом новых свойств, отсутствующих у α, в этом случае обычно требуют обычной вписанности нового покрытия в старое, имея в виду сохранить уровень мелкости покрытия. Однако, когда переход к новому покрытию имеет главной целью достижение более высокого уровня мелкости покрытия, а не приобретение покрытием новых индивидуальных свойств. Главным средством достижения этой цели становятся тогда требования к вписанности. На передний план выступают отношения звездной и сильно звездной вписанности.

Пусть α - покрытие множества X и $M \subset X$ - подмножество. Множество $\alpha(M) = \cup St(\alpha, M)$, где $St(\alpha, M) = \{A \in \alpha : A \cap M \neq \varnothing\}$, называется звездой множества M относительно покрытия α. Если $M = \{x\}$, то вместо $\alpha(\{x\})$ пишут $\alpha(x)$. Говорят, что покрытие α вписано в покрытие β, если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $A \subset B$ и обозначается $\alpha \succ \beta$. Говорят, что покрытие α звездно вписано в покрытие β, если для каждой точки $x \in X$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(x) \subset B$ и обозначается $\alpha \rhd \beta$. Говорят, что покрытие α сильно звездно вписано в покрытие β, если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(A) \subset B$ и обозначается $\alpha * \succ \beta$.

Наиболее глубокие факты и конструкции связаны с отношением звездной вписанности.

ЛЕММА [31]. Пусть α, β и γ - покрытия множества X. Если покрытие γ звездно вписано в покрытие β, а покрытие β звездно вписано в покрытие α, то покрытие γ сильно звездно вписано в покрытие α.

Отношение сильно звездной вписанности естественно возникает в метрических пространствах, как результат действия аксиомы треугольника.

ЛЕММА [12]. Пусть $\{\alpha_n\}$ - такая последовательность покрытий множества X, что $\alpha_{n+1} * \succ \alpha_n$ для любого $n \in N$ и $\alpha_1 = \{X\}$. Тогда существует такая псевдометрика ρ на X, удовлетворяющая условию:

$$\alpha_{n+1}(x) \subset \{y : \rho(x,y) < 1/2^{n+1}\} \subset \alpha_n(x)$$

для любых $x \in X$ и $n \in N$.

ПРИМЕР [12]. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, а $O_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$ - открытый шар радиуса ε с центром в точке $x \in X$. Положим $\alpha_\varepsilon = \{O_\rho(x,\varepsilon) : x \in X\}$. Тогда покрытие $\alpha_{\frac{\varepsilon}{3}}$ сильно звездно вписано в α_ε.

Последовательность $\{\alpha_n : n \in N\}$ покрытий множества X называется нормальной, если $\alpha_{n+1} * \succ \alpha_n$ для любого $n \in N$.

Покрытие α множества X называется τ-звездной (сильно τ-звездной), если $|St(\alpha, x)| \le \tau$ для любого $x \in X$ ($|St(\alpha, A)| \le \tau$ для любого $A \in \alpha$), где $St(\alpha, x) = \{A \in \alpha : A \ni x\}$ ($St(\alpha, A) = \{A' \in \alpha : A \cap A' \ne \varnothing\}$).

Взаимное расположение элементов равномерного покрытия много говорит о глобальном строении равномерного пространства.

При изучении равномерную структуру важное значение имеет понятие нормальное покрытие. Они образуют «скелет» равномерной структуры.

Последовательность $\{\alpha_n : n \in N\}$ покрытий множества X называется нормальной, если $\alpha_{n+1} * \succ \alpha_n$ для любого $n \in N$.

Семейство α подмножеств топологического пространства X называется локально конечным, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность O_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства α.

Семейство α подмножеств топологического пространства X называется звездно конечным, если каждой элемент $A \in \alpha$ пересекатся лишь с конечным числом элементов α.

Семейство α подмножеств равномерного пространства (X, U) называется равномерно локально конечным, если существует такое равномерное покрытие $\alpha \in U$, каждый элемент которого пересекается лишь с конечным числом элементов семейства α.

Семейство α подмножеств равномерного пространства (X, U) называется равномерно звездно конечным, если оно является равномерно локально конечным и звездно конечным.

Конечная последовательность подмножеств $A_1, A_2, ..., A_j$ множества X называется цепью, связывающей множества A_1 и A_j, если $A_{i-1} \cap A_i \ne \varnothing$ при любом $i = 1,2,..., j$. Система α подмножеств множества X называется сцепленной, если для любых элементов $A', A'' \in \alpha$ существует такая цепь элементов системы α, что первый элемент цепи есть множество A', а последний - множество A''. Максимальные сцепленные подсистемы системы α называется компонентами сцепленности системы α. Звездно конечное открытое покрытие пространства X называется конечнокомпонентным, если все его компоненты сцепленности конечны.

Опыт развития общей и равномерной топологии показал, что открытые покрытия гораздо важнее замкнутых покрытий.

Одно из наиболее замечательных свойств локально конечных семейств (покрытий) множеств заключается в перестановочности оператора замыкания с оператором объединения.

ТЕОРЕМА [54]. Для каждого локально конечного семейства (покрытия) $\{A_s\}_{s\in S}$ меет место равенство $\overline{\bigcup_{s\in S} A_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{A}_s$.

Метод конечно аддитивных покрытий важную роль играет при изучении паракомпактных особенно равномерно паракомпактных пространств.

Следующая топологическая лемма послужила основой введения ряд равномерных аналогов паракомпактных и сильно равномерно паракомпактных пространств [4], [77], [30], [34].

ЛЕММА [54]. Топологическое пространство X является паракомпактным тогда и только тогда, когда в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Универсальным методом для исследования теории сходимости является метод фильтров и ультрафильтров, позволяющей не только с большим успехом заменить теорию сходимости по Муру и Смиту [35] или получить целый ряд новых результатов в общей и равномерной топологии.

Фильтром в множестве X называют семейство F, обладающее следующими свойствами:

(1) Всякое множество, содержащее какое-либо из множеств семейства F, принадлежит F.

(2) Пересечение любого конечного числа множеств из F принадлежит F.

(3) Пустое подмножество множества X не принадлежит F.

Семейство $B \subset F$ называется базой фильтра F, если для любого $M \in F$ существует такое $N \in B$, что $N \subset M$.

Пусть даны два фильтра F_1 и F_2 в одном и том же множестве X. Говорят, что F_1 мажорирует F_2 или что F_2 мажорируется фильтром F_1, если $F_2 \subset F_1$. Если, кроме того $F_2 \neq F_1$, то говорят, что F_1 сильнее чем F_2 или что F_2 слабее F_1.

Ультрафильтром в множестве X называется фильтр в X, не мажорируемый никаким отличным от него фильтром в X.

Поскольку упорядоченное множество всех фильтров в заданном множестве индуктивно, то из теоремы Цорна вытекает следующая теорема:

ТЕОРЕМА. [19] Каждый фильтр F в множестве X мажорируется некоторым ультрафильтром.

Благодаря этой теореме метод фильтров и ультрафильтров дает чрезвычайно ценный инструмент для самых разнообразных приложений.

Пусть (X,τ) - топологическое пространство. Говорят, что фильтр F сходится в (X,τ) к точке x, если для любой окрестности O_x точки x существует такой элемент Φ из F, что $\Phi \subset O_x$, т.е. если F сильнее, чем фильтр окрестностей F_x точки x. Точка x называется пределом точки x. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения фильтра F в (X,τ), если x является точкой прикосновения каждого элемента фильтра F в (X,τ).

Методом фильтра или ультрафильтра можно охарактеризовать важнейшие топологические свойства такие, как компакт, счетно компакт, паракомпакт, сильно паракомпакт и др.

Особое приложение метода фильтров имеет в теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, когда затрагивается вопрос полноты и близкие к ним понятия.

Пусть (X,U) - равномерное пространство, а F - фильтр в X. Фильтр F называется фильтром Коши в (X,U), если $\alpha \cap F \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in U$.

Минимальные по включению элементы множества всех фильтров Коши в равномерном пространстве (X,U) называются минимальными фильтрами Коши.

Заметим, что всякий фильтр окрестностей любой точки равномерного пространства является минимальным фильтром Коши и всякая точка прикосновения фильтра Коши в равномерном пространстве является его пределом. Равномерное пространство называют полным, если всякий фильтр Коши в нем сходится.

При исследовании полноты равномерных пространств (соответственно, сильной полноты равномерных пространств, μ-полноты равномерных пространств) применяются методы фильтров Коши (соответственно, слабых фильтров Коши и фильтров Коши, имеющих базу мощности $\leq \tau$).

При построении конструкции пополнения равномерных пространств используются метод минимальных фильтров Коши. При построении паракомпактных топологических пространств и близких к ним расширений наиболее эффективным и естественным является метод покрытий и метод фильтров Коши.

В последнее время основную объединяющую роль в общей и равномерной топологии стал играть метод взаимной классификации пространств и отображений. Сущность его: для произвольного топологического (равномерного) пространства Y рассматривается категория Top_Y (соответственно, $Unif_Y$), объектами которой являются непрерывные (соответственно, равномерно непрерывные) отображения топологических (равномерных) пространств в пространство Y, а для объектов $f: X \to Y$ и $g: Z \to Y$ морфизмом из f в g считается такое непрерывное (равномерно непрерывное) отображение $\varphi: X \to Z$ так, что $f = g \circ \varphi$. Определения свойств отображения $f: X \to Y$ сформулируются так, что никакие свойства на пространства X и Y не налагаются. Рассматриваемые конструкции обобщают конструкции категории Top $(Unif)$, так как категория $Top\,(Unif)$ топологических (равномерных) пространств и их непрерывных (равномерно непрерывных) отображений изоморфна (равномерно изоморфна) частному случаю категории Top_Y $(Unif_Y)$ для одноточечного Y.

Суть метода взаимной классификации пространств и отображений отражена в следующих проблемах, поставленных П.С. Александровым [35]:

1.Дан класс отображений A. Какие свойства пространств сохраняются отображениями из класса A?

2.Даны классы B пространств и класс A отображений. Какими внутренними свойствами выделяются те пространства, которые можно получить как образы пространств из класса B при отображениях из класса A?

3.Как описываются прообразы пространств из B при отображениях из A?

В качестве реализации метода взаимной классификации пространств и отображений отметим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА [9]. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Если f - равномерно совершенно и (Y,V) - компактно, то (X,U) также компактно. Обратно, если (X,U) компактно, то f равномерно совершенно.

Таким образом, решение конкретно поставленных задач данной диссертации с использованием основных методов, таких как методы покрытий, фильтров и метод взаимной классификации пространств и отображений является, как нам кажется, наиболее удобным, естественным и целесообразным.

2.3. Заключение по главе 2

Во второй главе очерчена проблемные ситуации топологических и равномерных пространств, и их отображений. В концентрированном виде заключены направления поиска, важнейшие задачи, возможности и целесообразности их решения различными методами теоретико-множественной топологии.

ГЛАВА 3. РАВНОМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе найдены характеристики важнейших классов типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

Исследованы локально компактные паракомпактные и родственные к ним пространства при помощи равномерных структур и μ-полнота равномерных пространств.

Построены все индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширения данного тихоновского пространства с помощью его равномерных структур.

3.1. Характеризация важнейших свойств типа компактности тихоновских пространств при помощи равномерных структур

Напомним, что топологическое пространство X называется μ-компактным, если каждое его открытое покрытие мощности $\leq \mu$ содержит конечное подпокрытие [6]. $\aleph_0$-компактные пространства называются счетно компактными [54]. Равномерное пространство (X,U) называется μ-полным, если всякий фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$, сходится в нем. $\aleph_0$-полные равномерные пространства называются секвенциально полными. μ-полные пространства было введено А.А. Борубаевым [18]. В работах [23], [31] были проведены исследования по μ-полным пространствам.

Следующая теорема является характеристикой μ-компактных пространств посредством равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Тихоновское пространство X является μ-компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является μ-полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть тихоновское пространство (X,τ) является μ-компактным и F - фильтр Коши пространства (X,U), имеющий базу мощности $\leq\mu$. Тогда фильтр F имеет точку прикосновения в пространстве (X,U). Поскольку в равномерном пространстве понятия точка прикосновения и предельные точки равносильны, то отсюда следует сходимость фильтра F в (X,U). Таким образом, μ-полнота пространства (X,U) доказана.

Достаточность. Пусть F - произвольный ультрафильтр, имеющий предбазу мощности $\leq\mu$, и (X,U) - любое такое равномерное пространство, что $\tau_U=\tau$. Тогда существует такая предкомпактная равномерность U_P, что $\tau_{U_P}=\tau_U=\tau$. Фильтр F является фильтром Коши в (X,U_P). Тогда он сходится к некоторой точке пространства (X,U_P). Следовательно, ультрафильтр F, имеющий базу мощности $\leq\mu$, сходится к некоторой точке пространства (X,τ).

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. [16]. Тихоновское пространство X является счетно компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным.

Равномерное пространство (X,U) называется сильно равномерно паракомпактным [33], если его топологическое пространство (X,τ_U) является сильно паракомпактным и для любого конечно аддитивного открытого покрытия λ пространства (X,U) существует последовательность счетных покрытий $\{\beta_i : i\in N\}\subset U$, удовлетворяющая условию:

Для каждой точки $x\in X$ существуют номер $n\in N$ и $L\in\lambda$ такие, что $\beta_n(x)\subset L$ (UP) [12].

