МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН КР
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж. БАЛАСАГЫНА**

Диссертационный совет Д 01.19.598

На правах рукописи
УДК 517.928

КОЖОБЕКОВ КУДАЙБЕРДИ ГАПАРАЛИЕВИЧ

Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек – 2020

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии Ошского государственного университета

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. НАН КР **Алымкулов Келдибай,** (директор ИФПИ ОшГУ)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК **Отелбаев Мухтарбай**, (Главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета науки МОН РК)

доктор физико-математических наук, профессор, **Дауылбаев Муратхан Кудайбергенович**, (кафедра дифференциальных уравнений и теории управления КазНУ им. аль-Фараби)

доктор физико-математических наук, профессор **Искандаров Самандар,** (Институт математики НАН КР, лаборатория теории интегро-дифференциальных уравнений)

Ведущая организация: Ферганский государственный университет, 112000, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

Защита диссертации состоится 8 апреля 2020 года в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.19.598 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН КР и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, и на сайте: www.math.kg Института математики НАН КР.

Автореферат опубликован 6 марта 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. физ.-мат. наук Шаршембиева Ф.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие практические задачи гидро- и аэродинамики, электро- и радиотехники, квантовой механики, химической кинетики и науки описываются так называемыми «дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при старших производных», и они называются сингулярно возмущенными.

Сегодня сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения составляют самостоятельную область математики, представляющую большой теоретический и прикладной интерес, и поэтому почти за каждые два-три года появляются монографии, посвященные этому разделу дифференциальных уравнений.

Случаи, в которых сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров определение поведения решения в пограничных слоях при достаточно малых значениях параметра - весьма трудоемкая задача. Важными инструментами при исследовании поведений решений сингулярно возмущенных задач являются асимптотические методы. В связи с этим разработка новых таких методов никогда не теряет свою актуальность.

В развитие асимптотической теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений большой вклад внесли Л. Прандтль, К. О. Фридрихс, Ф.Х. Нагумо, К.Ф. Гаусс, Ван-дер-Поль, Ж. Лиувилл, Дж. Грин, Г. Вентцель, Х.А. Крамерс, Л. Бриллюэн, А.Н. Крылов, А.Н. Тихонов, И.С. Градштейн, Дж. Лайтхилл, Н. Левинсон, М. Сибуйа, А.Б. Васильева, П. А. Лагерстром, В.П. Маслов, Л.С. Понтрягин, Н.Х. Розов, Е.Ф. Мищенко, А.А. Дородницын, В.Ф. Бутузов, М.И. Вишик, Л.А. Люстерник, В. Вазов, Д.В. Аносов, М. Иманалиев, А.М. Ильин, С.А. Ломов, В.Г. Сушко, А.Р. Данилин, Р.Р. Гадыльшин, Л.А. Калякин, Н.Н. Нефедов, А.Х. Найфе, W. Eckhaus, E.M. De Jager, J. Kevorkian, J.D. Cole, J. Grasman, P.P.N. De Groen, S. Kaplun, М.В. Федорюк, В. Н. Бобочко, К.А. Касымов, К. Алымкулов, П.С. Панков, М.К. Дауылбаев, С. Каримов, К. Какишов, А.С. Омуралиев, К.С. Алыбаев и др.

Вместе с тем проблема построения асимптотических разложений решений для многих классов сингулярно возмущенных задач до сих пор не решена до конца. Появляются новые физико-технические задачи, для которых нужно разработать новые асимптотические методы.

Диссертация посвящена построению асимптотических разложений решений линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных задач, в частности, построению новых методов для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле, Коши, Неймана и Робена строятся обобщенным методом пограничных функций, методом униформизации и методом преобразования (метод редукции). Для оценки остаточных членов применяется классический принцип максимума.

Применяется новый метод, разработанный нами, построения асимптотического разложения решения уравнения Бесселя при больших значениях действительного и комплексного аргументов, который является обобщением метода Пуанкаре - Линдстета из теории нелинейных колебаний. Здесь в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента, которое при больших его значениях является малым.

Также предлагается новый подход для построения асимптотики решения для химической реакции, который является обобщением метода Пуанкаре - Лайтхилла - Го из теории нелинейных колебаний.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по темам:

1) «Изучение математических моделей гидро - аэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы», № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012 г.

2) «Математические задачи гидро- аэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР УН 28/13 от 28.03.2013 г.

3) «Метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций», договор с МОН КР УН № ОН - 2/14 27.01.2014-2015 г.

4) «Обобщение различных моделей для задач горения и взрывов и рекомендации», 2017 г.

5) «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотики», 2019 г.

Цель диссертационной работы.

Построение асимптотики решения задач Рейса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью и асимптотики решения уравнения Бесселя, при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях. Развитие обобщенного метода погранфункций для построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных задач с иррегулярной особенностью.

Задачи исследования: 1. Построить асимптотику решения:

а) модельного уравнения Рейса для явления скачка и определить начало точки скачка;

б) химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком);

в) уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях без использования контурного представления его решения;

2. Применить обобщенный метод погранфункций для построения асимптотических разложений решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку и точку поворота дробного порядка.

3. Построить обобщенным методом погранфункций асимптотику решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа.

Методика исследования обусловлена целями и задачами исследования. В диссертационной работе используются методы мажорант, униформизации, метод преобразования (метод редукции), обобщенный метод малого параметра теории нелинейных колебаний и аналог обобщенного метода погранфункций.

Научная новизна.