Различные типы равномерно паракомпактных пространств и сильно равномерно паракомпактных пространств исследованы в работах [12], [30], [33], а различные типы равномерно линделёфовых пространств в работах [4], [12], [34].

В следующей теореме усиливаются результаты Г. Корсона [58], и Д. Бухаджера и Б.А. Пасынкова [76].

ТЕОРЕМА 3.1.2. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является (сильно) равномерно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть тихоновское пространство (X,τ) является линделёфовым. Покажем, что (X,U) является сильно равномерно паракомпактным. Пусть α - произвольное конечно аддитивное открытое покрытие пространства (X,U). Для каждой точки $x\in X$ существуют $A\in\alpha$ и $\beta\in U$ такие, что $\beta(x)\subset A$. По условию (P1) [12] для $\beta\in U$ существует такое $\gamma\in U$, что $\gamma*\succ\beta$. Положим $\lambda=\{\beta(x):x\in X\}$. Поскольку пространство X линделёфово, то открытое покрытие λ содержит счетное подпокрытие $\lambda_0=\{\beta_n(x):n\in N\}$. Образуем последовательность равномерных покрытий $\{\gamma_n:n\in N\}$. Тогда для каждой точки $x\in X$ существует такой номер $n\in N$, что $x\in\gamma_n(x)$. Ясно, что $\gamma_n(x)\subset\beta_n(x)\subset A$. Таким образом, сильная равномерная паракомпактность пространства (X,U) доказана.

Достаточность. Пусть (X,U) - любое такое равномерное пространство, что $\tau_U=\tau$. Тогда существует такая предкомпактная равномерность U_p, что $\tau_{U_p}=\tau$. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства (X,τ_U). Для конечно аддитивного открытого покрытия $\alpha^{\angle}$ пространства (X,U_p) существует нормальная последовательность счетных покрытий $\{\beta_n:n\in N\}\subset U$, удовлетворяющая условию (UP) [12]. Тогда существует такая сепарабельная псевдометрика d на X, что $\beta_{n+1}(x)\subset\{y:d(x,y)<\frac{1}{2^{n+1}}\}\subset\beta_n(x)$, для любого $x\in X$ и при каждом $n\in N$. Следовательно, внутренность $\left\langle\alpha^{\angle}\right\rangle=\{\langle A\rangle:A\in\alpha^{\angle}\}$ покрытия $\alpha^{\angle}$ является открытым покрытием сепарабельного псевдометрического пространства (X,d). Так как всякое сепарабельно псевдометризуемое пространство линделёфово, то существует счетное открытое покрытие λ пространства (X,τ_d), вписанное в покрытие $\alpha^{\angle}$. Из $\tau_d \subset \tau_U$ следует, что покрытие λ есть открытое покрытие топологического пространства (X,τ_U). Для каждого $L \in \lambda$ существует такой $A_L \in \alpha^{\angle}$, что $L \subset A_L = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in \alpha$, $i = 1,...,n$. Пусть $\mu = \cup\{\lambda_L : L \in \lambda\}$, где $\lambda_L = \{A_i \cap L : i = 1,...,n\}$. Тогда μ является счетным открытым покрытием пространства (X,τ_U) вписанное в открытое покрытие λ. Линделёфовость пространства (X,τ_U) доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.2. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является равномерно линделёфовым.

Как известно, существуют различные характеристики компактности тихоновских пространств [16], [56]. Следующая теорема дает новую характеристику компактности тихоновских пространств при помощи равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным и (сильно) равномерно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 3.1.1 и 3.1.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.3. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным и равномерно линделёфовым.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.4. [16]. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда для каждой равномерности U равномерное пространство (X,U) является полным.

Напомним, что топологическое пространство X является μ-паракомпактным в том и только том случае, если в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq \mu$ можно вписать локально конечное открытое покрытие [6]. Равномерное пространство (X,U) является равномерно μ-паракомпактным в том и только том случае, если в каждое его конечно аддитивное открытое покрытие мощности $\leq \mu$ можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие [72].

Следующая теорема является характеристикой μ-паракомпактных пространств при помощи универсальных равномерных структур.

ТЕОРЕМА 3.1.4. Тихоновское пространство X является μ-паракомпактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) является равномерно μ-паракомпактным, где U_X - универсальная равномерность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть X является μ-паракомпактным пространством. Как известно, множество всех открытых покрытий образует базу универсальной равномерности. Легко видеть, что равномерное пространство (X,U_X) является равномерно μ-паракомпактным.

Достаточность. Если равномерное пространство (X,U_X) является равномерно μ-паракомпактным, то по предложению 1 [72, стр. 320], тихоновское пространство X является μ-паракомпактным.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.5. Тихоновское пространство X является счетно паракомпактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X), где U_X - универсальная равномерность, является счетно равномерно паракомпактным.

3.2. Характеризация локально компактных паракомпактных и близких к ним пространств, при помощи равномерных структур

Пусть (X,U) - равномерное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.1. Равномерное пространство (X,U) называется

(L_1) равномерно локально компактным [35],

(L_2) равномерно локально линделёфовым [76],

(L_3) равномерно локально μ-компактным,

если существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого

(l_1) компактно,

(l_2) линделёфово,

(l_3) μ-компактно.

Равномерно локально $\aleph_0$-компактные равномерные пространства называются равномерно локально счетно компактными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.1. Любое равномерно локально компактное пространство является равномерно локально μ-компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство (X,U) равномерно локально компактно. Тогда существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого компактно, т.е. μ-компактно. Следовательно, (X,U) равномерно локально μ-компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.2. Всякое равномерно локально μ-компактное пространство является равномерно μ-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in U$ - такое равномерное покрытие, что замыкание каждого элемента которого μ-компактно. Тогда для каждого открытого покрытия β мощности $\le \mu$ пространства (X,U) покрытие α вписано в $\beta^{\angle}$. Это означает, что $\beta^{\angle} \in U$. Следовательно, пространство (X,U) является равномерно μ-паракомпактным согласно пункту 2) [72, стр. 320].

СЛЕДСТВИЕ 3.2.1. Всякое равномерно локально счетно компактное пространство является счетно равномерно паракомпактным.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально μ-компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально μ-компактно и μ-паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует такая равномерность U, что пространство (X,U) является равномерно локально μ-компактным. Покажем локальную μ-компактность и μ-паракомпактность тихоновского пространства (X,τ_U). Так как (X,U) является равномерно локально μ-компактным, то оно является равномерно μ-паракомпактным, следовательно, пространство (X,τ_U) μ-паракомпактно. Из определения равномерно локально μ-компактности пространства (X,U) следует локальная μ-компактность пространства (X,τ_U).

Достаточность. Пусть тихоновское пространство X является локально μ-компактным. Наделим пространство X с универсальной равномерностью U_X, тогда U_X содержит покрытие, состоящее из μ-компактных подмножеств, следовательно, пространство (X,U_X) является равномерно локально μ-компактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.3. Для предкомпактного равномерного пространства (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) является равномерно локально μ-компактным;

2. (X,τ_U) является μ-компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из следующих лемм 3.2.1 и 3.2.2.

ЛЕММА 3.2.1. Если для равномерного пространства (X,U) его топологическое пространство (X,τ_U) μ-компактно, то (X,U) является равномерно локально μ-компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие. Пространство (X,τ_U) μ-компактно, поэтому замыкание каждого элемента покрытия α является μ-компактным. Следовательно, (X,U) является равномерно локально μ-компактным пространством.

ЛЕММА 3.2.2. Если равномерное пространство (X,U) является равномерно локально μ-компактным и предкомпактным, то (X,τ_U) является μ-компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) равномерно локально μ-компактно и предкомпактно. Пусть α - произвольное открытое покрытие мощности $\le \mu$ пространства (X,τ_U) и $\beta \in U$ - конечное равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого μ-компактно. Пусть $B_i \in \beta$ - произвольное множество. Тогда в силу μ-компактности $B_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{j(i)}$, поэтому семейство множеств вида $B_i \cap A_{j(i)}$ образует конечное открытое покрытие, вписанное в покрытие α мощности $\le \mu$ пространства (X,τ_U). Таким образом, μ-компактность пространства (X,τ_U) доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.4. Для тихоновского пространства (X,τ) следующие условия эквивалентны:

1. (X,τ) является μ-компактным.

2. Для каждой равномерности U такого, что $\tau_U = \tau$ равномерное пространство (X,U) является равномерно локально μ-компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 3.2.1 и 3.2.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.5. Тихоновское пространство X является локально компактным паракомпактным (линделёфовым) тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит (счетное) дизъюнктное покрытие, являющееся объединением дизъюнктного семейства σ -компактных подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть X - локально компактное паракомпактное (линделёфово) пространство. Тогда равномерное пространство (X,U_X) является равномерно локально компактным. Поэтому согласно г) (см. [35], пункт Ф, стр. 280) оно является объединением дизъюнктного семейства открытых σ -компактных подмножеств, т.е. существует дизъюнктное покрытие α, состоящее из открытых σ-компактных подмножеств. Поскольку U_X - универсальная равномерность, то $\alpha \in U_X$.

Достаточность. Пусть универсальная равномерность U_X пространства X содержит дизъюнктное покрытие α, состоящее из открытых σ - компактных подмножеств, т.е. X является объединением дизъюнктного семейства открытых σ-компактных подмножеств. Следовательно, X паракомпактно (см. [35], пункт Ф, г), стр. 280). Легко видеть, что оно является локально компактным.

Следующая теорема обобщает утверждения А.А. Борубаева [см. 12, стр. 128, предложение 3.1.7].

ТЕОРЕМА 3.2.2. Тихоновское пространство X является локально компактным и индекс компактности $\leq \eta$ т.е. $ic(X) \leq \eta$ тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит покрытие мощности $\leq \eta$, состоящее из компактных подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть пространство X является локально компактным и индекс компактности $\leq \eta$, т.е. $ic(X) \leq \eta$. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность O_x, что $[O_x]$ компактно. Положим $\alpha = \{[O_x] : x \in X\}$. Тогда α принадлежит равномерности U_X. Из α выделим подпокрытие α_0 мощности $\leq \eta$. Тогда подпокрытие α_0 также принадлежит равномерности U_X.

Достаточность. Пусть универсальная равномерность U_X содержит покрытие α мощности $\leq \eta$, состоящее из компактных подмножеств. Поскольку внутренность $\langle \alpha \rangle$ покрытия α принадлежит равномерности U_X, то пространство X является локально компактным. Пусть β - произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда α вписано в $\beta^{\angle}=\{\cup\beta_0:\beta_0$ - конечное$\}$. Отсюда следует, что для любого $A\in\alpha$ найдется такое $B^{\angle}\in\beta^{\angle}$, что $A\subset B^{\angle}=\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}}B_i$, где $B_i\in\beta$, $i=1,2,...,n$. Пусть $\beta^*=\{\beta_A:A\in\alpha\}$, $\beta_A=\{A\cap B_i:i=1,2,...,n\}$. Легко видеть, что покрытие β^* имеет мощность $\leq\eta$ и $\beta^*\succ\beta$. Следовательно, $ic(X)\leq\eta$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.2. [12]. Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны:

1. X является локально компактным и линделёфовым;

2. Универсальная равномерность U_X пространства X содержит счетное покрытие, состоящее из компактных подмножеств;

3. Существует равномерность U на пространстве X, содержащая счетное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Тихоновское пространство X является локально компактным и суперпаракомпактным тогда и только тогда, когда его универсальная равномерность U_X содержит конечнокомпонентное покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть X - локально компактно и суперпаракомпактно. Тогда для каждой точки $x\in X$ существует такая окрестность O_x, что $[O_x]$ компактно. Положим $\alpha=\{[O_x]:x\in X\}$. В силу суперпаракомпактности X, в α впишем конечнокомпонентное открытое покрытие β. Легко видеть, что покрытие $\lambda=\{[B]:B\in\beta\}$ является конечнокомпонентным равномерным покрытием, состоящее из компактных множеств, т.е. $\lambda\in U_X$.

Достаточность. Пусть равномерность U_X содержит конечнокомпонентное покрытие α, состоящее из компактных подмножеств. Так как внутренность $\langle\alpha\rangle$ покрытия α принадлежит равномерности U_X, то пространство X является локально компактным. Пусть β - произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда $\alpha \succ \beta^{\angle}$. Поэтому, каждое $A \in \alpha$ содержится в $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$, где $B_i \in \beta$, $i = 1,2,...,n$. Всевозможные множества вида $A \cap B_i$ образует конечнокомпонентное открытое покрытие, вписанное в α. Суперпаракомпактность пространства X доказана.

Следующая теорема обобщает предложение 3.1.7. [см. 12, стр. 128].

ТЕОРЕМА 3.2.4. Для того чтобы тихоновское пространство X было локально линделёфовым и паракомпактным, необходимо и достаточно чтобы его универсальная равномерность U_X содержала покрытие, состоящее из подмножеств, замыкание которых линделёфово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть пространство X является локально линделёфовым и паракомпактным. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность O_x, что замыкание $[O_x]$ линделёфово. Пусть $\alpha = \{[O_x] : x \in X\}$. Ясно, что покрытие $\{O_x : x \in X\}$ принадлежит равномерности U_X. Поскольку открытое покрытие $\{O_x : x \in X\}$ вписано в покрытие α, то из условия (P1) определения равномерности $\alpha \in U_X$ [15].

Достаточность. Пусть равномерность U_X содержит покрытие α, состоящее из линделёфовых подмножеств. Так как внутренность $\langle \alpha \rangle$ покрытия α принадлежит равномерности U_X, то пространство X является локально линделёфовым. (X, U_X) является равномерно локально линделёфовым, поскольку (X, U_X) содержит покрытие, состоящее из подмножеств, замыкание которых линделёфово, а всякое равномерно линделёфово пространство является равномерно паракомпактным в смысле А.А. Борубаева [12]. Паракомпактность пространства X доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.3. [18]. Для того, чтобы тихоновское пространство X было локально компактным и паракомпактным, необходимо и достаточно, чтобы его универсальная равномерность U_X содержала покрытие, состоящее из компактных подмножеств.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.4. Если равномерное пространство (X,U) является $\aleph_0$-ограниченным и равномерно локально линделёфовым, то его топологическое пространство X линделёфово.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.6. Для $\aleph_0$-ограниченных равномерных пространств (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) равномерно локально линделёфово;

2. (X,τ_U) линделёфово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1.\Rightarrow 2.$Пусть (X,U) - равномерное локально линделёфово пространство. Тогда согласно теоремам 1.6.23., 1.6.26. и предложению 1.6.25. [см. 18, стр. 120, 121 и 122] пространство (X,τ_U) является линделёфовым.

$2.\Rightarrow 1.$Обратно, пусть его топологическое пространство (X,τ_U) является линделёфовым. Тогда по теореме 1.6.26. [см. 18, стр. 122] пространство (X,U) является равномерно паракомпактным, т.е. равномерно линделёфовым. Равномерно локально линделёфовость (X,U) доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.5. Для $\aleph_0$-ограниченных равномерных пространств (X,U) следующие условия эквивалентны:

1. (X,U) равномерно линделёфово;

2. (X,τ_U) линделёфово.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.7. Для тихоновского пространства (X,τ) следующие условия эквивалентны:

1. (X,τ) линделёфово;

2. Для каждой равномерности U такой, что $\tau_U=\tau$, равномерное пространство (X,U) является равномерно локально линделёфовым.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.6. Для тихоновского пространства (X,τ) следующие условия эквивалентны:

1. (X,τ) компактно;

2. Для каждой равномерности U такой, что $\tau_U = \tau$, равномерное пространство (X,U) является равномерно локально компактным.

Следующая теорема обобщает утверждения Дж.Л. Келли о равномерно локально компактных пространствах [см. 35, стр. 280, Ф. пункт д.].

ТЕОРЕМА 3.2.5. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально линделёфово, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально линделёфово и паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует такая равномерность U, что пространство (X,U) является равномерно локально линделёфовым. Покажем локально линделёфовость и паракомпактность пространства (X,τ_U). Поскольку пространство (X,U) является равномерно локально линделёфовым, то по лемме 1.6.27. [18, стр. 122] оно является равномерно паракомпактным. Следовательно, пространство (X,τ_U) является паракомпактным. Из определения равномерно локально линделёфовости пространства (X,U) следует локальная линделёфовость пространства (X,τ_U) [76].

Достаточность. Пусть тихоновское пространство X является локально линделёфовым и паракомпактным. Наделим пространство X с равномерностью U_X, тогда U_X содержит покрытие, состоящее из линделёфовых подмножеств. Следовательно, пространство (X,U_X) является равномерно локально линделёфовым.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.7. [35]. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально компактно и паракомпактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.8. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда существует равномерность U, согласующаяся с топологией пространства X и содержащая счетное покрытие, состоящее из линделёфовых подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть тихоновское пространство X является линделёфовым и U_X - универсальная равномерность пространства X. Тогда равномерное пространство (X,U_X) является равномерно линделёфовым. Легко видеть, что равномерность U содержит счетное покрытие, состоящее из линделёфовых подмножеств.

Достаточность. Пусть существует равномерность U, согласующаяся с топологией пространства X и содержащая счетное покрытие, состоящее из линделёфовых подмножеств. Покажем, что X является линделёфовым. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда существует счетное равномерное покрытие $\beta=\{B_i : i\in N\}$, состоящее из линделёфовых подмножеств. Для каждого $i\in N$ множество B_i содержится в объединение счетного числа элементов покрытия α, т.е. $B_i \subset \bigcup\limits_{j\in N} A_j$. Тогда всевозможные множества вида $B_i \cap A_j$ образует счетное открытое покрытие и, кроме этого, оно вписано в α. Линделёфовость пространства X доказана.

Далее исследованы равномерно локально счетно компактные пространства, т.е. равномерные пространства, имеющие хотя бы одно равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого счетно компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.9. Всякое равномерно локально компактное пространство является равномерно локально счетно компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство (X,U) равномерно локально компактно. Тогда существует равномерное покрытие, замыкание каждого элемента которого компактно, т.е. счетно компактно. Следовательно, (X,U) равномерно локально счетно компактно.

ТЕОРЕМА 3.2.6. Всякое равномерно локально счетно компактное пространство является счетно равномерно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное покрытие $\alpha \in U$ таково, что замыкание каждого элемента которого счетно компактно. Тогда для каждого конечно аддитивного счетного открытого покрытия β пространства (X,U) $\alpha \succ \beta$. Из аксиомы (P1) определения равномерности [18] следует, что $\beta \in U$. Следовательно, пространство (X,U) является счетно равномерно паракомпактным.

Следующая теорема является еще одним обобщением утверждения Дж.Л. Келли о равномерно локально компактных пространствах [см. 35, стр. 280, Ф. пункт д.].

ТЕОРЕМА 3.2.7. Совместимая с топологией τ равномерность U, для которой равномерное пространство (X,U) равномерно локально счетно компактно, существует тогда и только тогда, когда пространство (X,τ) локально счетно компактно и счетно паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существует такая равномерность U, что пространство (X,U) является равномерно локально счетно компактным. Покажем, что тихоновское пространство (X,τ_U) является локально счетно компактным и счетно паракомпактным. Так как (X,U) является равномерно локально счетно компактным, то по теореме 3.2.6. оно является счетно равномерно паракомпактным, следовательно, пространство (X,τ_U) является счетно паракомпактным. Из определения равномерно локально счетно компактности пространства (X,U) следует локально счетная компактность пространства (X,τ_U).

Достаточность. Пусть X локально счетно компактно и счетно паракомпактно. Наделим пространство X равномерностью U_X, тогда U_X содержит покрытие, состоящее из счетно компактных подмножеств. Следовательно, равномерное пространство (X,U_X) является равномерно локально счетно компактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.10. Если (X,U) - предкомпактное равномерно локально счетно компактное пространство, то (X,τ_U) счетно компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - произвольное счетное покрытие пространства (X,τ_U). Тогда в силу предкомпактности и равномерно локально счетно компактности пространства (X,U) существует такое конечное равномерное покрытие β, замыкание каждого элемента которого счетно компактно. Каждое $B \in \beta$ в силу счетной компактности подпространства $[B]$ покрывается конечным числом элементов открытого покрытия α. Поскольку покрытие β конечное, то всевозможные такие конечные подсемейства образуют конечное подпокрытие покрытия α. Таким образом, доказана счетная компактность (X,τ_U).

3.3. О μ- полноте равномерных структур

Как известно, в «природе» встречаются свойства равномерных пространств более «тонкие» нежели полнота – это H-полнота равномерных пространств [18]. Естественно, возникает задача: как определяется индекс μ-полноты равномерных пространств?

Аналогичная задача для полных пространств исследовано в работе [12]. Некоторые свойства μ-полноты равномерных пространств исследованы в работе [23].

Фильтр F называется H-фильтром Коши, если $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in H$ [12], [18].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Пусть (X,U) - равномерное пространство и $H \subset U$. Равномерное пространство (X,U) называется $H-\mu$-полным, если всякий H-фильтр Коши F имеющий базу мощности $\leq \mu$, имеет по крайней мере одну точку прикосновения.

Равномерное пространство (X,U) называется H-секвенциально полным, если всякий H-фильтр Коши F имеющий счетную базу, имеет по крайней мере одну точку прикосновения.

Если система $H \subset U$ является базой равномерности U, то H-фильтр Коши будет обычным фильтром Коши. Следовательно, $H-\mu$-полнота превращается в его обычную μ-полноту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.2. Пусть (X,U) - μ-полное равномерное пространство. Наименьшее кардинальное число η называется индексом μ-полноты равномерного пространства (X,U), если существует такая система $H \subset U$, что $|H| = \eta$ и (X,U) является $H-\mu$-полным.

Наименьшее кардинальное число η называется индексом секвенциальной полноты равномерного пространства (X,U), если существует такая система $H \subset U$, что $|H| = \eta$ и (X,U) является H-секвенциально полным [31].

Индекс μ-полноты μ-полного равномерного пространства (X,U) обозначается через $ic_{\mu}(U)$, а индекс секвенциальной полноты равномерного пространства (X,U) обозначается через $ic_{\aleph_0}(U)$.

В следующей теореме характеризуется степень μ-полноты равномерных пространств.

ТЕОРЕМА 3.3.1. Для μ-полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic_{\mu}(U) = 1$;

2) (X,U) - равномерно локально μ-компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1) \Rightarrow 2)$. Пусть $H = \{\alpha\}$ и (X,U) - H-μ-полное пространство. Тогда найдется такое равномерное покрытие $\beta \in U$, состоящее из замкнутых подмножеств. Необходимо показать, что каждый элемент β состоит из μ-компактных подмножеств. Пусть B - некоторый элемент β и F_B - произвольный фильтр Коши в (B,U_B) имеющий базу мощности $\leq \mu$. Положим $F = \{N \subset X$:существует такой $N_B \in F_B$, что $N_B \subset N\}$. Покажем, что F является H-μ-фильтром Коши в (X,U). Существует такое $A_B \in \alpha_B$, что $A_B \in F_B$, так как F_B является H-μ-фильтром Коши в (B,U_B). Из $A_B \subset A$ следует, что $A \in F$. Значит, F - H-μ-фильтр Коши. Тогда F имеет точку прикосновения $x \in B$. Следовательно, точка $x \in B$ является точкой прикосновением фильтра Коши F_B, т.е. B является μ-компактным. Равномерно локально μ-компактность (X,U) доказана.

$2) \Rightarrow 1)$. Пусть (X,U) равномерно локально μ-компактно. Тогда найдется равномерное покрытие $\alpha \in U$, состоящее из μ-компактных подмножеств. Пусть $H = \{\alpha\}$. Тогда любой H -фильтр Коши F, имеющий базу мощности $\leq \mu$, имеет точку прикосновения. Следовательно, $ic_{\mu}(U) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. Для секвенциально полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic_{\aleph_0}(U)=1$;

2) (X,U) равномерно локально счетно компактно.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.2. [15]. Для полного равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1) $ic(U)=1$;

2) (X,U) равномерно локально компактно.

Равномерное пространство (X,U) называется слабо полным, если всякий максимальный фильтр Коши сходится в нем.

Всякое полное равномерное пространство является слабо полным, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Равномерное пространство (X,U) называется слабо μ-полным, если всякий максимальный фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq\mu$, сходится в нем.

Слабо $\aleph_0$-полные пространства называются слабо секвенциально полными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.1. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное отображение. Тогда, если равномерное пространство (X,U) слабо μ-полно, то равномерное пространство (Y,V) также слабо μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X,U) - слабо μ-полное пространство. Покажем, что пространство (Y,V) слабо μ-полно. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши, имеющий базу B мощности $\leq\mu$. Через ψ обозначим максимальный фильтр в (X,U), содержащий семейство $f^{-1}F=\{f^{-1}P:P\in F\}$. Покажем, что максимальный фильтр ψ является фильтром Коши. Пусть $\alpha\in U$ - произвольное покрытие. В силу дважды равномерной непрерывности отображения f существует такое $\beta\in V$, что $f^{-1}\beta\succ\alpha^{\angle}$. Пусть $E\in\beta$ - такое множество, что $E\in F$. Тогда $f^{-1}E\in\psi$. В свою очередь, для $f^{-1}E$

существует такой $A^{\angle} = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$, $A_i \in \alpha$, что $f^{-1}E \subset \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$. Поскольку ψ - максимальный фильтр и $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} A_i \in \psi$, то существует такой номер $i_0 \le n$, что $A_{i_0} \in \psi$. Значит, ψ - фильтр Коши. Теперь покажем, что семейство $f^{-1}B$ мощности $\le \mu$ является базой для ψ. Пусть $L \in \psi$ - произвольное множество. Поскольку $f\psi \subset F$, то $fL \in F$. Существует такое $N \in B$, что $N \subset fL$, т.е. $f^{-1}N \subset L$, где мощности $f^{-1}L \in f^{-1}B$. Это означает, что $f^{-1}B$ - база мощности $\le \mu$ для ψ. В силу слабой μ-полноты пространства (X,U), максимальный фильтр Коши ψ, имеющий базу мощности $\le \mu$, сходится к точке x. Тогда фильтр $f\psi$ сходится к точке fx. Следовательно, fF сходится к точке fx. Значит, пространство (Y,V) является слабо μ-полным.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.3. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное отображение. Тогда, если равномерное пространство (X,U) слабо полно, то равномерное пространство (Y,V) также слабо полно.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.4. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное отображение. Тогда, если равномерное пространство (X,U) слабо секвенциально полно, то равномерное пространство (Y,V) также слабо секвенциально полно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.2. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - совершенное равномерно непрерывное отображение. Тогда, если равномерное пространство (Y,V) слабо μ-полно, то равномерное пространство (X,U) также слабо μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (Y,V) - слабо μ-полное пространство. Покажем, что пространство (X,U) слабо μ-полно. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши в (X,U), имеющий базу B мощности $\le \mu$. Тогда фильтр fF является базисом некоторого максимального фильтра Коши и в силу слабо μ-полноты пространства (Y,V) имеет точку прикосновения $y \in Y$.

Так как отображение f совершенно, то фильтр F имеет точку прикосновения $x \in f^{-1}y$. Следовательно, пространство (X,U) является слабо μ-полным.

Из предложений 3.3.1. и 3.3.2. следует

ТЕОРЕМА 3.3.2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - совершенное дважды равномерно непрерывное отображение. Если одно из равномерных пространств (X,U) и (Y,V) слабо μ-полно, то и другое равномерное пространство также слабо μ-полно.

Тихоновское пространство X называется слабо μ-полным по Дьедонне, если на нем существует слабо μ-полная равномерность.

Слабо $\aleph_0$-полные по Дьедонне пространства называются слабо секвенциально полными по Дьедонне пространствами.

В следующей теореме при помощи универсальных равномерных структур характеризуется слабо μ-полнота по Дьедонне пространства.

ТЕОРЕМА 3.3.3. Тихоновское пространство X является слабо μ-полным по Дьедонне пространством, тогда и только тогда, когда универсальная равномерность является слабо μ-полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть тихоновское пространство X является слабо μ-полным по Дьедонне пространством. Покажем, что равномерное пространство (X,U_X) с равномерности U_X является слабо μ-полным. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши в (X,U_X) имеющий базу, мощности $\leq\mu$. В силу слабо μ-полноты по Дьедонне пространства X существует слабо μ-полная равномерность U. Так как $U_X\supset U$, то F является фильтром Коши в (X,U). Тогда F сходится к некоторой точке x в (X,U). Следовательно, равномерное пространство (X,U_X) является слабо μ-полным.

Достаточность. Пусть равномерное пространство (X,U_X) является слабо μ-полным. Тогда по определению слабо μ-полноты по Дьедонне пространства, тихоновское пространство X является слабо μ-полным по Дьедонне пространством.

СЛЕДСТВИЕ 3.3.5. Тихоновское пространство X является слабо секвенциально полным по Дьедонне пространством, тогда и только тогда, когда универсальная равномерность является слабо секвенциально полным.

3.4. Построение всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений посредством равномерных структур

Как известно А.А. Борубаевым [8] посредством равномерных структур построены паракомпактные, сильно паракомпактные, линделёфовы и полные по Дьедонне расширения тихоновских пространств.

В данном разделе с помощью равномерных структур строятся индекс компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений данного тихоновского пространства.

Пусть $(T(X), \leq)$ - частично упорядоченное множество всех тихоновских расширений тихоновского пространства X. $I(X)$ - множество всех индекс компактности $\leq \eta$ расширений, $SP(X)$ - множество всех суперпаракомпактных расширений тихоновского пространства X.

Множества $I(X)$ и $SP(X)$ являются подмножествами частично упорядоченного множества $(T(X), \leq)$ и относительно отношение порядка, индуцированного из $(T(X), \leq)$ являются частично упорядоченными множествами.

Пусть (X, U) - равномерное пространство, а $\phi(X)$ - множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X, U).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.1. Пусть (X, U) - равномерное пространство. Равномерность U называется η -предлинделёфовой, если всякое покрытие α множества X такое, что $\alpha \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \phi(X)$ принадлежит U, и она имеет базу, состоящую из покрытий мощности $\leq \eta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.2. Пусть (X, U) - равномерное пространство. Равномерность U называется предсуперпаракомпактным, если всякое покрытие α множества X такое, что $\alpha \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \phi(X)$ принадлежит U, и она имеет базу, состоящую из конечнокомпонентных покрытий.

Через $U_I(X)$ обозначим множество всех η -предлинделёфовых равномерностей тихоновского пространства X, а через $U_{SP}(X)$ - множество всех предсуперпаракомпактных равномерностей тихоновского пространства X.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Для любого тихоновского пространства X следующие частично упорядоченные множества

1) $(I(X), \leq)$ и $(U_I(X), \subset)$;

2) $(SP(X), \leq)$ и $(U_{SP}(X), \subset)$

попарно изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1). Пусть $P: U_I(X) \to I(X)$ - отображение, определенное по формуле $P(U) = v_U X$, где $v_U X$ - расширение тихоновского пространства X, полученное как пополнение пространства X по равномерности U. Далее достаточно показать, что $P(U_I(X)) = I(X)$. Пусть $U \in U_I(X)$ и $P(U) = v_U X$. Покажем, что индекс компактности пространства $v_U X$ является $\leq \eta$. Пусть $\hat{\alpha}$ - произвольное открытое покрытие пространства $v_U X$. Не ограничивая общности, можно считать, что оно состоит из канонически открытых подмножеств пространства $v_U X$. Пусть U' - универсальная равномерность пространства $v_U X$. Положим $\alpha = \{\hat{A} \cap X: \hat{A} \in \hat{\alpha}\}$. Легко видеть, что для любого минимального фильтра Коши $F \in \phi(X)$ существует фильтр окрестностей $B(x)$ некоторой точки $x \in v_U X$ такой, что $F = \{O_x \cap X: O_x \in B\}$. Следовательно, $\alpha \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \phi(U)$. Так как U является η -предлинделёфовой, то $\alpha \in U$. Легко видеть, что $[\alpha] \in \widetilde{U}$, где $[\alpha] = \left\{[A]_{v_U X}: A \in \alpha\right\}$, и $\langle[\alpha]\rangle \in U$, где $\langle[\alpha]\rangle = \left\{\left\langle[A]_{v_U X}\right\rangle_{v_U X}: A \in \alpha\right\}$. Поскольку покрытие $\hat{\alpha}$ является канонически открытым покрытием, то легко видеть, что $\hat{\alpha} = \langle[\alpha]\rangle$. Следовательно, $\hat{\alpha} \in U^{'}$. Тогда существует открытое покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \eta$ такое, что $\beta \succ \alpha$. Пусть $\hat{\beta} \in U'$ - такое открытое покрытие, что $\beta = \left\{\hat{B} \cap X: \hat{B} \in \hat{\beta}\right\}$. Легко видеть, что покрытие $\hat{\beta}$ также имеет мощность $\leq \eta$. Это вытекает из того факта, что если след покрытия из канонически открытых множеств на всюду плотное подпространство имеет мощность $\leq \eta$, то само покрытие имеет мощность $\leq \eta$. Значит, индекс компактности пространства $\nu_U X$ является $\leq \eta$. Следовательно, $P(U_I(X)) \subset I(X)$.

Обратно, пусть $\nu X \in I(X)$ и U' - универсальная равномерность пространства νX имеющая базу, состоящую из покрытий мощности $\leq \eta$. Тогда равномерность U, индуцированная равномерностью U', также имеет базу, состоящую из покрытий мощности $\leq \eta$. Покажем, что $U \in U_I(X)$. Пусть α - такое покрытие множества X, что $\alpha \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \phi(U)$. Тогда для любой точки $x \in \nu_U X$ существует окрестность $\hat{A}_x$ в $\nu_U X$ такая, что $\hat{A}_x \cap X \in \alpha$. Пусть $\hat{\alpha} = \{\langle \hat{A}_x \rangle : x \in \nu_U X\}$. Тогда из того факта, что семейство всех открытых покрытий пространства $\nu_U X$ образует базу ее универсальной равномерности U'следует, что $\hat{\alpha}$ является равномерным покрытием относительно U'. Легко видеть, что покрытие $\hat{\alpha} \wedge \{X\}$ вписано в покрытие α. Отсюда вытекает, что $\alpha \in U$. Очевидно, $P(U) = \nu X$. Следовательно, $I(X) \subset P(U_I(X))$.

2) Для доказательства этого пункта достаточно показать, что $P(U_{SP}(X)) = SP(X)$. Пусть $U \in U_{SP}(X)$, $P(U) = \nu_U X$ и $\widehat{U}$- универсальная равномерность пространства $\nu_U X$. Покажем, что пространство $\nu_U X$ является суперпаракомпактным. Пусть $\hat{\alpha}$ - произвольное открытое покрытие пространства $\nu_U X$, т.е. $\hat{\alpha} \in \widehat{U}$. Тогда по условию существует конечнокомпонентное открытое покрытие $\beta \in U$, вписанное в α, где $\alpha \rightleftarrows \{\hat{A} \cap X : \hat{A} \in \hat{\alpha}\}$. Пусть $\hat{\beta} \in \widehat{U}$ такое покрытие, что $\beta = \{\hat{B} \cap X : \hat{B} \in \hat{\beta}\}$. Легко видеть, что $\hat{\beta}$ является конечнокомпонентным покрытием, и оно вписано в покрытие $\hat{\alpha}$. Следовательно,$P(U_{SP}(X)) \subset SP(X)$. Теперь докажем справедливость обратного включения, пусть $\nu X \in SP(X)$ и U' - универсальная равномерность пространства νX имеющая базу, состоящую из конечнокомпонентных покрытий. Тогда равномерность U, индуцированная равномерностью U', также имеет базу, состоящую из конечнокомпонентных покрытий. Легко видеть, что если покрытие α пространства X такое, что $\alpha \cap$

$F \neq \emptyset$ для любого $F \in \phi(X)$, то оно принадлежит U. Также легко видеть, что $P(U) = \nu X$. Значит, $SP(X) \subset P(U_{SP}(X))$.

ЛЕММА 3.4.1. Пусть (X, U) - равномерное пространство, $(\tilde{X}, \widetilde{U})$ - его пополнение. Если α - равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств, то $(\tilde{X}, \widetilde{U})$ является равномерно локально компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α - такое равномерное покрытие пространства (X, U), которое состоит из предкомпактных подмножеств. Тогда $\tilde{\alpha} = \{\tilde{A}: A \in \alpha\}$, где$\tilde{A} = \tilde{X} \backslash [X \backslash A]_{\tilde{X}}$, является равномерным покрытием пополнения $(\tilde{X}, \widetilde{U})$. Легко видеть, что $[\tilde{A}]_{\tilde{X}}$ является компактным для любого $A \in \alpha$. Следовательно, $(\tilde{X}, \widetilde{U})$ является равномерно локально компактным.

ТЕОРЕМА 3.4.2. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и индекс компактности $\leq \eta$ расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства X, содержащих равномерное покрытие мощности $\leq \eta$, состоящее из предкомпактных подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следуют из теоремы 3.4.1, теоремы 3.2.2 и леммы 3.4.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.4.1. [18]. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и линделёфовых расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства *X*, содержащих счетное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

ТЕОРЕМА 3.4.3. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и суперпаракомпактных расширений данного тихоновского пространства X и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства *X*, содержащих конечнокомпонентное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следуют из теоремы 3.4.1, предложения 3.1.7. [см. 12, стр. 128] и леммы 3.4.1.

ТЕОРЕМА 3.4.4. Существует изоморфизм между частично упорядоченным множеством всех локально компактных и сильно паракомпактных расширений данного тихоновского пространства *X* и частично упорядоченным множеством всех предуниверсальных равномерностей пространства *X*, содержащих звездно конечное равномерное покрытие, состоящее из предкомпактных подмножеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следуют из теоремы 3.1.6, предложения 3.1.7. [см. 12, стр. 125 и 128] и леммы 3.4.1.

3.5. Заключение по главе 3

В главе 3 найдены характеристики важнейших свойств типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур: компактность, линделёфовость, μ-компактность и μ-паракомпактность, слабая μ-полнота по Дьедонне.

Установлены характеристики локально компактных паракомпактных и близких к ним пространств при помощи равномерных структур и μ-полноты равномерных пространств.

Построены всех индекса компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширения данного тихоновского пространства с помощью его равномерных структур.

ГЛАВА 4. РАВНОМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ГРУППАХ И ОТОБРАЖЕНИЯ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В данной главе исследованы подгруппы сильно паракомпактных, суперпаракомпактных и индекса компактности $\leq \eta$ топологических групп, локально линделёфовы, локально счетно компактные и μ-полные группы, а также (квази)совершенные отображения и ω-отображения равномерных пространств.

4.1. Равномерные структуры на группах

Пусть $(G,\cdot,\tau)$ - топологическая группа, а $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

В следующих теоремах получены характеристики подгрупп индекс компактности $\leq \eta$, суперпаракомпактных и сильно паракомпактных топологических групп.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторого индекса компактности $\leq \eta$ топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является η -предлинделёфовой равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть тройка $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторого индекса компактности $\leq \eta$ топологической группы $(\tilde{G},\cdot\tilde{\tau})$. Пусть $\tilde{U}$ - универсальная равномерность топологического пространства $(\tilde{G},\tilde{\tau})$. Поскольку замыкание подгрупп в топологической группе есть топологическая группа и замкнутое подпространство индекса компактности $\leq \eta$ топологической группы есть индекса компактности $\leq \eta$ топологической группы, то подгруппа $(G,\cdot)$ является всюду плотной подгруппой топологической группы $(G,\cdot,\tau)$. Пусть U - равномерность на $(G,\cdot,\tau)$, индуцированной равномерности $\tilde{U}$. Тогда по теореме 3.4.1 U является η - предлинделёфовой равномерностью и $\tau_U = \tau$. Далее, если $(G,\cdot)$ - группа, U - произвольная равномерность на $(G,\cdot,\tau)$, а $(\tilde{G},\tilde{U})$- пополнение пространства (G,U) то, чтобы продолжить групповую операцию с $(G,\cdot,\tau_U)$ на $(\tilde{G},\tau_{\tilde{U}})$ с сохранением непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы $(G,\cdot,U)$ была равномерной группой (см. [12], стр.138, теорема 3.3.6.) . Это означает, что $(G,\cdot,U)$ является равномерной группой.

Достаточность. Пусть на G существует равномерность U, удовлетворяющая условию теоремы. Тогда $(\tilde{G},\cdot,\tau_{\tilde{U}})$ является топологической группой. По теореме 3.4.1. индекс компактности топологической группы $(\tilde{G},\cdot,\tau_{\tilde{U}})$ будет $\leq \eta$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.1. [12]. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой линделефовой топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является предлинделёфовой равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ТЕОРЕМА 4.1.2. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой суперпаракомпактной топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является предсуперпаракомпактной равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следуют из теоремы 3.3.6 [см. 12, стр.138] и 3.4.1.

ТЕОРЕМА 4.1.3. Топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является подгруппой некоторой сильно паракомпактной топологической группы тогда и только тогда, когда на (G,τ) существует равномерность U, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau_U = \tau$;

2) U является сильно предпаракомпактной равномерностью;

3) $(G,\cdot,U)$ - равномерная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следуют из теорем 3.3.6 [см. 12, стр. 138] и 3.1.6 [см. 12, стр. 125].

В следующей теореме устанавливается паракомпактность всякой локально линделёфовой топологической группы.

ТЕОРЕМА 4.1.4. Локально линделёфова топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является паракомпактной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является локально линделёфовой. Тогда существует такая окрестность O нейтрального элемента e, замыкание которой линделёфово. Легко видеть, что равномерное пространство (G,U_R) содержит равномерное покрытие, состоящее из подмножеств, замыкания которых линделёфовы т.е. является равномерно локально линделёфовым в смысле Б.А. Пасынкова [76]. Тогда, согласно теореме 1.6.23 и предложения 1.6.25 [см. 15, стр. 120 и 121], группа $(G,\cdot,\tau)$ является паракомпактным.

Следующая теорема устанавливает счетной паракомпактности всякой локально счетно компактной группы.

ТЕОРЕМА 4.1.5. Локально счетная компактная топологическая группа $(G,\cdot,\tau)$ является счетно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(G,\cdot,\tau)$ - локально счетно компактная топологическая группа. Тогда для каждой точки пространства G, в том числе нейтрального элемента e существует окрестность O, замыкание которой счетно компактно. Легко видеть, что равномерное пространство (G,U_R)

является равномерно локально счетно компактным. Тогда согласно предложению 3.2.2, и теоремы [см. 15, стр. 120 и 121] группа $(G,\cdot,\tau)$ является паракомпактным.

Топологическая группа G называется μ-полно по Вейлю (соответственно μ-полной по Райкову), если она μ-полна относительно правой (соответственно двусторонней) равномерной структуры.

Топологическая группа G называется секвенциально полной по Вейлю (соответственно секвенциально полной по Райкову), если она секвенциальна полна относительно правой (соответственно двусторонней) равномерной структуры.

ЛЕММА 4.1.1. Пусть отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) является равномерно открытым, а (Y,V) и прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y\in Y$ являются μ-полными. Тогда равномерное пространство (X,U) является μ-полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - произвольный минимальный фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq\mu$. Покажем, что fF фильтр Коши в (Y,V) имеющий базу мощности $\leq\mu$. Пусть $\beta\in V$ - произвольное покрытие пространства (Y,V). Тогда $f^{-1}\beta=\alpha$ является равномерным покрытием пространства (X,U). Поэтому существует такое $A\in\alpha$, что $A\in F$. Следовательно, $B\in fF$, $B\in\beta$, где $fA=B$. Поскольку (Y,V) μ-полно, то fF сходится к некоторой точке $y\in Y$. Пусть $\alpha\in U$ - произвольное открытое покрытие. Тогда $f\alpha\in V$ - открытое равномерное покрытие пространства (Y,V) и $f\alpha(y)\in fF$, т.е. $f\alpha(y)\cap fL\neq\varnothing$ для любого $fL\in fF$. Следовательно, $\alpha(f^{-1}y)\cap L\neq\varnothing$ для любого $L\in F$. Легко видеть, что $f^{-1}y\cap\alpha(L)\neq\varnothing$. Положим $\{\alpha(L):\alpha\in U, L\in F\}$. Ясно, что последнее является базой минимального фильтра Коши F. Поэтому $f^{-1}y\cap L\neq\varnothing$ для любого $L\in F$. Положим $F'=\{f^{-1}y\cap L: L\in F\}$. Тогда F' - фильтр Коши в $(f^{-1}y,U_{f^{-1}y})$, имеющий базу мощности $\leq\mu$. В силу μ-полноты пространства $(f^{-1}y,U_{f^{-1}y})$ F' сходится к точке $x \in f^{-1}y$. Тогда F тоже сходится к точке x. Следовательно, (X,U) μ-полное пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.1. Если топологическая группа G имеет μ-полный по Вейлю нормальный делитель H, фактор-группа $G' = G/H$ по которой также μ-полна по Вейлю, то и сама группа G μ-полна по Вейлю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 4.1.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.2. Если топологическая группа G имеет μ-полный по Райкову нормальный делитель H, фактор-группа $G' = G/H$ по которой также μ-полна по Райкову, то и сама группа G μ-полна по Райкову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из леммы 4.1.1.

ЛЕММА 4.1.2. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение. Если N - база фильтра Коши в (X,U) мощности $\leq \mu$, то $fN = \{fB : B \in N\}$ является базой фильтра Коши в (Y,V) мощности $\leq \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in U$. Тогда $f^{-1}\beta \in U$. Пусть F - фильтр Коши в (X,U), имеющую базу N мощности $\leq \mu$. Тогда $f^{-1}\gamma \cap F = \varnothing$, т.е. найдется $\Gamma \in \gamma$ такое, что $f^{-1}\Gamma \in F$. Следовательно, найдется $B \in N$ такое, что $B \subset f^{-1}\Gamma$, т.е. $fB \subset \Gamma$. Положим $F' = \{A \subset Y :$ найдется такое $C \in B$, что $fC \subset A\}$. Тогда F' - фильтр в (Y,V). Легко видеть, что F' является фильтром Коши в (Y,V), имеющий базу fN мощности $\leq \mu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.3. Произведение любого числа μ-полных по Вейлю (соответственно по Райкову) групп μ-полно по Вейлю (соответственно по Райкову).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, в произведении семейства $\{G_a : a \in M\}$ топологических групп правая (двусторонняя) равномерная структура есть произведение правых (двусторонних) равномерных структур групп G_a. Доказательство проведем для правой равномерной структуры. Пусть $(G,U^R) = \prod_{a \in M}(G_a,U_a^R)$ - произведение семейства μ-полных правых равномерных структур $\{(G_a,U_a^R) : a \in M\}$, а F - минимальный фильтр Коши в (G,U^R), имеющий базу B мощности $\leq \mu$. Положим $B_a = P_a(B)$, где $P_a : G \to G_a$. По лемме 4.1.2. B_a есть база мощности $\leq \mu$ минимального фильтра Коши F_a в (G_a, U_a^R). Поскольку правая равномерная структура (G_a, U_a^R) μ-полна, то минимальный фильтр Коши F_a сходится к некоторой точке x_a пространства (G_a, U_a^R). Покажем, что минимальный фильтр Коши F в (G, U^R), имеющий базу B мощности $\leq \mu$ сходится к точке $x = \{x_a\}$, $a \in M$. Пусть V - окрестность единицы. Тогда Vx окрестность точки x в (G, τ). Положим $Vx = Vx_{a_1} \times Vx_{a_2} \times ... \times Vx_{a_n} \times \prod \{G_a : a \in M \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}\}$, где Vx_{a_i} - окрестность точки x_{a_i} в (G_{a_i}, τ_{a_i}), $i = 1,2,...,n$. $Vx = \bigcap_{i=1}^{n} P_{a_i}^{-1} Vx_{a_i} \in F$, так как $Vx_{a_i} \in F_{a_i}$. Следовательно, произведение $\prod_{a \in M} (G_a, U_a^R)$ μ-полно по Вейлю.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.2. Любое произведение секвенциально полных по Вейлю (секвенциально полных по Райкову) групп секвенциально полно по Вейлю (секвенциально полно по Райкову).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.4. Всякая полная по Вейлю (полная по Райкову) группа μ-полна по Вейлю (μ-полна по Райкову).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - полная группа по Вейлю (по Райкову). Пусть F - произвольный фильтр Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$. Тогда он сходится к некоторой точке $x \in G$. Следовательно, группа G μ-полна по Вейлю (μ-полна по Райкову).

СЛЕДСТВИЕ 4.1.3. Всякая полная по Вейлю (по Райкову) группа секвенциально полна по Вейлю (секвенциально полна по Райкову).

ЛЕММА 4.1.3. Пусть (X, U) - равномерное пространство веса μ. Если (X, U) - μ-полно, то оно полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство (X, U) μ-полно и F - произвольный фильтр Коши в (X, U). Тогда существует минимальный фильтр Коши F_0 такой, что $F_0 \subset F$. Покажем, что минимальный фильтр Коши F_0 имеет базу мощности $\leq \mu$. Так как равномерное пространство (X, U) имеет вес μ, то существует база B равномерности U мощности $\leq \mu$. Положим $A = \{\alpha(L) : \alpha \in B\}$, где L - фиксированный элемент F_0. Тогда легко видеть, что семейство A - образует базу фильтра Коши F_0 и оно имеет мощность $\leq \mu$. Так как (X,U) μ-полно, то F_0 сходится к некоторой точке $x \in X$. Поэтому F тоже сходится к этой точке $x \in X$. Следовательно, (X,U) полно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.5. Пусть G - топологическая группа веса μ. Если G μ-полно по Вейлю (μ-полно по Райкову), то G полно по Вейлю (μ-полно по Райкову).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 4.1.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.4. Пусть G - метризуемая топологическая группа. Если G секвенциально полно по Вейлю (секвенциально полно по Райкову), то G полно по Вейлю (полно по Райкову).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.6. Если топологическая группа G μ-полна по Вейлю, то она μ-полна по Райкову.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - произвольный фильтр Коши в (G,U_T) имеющий базу мощности $\leq \mu$. Тогда F - фильтр Коши и в (G,U_R). В самом деле, если $\alpha \in U_R$, то $\alpha \in U_T$. Ясно, что $\alpha \cap F \neq \varnothing$. Так как (G,U_R) μ-полно, т.е. группа G μ-полна по Вейлю, то F сходится в G. Следовательно, (G,U_T) μ-полно, т.е. группа G μ-полна по Райкову.

СЛЕДСТВИЕ 4.1.5. Если топологическая группа G секвенциально полна по Вейлю, то она секвенциально полна по Райкову.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.7. Пусть $f : G \to G'$ - непрерывный предкомпактный гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G'. Тогда, если G μ-полно, то G' тоже μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - произвольный фильтр Коши в (G',V_R) имеющий мощности $\leq \mu$. Тогда $f^{-1}F$ является фильтром в G. Пусть ξ - ультрафильтр, содержащий фильтр $f^{-1}F$. Докажем, что ξ является фильтром Коши. Пусть α - произвольное равномерное покрытие. Тогда существуют такие покрытие $\beta \in V_R$ и конечное покрытие $\gamma \in U_R$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Так как - F фильтр Коши в (G', V_R) имеющий мощности $\leq \mu$, то $\beta \cap F \neq \varnothing$, т.е. существует $B \in \beta$ такой, что $B \in F$. Ясно, что $f^{-1}B \in \xi$. Так как ξ - ультрафильтр и $f^{-1}B = \bigcup_{i=1}^{n}(f^{-1}B \cap \Gamma_i)$, $\Gamma_i \in \gamma$, $i = 1,2,...,n$, то существует $k \leq n$, что $f^{-1}B \cap \Gamma_k \in \eta$. Далее из $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ следует, что $f^{-1}B \cap \Gamma_k \subset A$, $A \in \alpha$, а из свойства ультрафильтра следует $A \in \xi$. В силу μ-полноты пространства (G, U_R) фильтр Коши ξ сходится к некоторой точке $x \in G$. Следовательно, фильтр Коши F в (G', V_R), имеющий мощность $\leq \mu$, сходится к точке $fx \in G'$. Значит, (G, V_R) μ-полно.

4.2. (Квази)совершенные отображения и ω -отображения равномерных пространств

Класс совершенных отображений был введен и изучен И.А. Вайнштейном [20], а класс квазисовершенных отображений К. Моритой [75]. Как известно, класс совершенных отображений играют среди всех непрерывных отображений роль, сходную с ролью компактов среди всех топологических пространств, и они используются достаточно широко. Они сохраняют важнейшие топологические свойства, как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

В этом разделе изучены совершенные и квазисовершенные отображения и ω -отображения равномерных пространств.

Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ - непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ). Будем говорить, что пара равномерных структур U на X и V на Y согласуются, если 1) $\tau_U=\tau$ и $\mu_V=\mu$; 2) $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывно.

Следующая теорема распространяет на отображения такой фундаментальный результат: тихоновское пространство X компактно тогда и только тогда, когда для любой равномерности U в X, согласующейся с топологией пространства X, равномерное пространство (X,U) является полным.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) является совершенным тогда и только тогда, когда для любых пар согласованных равномерных структур U на X и V на Y, отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ - непрерывное отображение топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) является совершенным, а U и V -

согласованные равномерные структуры на X и на Y, соответственно. Покажем, что $f:(X,U)\to(Y,V)$ является полным. Пусть F - такой фильтр Коши в равномерном пространстве (X,U), что fF сходится к точке $y\in Y$. Так как отображение f совершенно, то $f^{-1}y$ компактно. Следовательно, F имеет точку прикосновения $x\in f^{-1}y$, а в равномерном пространстве всякая точка прикосновения является предельной точкой поэтому, точка x является пределом фильтра Коши F. Значит отображение f полно.

Необходимость. Пусть отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ полно. Покажем, что отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ является совершенным. Из предложения 0.5.12 [см. 12, стр. 28] следует, что отображение $f:(X,U_p)\to(Y,V_p)$, где U_p - предкомпактная рефлекция равномерности U, а V_p - предкомпактная рефлекция равномерности V является равномерно непрерывным, кроме того $\tau_U=\tau_{U_p}=\tau$ и $\mu_V=\mu_{V_p}=\mu$, т.е. пара равномерных структур U_p на X и V_p на Y согласуются. Ясно, что отображение $f:(X,U_p)\to(Y,V_p)$ является предкомпактным. Следовательно, по теореме 2.3.15. [см. 12, стр. 103] отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является равномерно совершенным. Значит, отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ совершенно.

Напомним [40], что отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) называется послойно компактным, если для каждого $y\in Y$ подмножество $f^{-1}y$ является компактным.

Отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется послойно полным, если для каждого $y\in Y$ пространство $(f^{-1}y,U_{f^{-1}y})$ является полным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.1. Непрерывное отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ топологического пространства (X,τ) в топологическое пространство (Y,μ) является послойно компактным тогда и только тогда, когда для любых пар согласованных равномерных структур U на X и V на Y, отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является послойно полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ послойно компактно, U и V - согласованные равномерности на X и на Y соответственно. Покажем, что $f:(X,U)\to(Y,V)$ является послойно полным. В силу послойной компактности отображения f подмножество $f^{-1}y$ является компактным для каждого $y\in Y$. Тогда легко видеть, что для каждого $y\in Y$ пространство $(f^{-1}y,U_{f^{-1}y})$ является полным. Следовательно, отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является послойно полным.

Необходимость. Пусть отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является послойно полным. Покажем, что отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ является послойно компактным. Тогда отображение $f:(X,U_p)\to(Y,V_p)$, где U_p - предкомпактная рефлекция [12] равномерности U, а V_p - предкомпактная рефлекция равномерности V является равномерно непрерывным. Поскольку отображение f послойно полно, то $(f^{-1}y,U_{f^{-1}y})$ полно для любого $y\in Y$. В силу предкомпактности пространства (X,U_p) подпространство $(f^{-1}y,U_{f^{-1}y})$ является предкомпактным. Следовательно, отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\mu)$ является послойно компактным.

Роль совершенных отображений равномерных пространств среди всех непрерывных отображений в какой-то степени вскрывается следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.2.2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - совершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства сохраняются в сторону прообраза:

1) (μ)-полнота;

2) индекс (μ)-полноты $\leq\eta$;

3) равномерно локальная (μ)-компактность;

4) равномерная (μ)-полнота по Чеху;

5) равномерная R-паракомпактность;

6) сильно равномерная R-паракомпактность;

7) равномерная R-суперпаракомпактность;

8) счетная равномерная R-паракомпактность;

9) равномерная A-паракомпактность;

10) сильно равномерная A-паракомпактность;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем пункты 1) и 2) параллельно. Пусть $P \subset V$ - такое семейство покрытий, что пространство (Y,V) является (μ)-полным и $ic_{\mu}(V) = |P|$. Пусть $H = \{f^{-1}\beta : \beta \in P\}$ и F - произвольный фильтр Коши в (X,U) (имеющий базу мощности $\leq \mu$). Тогда фильтр fF является фильтром Коши в (Y,V) (имеющий базу мощности $\leq \mu$). В силу (μ)-полноты пространства (Y,V) фильтр Коши fF имеет точку прикосновения y в (Y,V). Поскольку отображение f совершенно, то фильтр F имеет точку прикосновения $x \in f^{-1}y$. Следовательно, пространство (X,U) является (μ)-полным.

Доказательства 3) и 4) следуют из пункта 1) при $\eta = 1$ и $\mu = \aleph_0$ соответственно.

Пункты 5) - 10) доказываются аналогично, поэтому докажем пункт 8). Пусть α - произвольное конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда из компактности отображения f следует, что $\{f^{-1}y : y \in Y\} \succ \alpha$, а из замкнутости отображения f следует, что $\lambda = \{f^{\#}A : A \in \alpha\}$, где $f^{\#}A = Y \setminus f(X \setminus A)$. Из утверждения следует, что отображения $\beta^{\angle} \in V$. Легко видеть, что $f^{-1}\beta^{\angle} \succ \alpha$. Значит, (X,U) - счетно равномерно R-паракомпактное пространство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.2. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - μ-квазисовершенное непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на слабо μ-

полное равномерное пространство (Y,V). Тогда равномерное пространство (X,U) также слабо μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (Y,V) - слабо μ-полное пространство. Покажем, что пространство (X,U) слабо μ-полно. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши в (X,U), имеющий базу B мощности $\leq\mu$. Тогда fF является максимальным фильтром Коши в (X,U), содержащий базу $fB=\{fN:N\in B\}$ мощности $\leq\mu$. В силу слабо μ-полноты пространства (Y,V) fF сходится к точке $y\in Y$. Следовательно, пространство (X,U) является слабо μ-полным.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.1. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - квазисовершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на слабо секвенциально полное равномерное пространство (Y,V). Тогда равномерное пространство (X,U) также слабо секвенциально полно.

Следующая теорема обобщает теоремы А.А. Борубаева [см. 12, с. 48, теорема 1.2.10].

ТЕОРЕМА 4.2.3. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное μ-квазисовершенное отображение. Если одно из равномерных пространств (X,U) и (Y,V) слабо μ-полно, то и другое равномерное пространство также слабо μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следуют из предложений 3.3.1. и 4.2.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.2. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - дважды равномерно непрерывное квазисовершенное отображение. Если одно из равномерных пространств (X,U) и (Y,V) слабо секвенциально полно, то и другое равномерное пространство также слабо секвенциально полно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется равномерно квазисовершенным, если оно одновременно предкомпактно и квазисовершенно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.3. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) и $g:(Y,V)\to(Z,W)$ равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (Z,W). Если отображения f и $g\circ f$ являются равномерно открытыми и равномерно квазисовершенными, то отображение g также является равномерно открытым и равномерно квазисовершенным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что отображение $g:(Y,V)\to(Z,W)$ равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (Z,W) является равномерно открытым. Пусть $\lambda\in V$ - произвольное открытое равномерное покрытие. В силу равномерной непрерывности отображения f покрытие $f^{-1}\lambda\in U$ является открытым, а в силу равномерной открытости отображения $g\circ f$ покрытие $(g\circ f)f^{-1}\lambda=g\circ\lambda$ является открытым равномерным покрытием пространства (Z,W). Это означает, что отображение g является равномерно открытым. Далее докажем, что отображение g является предкомпактным. Пусть $\alpha\in V$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда $f^{-1}\alpha\in U$. Существуют такие открытое конечное равномерное покрытие $\gamma\in U$ и $\beta\in W$, что $(g\circ f)^{-1}\beta\wedge\gamma\succ f^{-1}\alpha$. Отсюда следует, что $f(f^{-1}(g^{-1})\beta\wedge f\gamma\succ ff^{-1}\alpha$ и $g^{-1}\beta\wedge f\gamma\succ\alpha$. Поскольку отображение f равномерно открыто, то $f\gamma\in V$. Следовательно, g предкомпактно. Теперь докажем, что отображение $g:(Y,V)\to(Z,W)$ равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (Z,W) является квазисовершенным. Пусть N - замкнутое подмножество пространства (Y,V). В силу замкнутости отображения f множество $f^{-1}N$ является замкнутым подмножеством пространства (X,U). Тогда подмножество $(g\circ f)(f^{-1}N)=g(f(f^{-1}N))=g(N)$ является замкнутым в пространстве (Z,W). Следовательно, отображение g замкнутое. Пусть $z\in Z$ - произвольная точка. Так как отображение $g\circ f$ является равномерно квазисовершенным, то $(g\circ f)^{-1}z$ является счетно компактным в (X,U), но $f(g\circ f)^{-1}z = f(f^{-1}(g^{-1}z)) = g^{-1}z$. Следовательно, отображение g является квазисовершенными. Таким образом, g является равномерно открытым и равномерно квазисовершенным отображением.

В следующем предложении найдена одна характеристика равномерно M-пространства [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.4. Если равномерное пространство (X,U) является равномерно квазисовершенным прообразом метризуемого пространства, то (X,U) является равномерно M-пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно квазисовершенное отображение равномерного пространства (X,U) на метризуемое равномерное пространство (Y,V). Тогда существует нормальная последовательность $\{\alpha_n\}\subset V$ равномерных покрытий. Для каждого $n\in N$ обозначим $\beta_n = f^{-1}\alpha_n$. Тогда $\{\beta_n\}\subset U$ является нормальной последовательности. Если $x\in X$ и $\{x_n\}$ - некоторая последовательность в (X,U) такая, что $x_n\in\beta_n(x)$, то $f(x_n)\in\alpha_n(f(x))$. Следовательно, последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет предельную точку $f(x)$ в (Y,V). Так как отображение f равномерно квазисовершенно, то последовательность $\{x_n\}$ имеет предельную точку в (X,U). Это означает, что нормальная последовательность $\{\beta_n\}\subset U$ удовлетворяет условию (М) [см. 16, стр. 70]. Значит, равномерное пространство (X,U) является равномерно M-пространством.

Роль равномерно квазисовершенных отображений среди всех равномерно непрерывных отображений в какой-то степени вскрывается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 4.2.4. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно квазисовершенное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняются как в сторону образа, так и в сторону прообраза:

1. предкомпактность;

2. τ-ограниченность;

3. слабая секвенциальная полнота;

4. счетная равномерная паракомпактность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем пункт 1, а пункт 2 доказывается аналогично. Пусть (X,U) - предкомпактное пространство и $\beta \in V$ - произвольное покрытие. В силу равномерной непрерывности отображения f $f^{-1}\beta \in U$, а в силу предкомпактности пространства (X,U), покрытие $f^{-1}\beta$ имеет конечное подпокрытие $\{f^{-1}B_1, f^{-1}B_2,..., f^{-1}B_n\}$. Тогда семейство $\{B_1, B_2,..., B_n\}$ является конечным подпокрытием покрытия β. Следовательно, пространство (Y,V) является предкомпактным. Обратно, пусть пространство (Y,V) предкомпактно. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда в силу предкомпактности отображения f существуют такие конечное покрытие $\gamma \in U$ и $\beta \in V$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Из покрытия β выделим конечное подпокрытие β_0. Тогда конечное покрытие $f^{-1}\beta_0 \wedge \gamma$ будет вписанным в покрытие α. Следовательно, (X,U) предкомпактно.

Докажем пункт 3. Пусть (X,U) - слабо секвенциально полное пространство. Покажем, что пространство (Y,V) слабо секвенциально полно. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши, имеющий счетную базу B. Тогда существует максимальный фильтр ξ в (X,U), содержащий семейство $f^{-1}F = \{f^{-1}P : P \in F\}$. Покажем, что ξ является фильтром Коши. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное покрытие. В силу предкомпактности отображения f существуют такие покрытие $\beta \in V$ и конечное покрытие $\gamma \in U$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Тогда существует такое $L \in \beta$, что $L \in F$. Ясно, что $f^{-1}L \in \xi$. Так как ξ - максимальный фильтр, то существует такой номер $i_0 \le n$, что $\Gamma_{i_0} \in \xi$. Но $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$, поэтому существует такой $A \in \alpha$, что $f^{-1}L \cap \Gamma_{i_0} \subset A$. Следовательно, $A \in \xi$, т.е. $\alpha \cap \xi \ne \varnothing$. Легко видеть, что $f^{-1}B$ является счетной базой для ξ. В силу слабо секвенциальной полноты пространства (X,U), максимальный фильтр Коши ξ, имеющий счетную базу, сходится к точке x. Тогда фильтр $f\xi$ сходится к точке fx. Следовательно, F сходится к точке fx. Значит пространство (Y,V) является слабо секвенциально полным. Обратно, пусть (Y,V) - слабо секвенциально полное пространство. Покажем, что пространство (X,U) является слабо секвенциально полным. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши в (X,U) со счетной базой B. Легко видеть, что fF является максимальным фильтром Коши в (X,U), содержащий счетную базу $fB=\{fN:N\in B\}$. Поскольку пространство (Y,V) слабо секвенциально полно, то fF сходится к точке $y\in Y$. Следовательно, (X,U) слабо секвенциально полно.

Теперь докажем пункт 4. Пусть (X,U) счетно равномерно паракомпактное пространство и β - некоторое конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (Y,V). Тогда $f^{-1}\beta$ является конечно аддитивным счетным открытым покрытием пространства (X,U). Тогда по теореме [см. 72, стр. 321] оно является равномерным покрытием. Поскольку отображение f является предкомпактным, то существуют такие покрытие $\lambda\in V$ и конечное покрытие $\gamma\in U$, что $f^{-1}\lambda\wedge\gamma\succ f^{-1}\beta$. Легко видеть, что $(f^{-1}\lambda\wedge\gamma)^{\angle}\succ(f^{-1}\beta)^{\angle}$, т.е. то $(f^{-1}\lambda)^{\angle}\succ f^{-1}\beta^{\angle}$. Следовательно, $\lambda\succ\beta$. Тогда $\beta\in V$. Значит пространство (Y,V) счетно равномерно паракомпактно. Теперь, пусть (Y,V) счетно равномерно паракомпактно и α - произвольное конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда из квазисовершенности отображения f следует, что $\{f^{-1}y:y\in Y\}$ вписано в покрытие α. Из замкнутости отображения f следует, что отображения $\beta=\{f^{\#}A:A\in\alpha\}$, где $f^{\#}A=Y\setminus f(X\setminus A)$ является открытым покрытием пространства (Y,V). Тогда по пункту 1) [см. 72, стр. 320] $\beta^{\angle}\in V$. Заметим, что $f^{-1}\beta^{\angle}\succ\alpha$, т.е. $\alpha\in U$. Следовательно, по предложению 3. [см. 72, стр. 321] пространство (X,U) является счетно равномерно паракомпактным.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.3. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно совершенное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Тогда следующие свойства равномерных пространств сохраняются как в сторону образа, так и в сторону прообраза:

1. предкомпактность;
2. τ -ограниченность;
3. слабая секвенциальная полнота;
4. счетная равномерная паракомпактность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.5. При равномерно открытых квазисовершенных отображениях счетная равномерная паракомпактность сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно открытое квазисовершенное отображение счетно равномерно паракомпактного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Покажем, что равномерное пространство (Y,V) является счетно равномерно паракомпактным. Пусть λ - произвольное открытое покрытие пространства (Y,V). В силу равномерной непрерывности отображения f покрытие $\gamma=f^{-1}\lambda$ является открытым покрытием пространства (X,U). Поскольку пространство (X,U) счетно равномерно паракомпактно, то $\gamma^{\angle}\in U$. Ясно, что $f\gamma^{\angle}=\lambda^{\angle}$. В силу равномерной открытости отображения f имеем $\lambda^{\angle}\in V$. Следовательно, пространство (X,U) является счетно равномерно паракомпактным.

Сохранение счетно равномерно паракомпактности в сторону прообраза при равномерно открытых квазисовершенных отображениях, следует из теоремы 4.2.4.

μ-полные отображения исследованы в работе [31]. Далее исследованы слабо μ-полные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.2. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется слабо μ-полным, если всякий максимальный фильтр Коши F, имеющий базу мощности $\leq \mu$ в (X,U), для которого fF сходится в (Y,V), сходится в (X,U).

Слабо $\aleph_0$-полные отображения называются слабо секвенциально полными.

Ясно, что если f слабо μ-полно и $Y = \{y\}$, то (X,U) слабо μ-полно.

ТЕОРЕМА 4.2.5. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Если (Y,V) и f слабо μ-полны, то (X,U) также слабо μ-полно, обратно, если (X,U) слабо μ-полно, то и f слабо μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - слабо μ-полное отображение пространства (X,U) на слабо μ-полное пространство (Y,V). Докажем, что пространство (X,U) является слабо μ-полным. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши в (X,U), имеющий базу мощности $\leq \mu$. Тогда fF является максимальным фильтром Коши, имеющий базу мощности $\leq \mu$ в (Y,V). В силу μ-полноты пространства (Y,V), он сходится к некоторой точке $y \in Y$. Так как отображение в f слабо μ-полное, то F сходится к точке $x \in f^{-1}y$. Следовательно, пространство (X,U) является слабо μ-полным.

Обратно, пусть (X,U) - слабо μ-полно. Покажем, что f является слабо μ-полным. Пусть F - произвольный максимальный фильтр Коши в (X,U), имеющий базу мощности $\leq \mu$. Пусть fF сходится в (Y,V). Тогда в силу μ-полноты пространства (X,U), он сходится в (X,U). Следовательно, f является слабо μ-полным.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.4. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V). Если (Y,V) и f слабо секвенциально полно, то (X,U) также слабо секвенциально полно, обратно, если (X,U) слабо секвенциально полно, то и f слабо секвенциально полно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.6. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - квазисовершенное отображение равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) и ω - произвольное конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (X,U). Тогда f является ω-отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - квазисовершенное отображение и ω - произвольное конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (X,U). Из счетной компактности отображения f получаем, что $\{f^{-1}y: y\in Y\}\succ\omega$. Для каждого $f^{-1}y$ существует такие $L_1,L_2,...,L_n\in\omega$, что $f^{-1}y\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}L_i$. Пусть $L_y=\bigcup\limits_{i=1}^{n}L_i$. Ясно, что L_y открытое множество. Поскольку f - замкнутое отображение, то для каждой точки $y\in Y$ существует такая окрестность O_y, что $f^{-1}O_y\subset L_y$. Следовательно, f является ω-отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.7. Пусть равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) является ω-отображением для любого конечно аддитивного счетного открытого покрытие ω пространства (X,U). Тогда если пространство (Y,V) является счетно равномерно паракомпактным и линделёфовым, то пространство (X,U) является счетно равномерно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (Y,V) - счетно равномерно паракомпактное пространство и ω - произвольное конечно аддитивного счетное открытое покрытие пространства (X,U). Так как отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на пространство (Y,V) является ω-отображением, то существует такое открытое покрытие $\lambda=\{L_y: y\in Y\}$ пространства (Y,V) вписанное в покрытие ω. В силу линделёфовости пространства (Y,V) из покрытия $\lambda=\{L_y: y\in Y\}$ выделим счетное подпокрытие $\lambda_0=\{L_{y,i}: i\in I\}$. Далее в счетное открытое покрытие λ_0 пространства (Y,V) впишем равномерно локально конечное открытое покрытие γ пространства (Y,V). Тогда $f^{-1}\gamma\succ\omega$.

Легко видеть, что $f^{-1}\gamma$ является равномерно локально конечным. Следовательно, пространство (X,U) является счетно равномерно паракомпактным.

Равномерное пространство (X,U) называется счетно равномерно B-паракомпактным, если для любого конечно аддитивного счетного открытого покрытия λ пространства (X,U) существует последовательность $\{\alpha_n\} \subset U$ равномерных покрытий удовлетворяющая условию (UP) [12].

Каждое счетно равномерно R-паракомпактное пространство является счетно равномерно B-паракомпактным.

Каждое равномерно B-паракомпактное пространство является счетно равномерно B-паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.8. Пусть равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) является ω-отображением для любого конечно аддитивного счетного открытого покрытия ω пространства (X,U). Тогда, если пространство (Y,V) метризуемо, то пространство (X,U) будет счетно равномерно B-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (Y,V) - метризуемое пространство и ω - произвольное конечно аддитивного счетное открытое покрытие пространства (X,U). В силу метризуемости пространства (X,U) существует счетная база $\{\lambda_n\} \subset V$. Тогда $\{\gamma_n\} \subset U$, где $\gamma_n = f^{-1}\lambda_n$. Далее покажем, что последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию (UP) [12]. Пусть $x \in X$ - произвольная точка. Тогда существует окрестность $\lambda_n(y)$ точки y в (Y,V) такая, что $f^{-1}\lambda_n(y) \subset N$, для некоторого $N \in \omega$. Следовательно, $\gamma_n(x) \subset N$. Значит, пространство (X,U) является счетно равномерно B-паракомпактным.

Как известно, существуют различные характеристики равномерно паракомпактных пространств [4], [56], [62], [76], [77], сильно равномерно паракомпактных пространтсв [7], [30], [31], [32], [33], [38] и равномерно линделёфовых пространств [4], [34] посредством ω-отображений. В следующей теореме устанавливается характеристика счетно равномерно B-паракомпактных пространств посредством ω-отображений.

ТЕОРЕМА 4.2.6. Равномерное пространство (X,U) является счетно равномерно B-паракомпактным, тогда и только тогда, для каждого конечно аддитивного счетного открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение f равномерного пространства (X,U) на некоторое метризуемое равномерное пространство (Y,V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть ω - произвольное конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (X,U). В силу счетно равномерно B-паракомпактности пространства (X,U) для ω существует нормальная последовательность $\{\gamma_n\} \subset U$ равномерных покрытий, удовлетворяющая условию (UP) [12]. Тогда по метризационной лемме [31] найдется такая псевдометрика d на X, что $\gamma_{n+1}(x) \subset \{y : d(x,y) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\} \subset \gamma_n(x)$ для любых $x \in X$ и $n \in N$. Стандартным образом вводится отношение эквивалентности на X : $x_1 \sim x_2$ тогда и только тогда, когда $\rho(x_1,x_2) = 0$ для всех $x_1, x_2 \in X$ [7], [12]. Через Y_ω обозначается фактор-множество множества X по отношению эквивалентности "~", а через $f : X \to Y_\omega$ естественное отображение множества X на фактор-множество Y_ω. Далее легко доказывается, что d - метрика, где $d(y_1,y_2) = \rho(f^{-1}y_1, f^{-1}y_2)$, $y_1, y_2 \in Y$, V_ω - равномерность на Y_ω, порожденная метрикой d и $f : (X,U) \to (Y_\omega,V_\omega)$ - ω-отображение.

Достаточность. Пусть ω - произвольное конечно аддитивное счетное открытое покрытие пространства (X,U) и $f : (X,U) \to (Y_\omega,V_\omega)$ - ω-отображение пространства (X,U) на метризуемое пространство (Y_ω,V_ω). Покажем, что (X,U) является счетно равномерно B-паракомпактным. Поскольку пространство (Y_ω,V_ω) метризуемо, то оно имеет счетную базу $\{\lambda_n : n \in N\}$ и удовлетворяет условию (UP). Заметим, что семейство $\{f^{-1}\lambda_n : n \in N\}$ также удовлетворяет условию (UP). Следовательно, пространство (X,U) является счетно равномерно B-паракомпактным.

4.3. Заключение по главе 4

В главе 4 найдены характеристики подгрупп сильно паракомпактных, суперпаракомпактных и индекс компактности $\leq \eta$ топологических групп.

Установлены паракомпактность всякой локально линделёфовой группы и счетная паракомпактность всякой локально счетно компактной группы, а также различные характеристики μ-полных групп.

Исследованы поведения (квази)совершенных и ω-отображений равномерных пространствах. В частности, установлены сохранение важнейших свойств типа компактности и полноты при (квази)совершенных отображениях. При помощи ω-отображения охарактеризовано свойство счетно равномерно B-паракомпактного пространства.

ВЫВОДЫ

- Получены характеристики важнейших свойств типа компактности и полноты тихоновских пространств при помощи равномерных структур: компактность, линделёфовость, μ-компактность, μ-паракомпактность, локальная линделёфовость и паракомпактность, слабая μ-полнота по Дьедонне.

- Построены всех индекс компактности $\leq \eta$ и суперпаракомпактных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур.

- Найден индекс μ-полноты равномерных структур.

- Доказаны паракомпактность локально линделёфовых и счетная паракомпактность локально счетно компактных топологических групп.

- Найдены характеристики подгрупп индекса компактности $\leq \eta$, сильно паракомпактных и суперпаракомпактных топологических групп.

- Установлены сохранение важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств при (квази)совершенных отображениях.

- Найден критерий счетно равномерно B-паракомпактных пространств посредством ω-отображений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агыбаев, А.С. Некоторые задачи теории непрерывных и равномерно непрерывных отображений [Текст] дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.04 / А.С. Агыбаев. – Бишкек, 2015. – 97 с.
2. Александров, П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию [Текст] / П.С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
3. Антоновский, М.Я. Очерки теории топологических полуполей [Текст] / М.Я. Антоновский, В.Г. Болтянский, Т.А. Сарымсаков // Успехи мат. наук. – 1966. – Т. 21, Вып. 4. – С. 185-218.
4. Апарина, Л.В. Равномерно линделёфовы пространства [Текст] / Л.В. Апарина // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1996. – Т. 57. – С. 3-15.
5. Архангельский, А.В. О совпадении размерности $indG$ и $\dim G$ для локально бикомпактных групп [Текст] / А.В. Архангельский // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 132, № 5. – С. 980-981.
6. Архангельский, А.В. Основы общей топологии в задачах и упражнениях [Текст] / А.В. Архангельский, В.И. Пономарев. – М.: Наука, 1974. – 424 с.
7. Байгазиева, Н.А. Некоторые классы равномерных пространств [Текст] дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.04 / Н.А. Байгазиева. – Бишкек, 2018. – 104 с.
8. Борубаев, А.А. Равномерные структуры и расширения топологических пространств [Текст] / А.А. Борубаев // Успехи мат. наук. – 1982. – Т. 137, № 5. – С. 165-166.
9. Борубаев, А.А. Равномерно совершенные отображения. Абсолюты равномерных пространств [Текст] / А.А. Борубаев // Докл. Болг. АН. – 1989. – Т. 42, № 1. – С. 19-23.
10. Борубаев, А.А. О равномерных группах и их пополнениях [Текст] / А.А. Борубаев // Докл. Болг. АН. – 1989. – Т. 42, № 2. – С. 11-13.

11. Борубаев, А.А. О пополнениях равномерных пространств и расширения топологических пространств [Текст] / А.А. Борубаев // Сердика българско мат. списание. – 1989. – Т. 15, кн. I. – С. 63-73.
12. Борубаев, А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А. Борубаев. – Фрунзе: Илим, 1990. – 172 с.
13. Борубаев, А.А. Об образах метрических пространств при секвенциально открытых и равномерно факторных отображениях [Текст] / А.А. Борубаев, Б.А. Болжиев // Исследование по топологии и геометрии: Сб. науч. тр. – Фрунзе: КГУ, 1985. – С. 84-92.
14. Борубаев, А.А. Равномерные структуры на топологических пространствах и группах [Текст] / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев. – Бишкек: Изд. центр при КГПУ им. И. Арабаева, 1997. – 268 с.
15. Борубаев, А.А. Равномерные пространства [Текст] / А.А. Борубаев, А.А. Чекеев. – Бишкек: Учкун, 2003. – 245 с.
16. Борубаев, А.А. Равномерные пространства [Текст] / А.А. Борубаев. – Бишкек: КГУ, 1987. – 145 с.
17. Борубаев, А.А. О некоторых классах равномерных пространств [Текст] / А.А. Борубаев, Б.Э. Канетов // Изв. НАН КР. – 2012. – № 3. – С. 102-105.
18. Борубаев, А.А. Равномерная топология [Текст] / А.А. Борубаев. – Бишкек: Илим, 2013. – 347 с.
19. Бурбаки, Н. Элементы математики. Общая топология. Основные структуры [Текст] / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1968. – 324 с.
20. Вайнштейн, И.А. О замкнутых отображениях метрических пространств [Текст] / И.А. Вайнштейн // Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 57. – С. 319-321.
21. Ефремович, В.А. Новое определение равномерных пространств. Метризация пространств близости [Текст] / В.А. Ефремович, А.С. Шварц // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 89, № 3. – С. 393-396.
22. Иванов, А.А. Пространственные структуры, их теория и применение [Текст] / А.А. Иванов // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – Т. 287. – С. 5-226.

23. Жумалиев, Т. Некоторые кардинальные инварианты равномерных пространств [Текст] дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.04 / Т. Жумалиев. – Бишкек, 2014. – 87 с.
24. Канетова, Д.Э. Равномерная структура на линейном топологическом пространстве [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова // Вестник ЖАГУ. – № 1.– 2003. – С. 60-62.
25. Канетова, Д.Э. Некоторые свойства наростов равномерных пространств [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова // Вестник ЖАГУ. – № 1. – 2003. – С. 62-66.
26. Канетова, Д.Э. О μ-полноте топологических групп [Текст] / Д.Э. Канетова // Известия вузов Кыргызстана. – № 6. – 2017. – С. 11-14.
27. Канетова, Д.Э. Об одном свойстве типа компактности равномерных пространств [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова, Н.А. Байгазиева // – Вестник Института математики НАН КР. – № 1. – 2018. – С. 168-177.
28. Канетова, Д.Э. Характеризация некоторых свойств тихоновских пространств [Текст] / Б.Э. Канетов, Д.Э. Канетова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – № 4 (96). – 2018. – С. 23-27.
29. Канетова, Д.Э. О полноте равномерных пространств [Текст] // Д.Э. Канетова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, Спецвып. – 2019. – С. 23-27.
30. Канетов, Б.Э. Сильно равномерно паракомпактные пространства [Текст] / Б.Э. Канетов // Изв. НАН КР. – 2012. – № 2. – С. 109-113.
31. Канетов, Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений [Текст] / Б.Э. Канетов. – Бишкек, 2013. – 160 с.
32. Канетов, Б.Э. О равномерно $\tau-u$-паракомпактных пространствах [Текст] / Б.Э. Канетов., Т. Бекжан уулу // Вестн. КНУ им. Ж. Баласагына, Сер. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 8-14.
33. Канетов, Б.Э. О сильно равномерно B-паракомпактных пространствах [Текст] / Б.Э. Канетов, Н.А. Байгазиева // Изв. вузов Кыргызстана. – 2017. – № 6. – С. 6-10.

34. Канетов, Б.Э. Равномерно линделёфовы пространства [Текст] / Б.Э. Канетов, Н.А. Байгазиева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстан. – 2017. – № 7. – С. 27-33.
35. Келли, Дж.Л. Общая топология [Текст] / Дж. Л. Келли. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
36. Кролевец, Н. О локально совершенных отображениях [Текст] / Н.Кролевец // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 175. – С. 1008-1011.
37. Мищенко, А.С. О равномерно замкнутых отображениях [Текст] / А.С.Мищенко // Fund. Math. – 1966. – V. 58. – P. 185-208.
38. Мусаев, Д.К. Равномерно суперпаракомпактные, вполне паракомпактные и сильно паракомпактные равномерные пространства [Текст] / Д.К. Мусаев // Докл. АН РУз. – 2004. – № 4. С. 3-9.
39. Пасынков, Б.А. О топологических группах [Текст] / Б.А. Пасынков // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 188. – С. 281-282.
40. Пасынков, Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств [Текст] / Б.А. Пасынков // Отображения и функторы. – М., 1984. – С. 72-102.
41. Пономарев, В.И. О паракомпактных и финально-компактных пространствах [Текст] / В.Пономарев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т.141, № 3. – С. 561-563.
42. Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы [Текст] / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1984. – 519 с.
43. Сандберг, В. Новое определение равномерных пространств [Текст] / В. Сандберг // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 135. – С. 535-537.
44. Скляренко, Е.Г. О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса той же размерности [Текст] / Е.Г. Скляренко // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 129. – С. 36-39.
45. Скляренко, Е.Г. Равномерные пространства окаймлений [Текст] / Е.Г.Скляренко // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 189, № 1. – С. 39-42.

46. Смирнов, Ю.М. О полноте пространств близости. I [Текст] / Ю.М.Смирнов // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1954. – Т. 3. – С. 271-306.
47. Смирнов, Ю.М. О полноте пространств близости. II [Текст] / Ю.М.Смирнов // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1954. – Т. 4. – С. 75-93.
48. Смирнов, Ю.М. О сильно – паракомпактных пространствах [Текст] / Ю.М. Смирнов // Изв. АН СССР. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 253-274.
49. Тайманов, А.Д. О распространении непрерывных отображений топологических пространств [Текст] / А.Д. Тайманов // Матем. сб. – 1952. – Т. 31. – С. 459-463.
50. Ульянов, В.М. О бикомпактных расширениях счетного характера и абсолютах [Текст] / В.М. Ульянов // Матем. сб. – 1975. – Т. 98. – №2. – С. 223-254.
51. Успенский, В.В. Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций [Текст] / В.В. Успенский // Успехи мат. науки. – 1982. – Т. 37. – № 4. – С.183-184.
52. Федорчук, В.В. Об ω-отображениях паракомпактных пространств [Текст] / В.В. Федорчук // Вестн. Моск. гос. ун-та. – 1963. – № 2. – С.20-24.
53. Шостак, А.П. Некоторые критерии финальной компактности для сильно паракомпактных пространств [Текст] / А.П. Шостак // Топологические пространства и их отображения: Респ. межвуз. сб. науч. тр. – Рига, 1979. – № 4. – С. 132-136.
54. Энгелькинг, Р. Общая топология [Текст] / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
55. Banaschewski, B. Extensions of topological spaces [Text] / B. Banaschewski // Canad. Math. Bull. – 1964. – V. 7. – No 1. – P. 1-22.
56. Borubaev, A.A. Spaces uniformed by coverings [Text] / A.A. Borubaev, P.S. Pankov, A.A. Chekeev. – Budapest, 2003. – 170 p.
57. Cain, G.L. Compactifications of mappings [Text] / G.L. Cain // Proc. Amer. Math. Soc, 1969. – Vol. 23. – № 2. – P. 298-303.

58. Corson, H. The determination of paracompactness by uniformities [Text] / H. Corson // Amer. J. Math. – 1958. – Vol. 80. – P. 185-190.
59. Dowker, C.H. On countably paracompact spaces [Text] / C.H. Dowker // Canad. J. of Math. – 1951. – Vol. 3. – P. 219-224.
60. Diedonne, J. Une generalization des espaces compacts. [Text] / J. Diedonne // J. de Math. Pures et Appl. – 1944. – Vol. 23. – P. 65-76.
61. Fedorcuk, V.V. Completeness and products of θ-uniform spaces [Text] / V.V. Fedorcuk // In Colloqia Math. Soc. Bolyai, Hungary. – Budapest, 1972.
62. Frolik, Z. On paracompact uniform spaces [Text] / Z. Frolik // Czech. Math. J. – 1983. – Vol. 33. – P. 476-484.
63. Gillman, I. Rings of continuous functions [Text] / I. Gillman, M. Jerison. New York, 1960.
64. Ginsburg, S. Some operators on uniform spaces [Text] / S. Ginsburg, J.R. Isbell // Trans. Amer. Math. Soc., 1959. – Vol. 93. – P. 145-168.
65. Isbell, J. Uniform space [Text] / J. Isbell. – Providence, 1964. – 175 p.
66. Kanetova, D. On strongly uniformly paracompact space [Text] / B. Kanetov, D. Kanetova, N. Baigazieva // International conference “Topology and its applications”: Abstracts. Greece – University of Patras. – 2018. – P. 117-118.
67. Kanetova, D. Characterization of some types of compactness and a construction of index compactness ≤ τ extensions by means of uniform structures [Text] / B. Kanetov, D. Kanetova // AIP Conference Proceedings. “International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2018”. – Melville. – New York. – 2018. – Vol. 1997. – P. 020023–1-020023–5.
68. Kanetova, D. Some remainders properties of uniform spaces and uniformly continuous mappings [Text] / B. Kanetov, U. Saktanov, D. Kanetova // AIP Conference Proceedings “3^{rd} International conference of mathematical sciences” (ICMS 2019). – 2019. – Vol. 2183. – P. 030011–1-030011–3.
69. Kanetova, D. On some completeness properties of uniform spaces [Text] / B. Kanetov, D. Kanetova, M. Zhanakunova // AIP Conference Proceedings “3^{rd}

International conference of mathematical sciences” (ICMS 2019). – 2019. – Vol. – 2183. – P. 030010–1-030010–3.

70. Kocinac, L.D.R. Selection principles uniform spaces [Text] / L.D.R. Kocinac // Note Mat. – T. 22. – Vol. 2. – 2003. – P. 127-139.
71. Kocinac, L.D.R. Some covering properties in topological and uniform spaces [Text] /L.D.R. Kocinac // Proceedings of the Steklov Institute of Math. – T. 252. – 2006. – P. 122-137.
72. Marconi, U. On the uniform paracompactness [Text] / U. Marconi // Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova. – 1984. – T.72. – P. 319-328.
73. Michael, E. A theorem on perfect maps [Text] / E. Michael // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 28. – P. 633-634.
74. Michel, E. Topologies on spaces of subsets [Text] / E. Michel // Trans. Amer. Math. Soc. –1951. – Vol. 71. – P. 152-182.
75. Morita, K. Closed mappings and metric space [Text] / K. Morita // Proc. Japan Acad. – 1956. – Vol. 32. – P. 10-14.
76. Pasynkov, B.A. On uniform paracompactness [Text] / B.A. Pasynkov, D. Buhagiar // Czech. Math. J. – 1996. – V. 46 (121). – P. 577- 586.
77. Rice, M.D. A note on uniform paracompactness [Text] / M.D. Rice // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 62. – № 2. – P. 359-362.
78. Samuel, P. Ultrafilters and compactifications of uniform spaces [Text] / P. Samuel // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – Vol. 64. – P. 100-132.
79. Stone, M.H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology [Text] / M.H. Stone // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 41. – P. 375-481.
80. Vilimovsky, J. Uniform quotients of metrizable spaces [Text] / J. Vilimovsky // Fund. Math. – 1968. – Vol. 86. – P. 51-55.
81. Weil, A. Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale, [Text] / A. Weil. – Act. Sci. Ind. no. 551. – Paris, 1937.

82. Whyburn, G.T. Compactifications of mappings [Text] / G.T. Whyburn // Math. Ann. – 1966. – Vol. 166. – №1. – P. 168-174.
83. Wilhelm, M. Criteria of openness for relations [Text] / M. Wilhelm // Fund. Math. 1981. – Vol. 124. – P. 219-228.
84. Gillman, I. Rings of continuous functions [Text] / I. Gillman, M. Jerison. – New York, 1960.