Впервые в диссертационной работе:

- методами униформизации и преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейса и определена точка, в которой начинается скачок;
- построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком). Предложен новый подход для построения асимптотики решения химической реакции, где асимптотическое разложение решения имеет две особые точки. Также использована экспоненциально малая поправка в асимптотическом разложении, без которой нельзя построить правильную асимптотику решения;
- разработан новый метод, который обобщает метод Пуанкаре – Линдстета из теории нелинейных колебаний, при помощи которого исследовано уравнение Бесселя при больших значениях аргумента;
- модифицированным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку;
- обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;
- обобщенным методом погранфункций построены асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;
- методом преобразований построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности на верхней полуплоскости.

Теоретическая значимость диссертационной работы определяется возможностью ее приложений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Разработанные в диссертации методы могут быть применены для построения асимптотики решений линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных задач из различной области науки и техники.

Практическая ценность. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки. Разработанные два новых метода построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных уравнений могут найти своё применение и для других таких уравнений. Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, и специального курса для подготовки бакалавров и магистров по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», кроме того, могут быть использованы для решения других теоретических задач, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

- построение асимптотики решения модельного уравнения Рейса методом униформизации и методом преобразований. Определение начальной точки перехода к устойчивой стационарной точке;
- построение асимптотики решения химической реакции со стационарной достижимостью;
- построение асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях с помощью нового метода, который не использует контурное представление его решения.
- построение модифицированным методом погранфункций асимптотических разложений решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку;
- построение обобщенным методом погранфункций асимптотических разложений решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;
- построение асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа обобщенным методом погранфункций;
- построение асимптотики решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности на верхней полуплоскости с помощью преобразований.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на Международных научных конференциях и семинарах:

- «Борубаевские чтения», посвященные 35-летию со дня образования ИМ НАН КР (г. Бишкек, 2019 г.);
- «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры». Конференция, посвященная 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 16-19 окт. 2019 г., г. Нур-Султан;
- «Борубаевские чтения» (г. Бишкек, 2018 г.);

- «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения А.М. Самойленко (г. Чолпон-Ата, 2018 г.);

- VI Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Алматы, Казахстан, 2017 г.);

- «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Международная конференция, посвященная 70-летию профессора А. Керимбекова (г. Чолпон-Ата, 2017 г.);

- «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». Конференция, посвященная 80-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек, 2016 г.);

- «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании». Международная конференция, посвященная 75-летию академика А. Жайнакова (г. Бишкек, 2016 г.);

- «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Конференция, посвященная 65-летию со дня рождения академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, 2015 г.).

- Issyk-Kul International Mathematical Forum (г. Чолпон-Ата, 2015 г.);

- «Актуальные проблемы математики и информатики». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК К.А. Касымова (г. Алматы, 2015 г.);

- «Роль науки и образования в современных условиях глобализации». Международная конференция, посвященная 75-летию академика Б. Мурзубраимова (г. Ош, 2015 г.);

- V Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Чолпон-Ата, 2014 г.).

Также на межрегиональном семинаре математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и информатики» под руководством члена-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова (г. Ош, 2012-2019 гг.).

Все научные результаты, отраженные в диссертации, получены автором лично.

Публикации по теме диссертации. По результатам исследований соискателем опубликованы: одна монография [1], 19 статей [2]-[20] и 6 тезисов докладов [21]-[26]. В том числе три статьи опубликованы в журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science.

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах К. Алымкулову принадлежит постановка проблем, Д.А. Турсунову - обсуждение результатов, а соискателю - идеи, разработанные методы, теоретическая разработка полученных результатов, доказательство теорем, получение и формулировка научных результатов.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, шести глав, разбитых на 19 параграфов, выводов, списка использованной литературы.

Список использованной литературы содержит 95 наименований. Объем текста 168 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая **глава** диссертации состоит из двух параграфов. В § 1.1 дается краткий обзор литературы по теме диссертации. В § 1.2 приведен обзор научных результатов диссертации.

Во второй главе приведены объекты, предметы и методы исследования.

Третья глава посвящена построению асимптотики решения нелинейных сингулярно возмущенных задач с быстрыми переходами.

В §3.1 исследована асимптотика решения задачи Рейса для явления прыжка

$$y'(t)=y^2(t)\big(1-y(t)\big),\ t\in(0,\infty),\quad y(0)=\varepsilon. \tag{1}$$

Точное решение задачи (1) можно выразить в неявном виде:

$$-\frac{1}{y}+ln\frac{y}{1-y}=t-\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

и в явном виде:

$$y(t)=\frac{1}{W\left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t-1}\right)+1},$$

где $W(x)$ - функция Ламберта (если $xe^x=a$, то $x=W(a)$).

Асимптотика решения задачи (1) построена двумя способами.

1-й способ. Асимптотика решения задачи (1) строится из точного решения в неявном виде. Доказана

Теорема 1. Для решения задачи (1), при $\varepsilon\to 0$, справедливо асимптотическое разложение:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\tilde{y}(t,\varepsilon)},\ \ при\ \ t\le\dfrac{1}{\varepsilon}-ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\\[2ex] y_2(t),\ \ при\ \ \tau=\dfrac{1}{\varepsilon}-ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-t,\ \tau>0\ \tau>\tau_0,\end{cases}$$

где $y_2(t)=1-e^{-\tau}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varphi_k e^{-k\tau}$, φ_j - некоторые постоянные,

$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=1-\varepsilon t-\varepsilon\, ln\,\varepsilon+\varepsilon\, ln(1-\varepsilon)-\varepsilon\, ln(1-\varepsilon t-\varepsilon\, ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-1)\left(1+\sum_{i+j=1}^{\infty}a_{ij}\alpha^i\beta^j\right).$$

В точке $t = t_0 := t_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \; y = y_0 \approx 0.78$ начинается скачок к стационарной точке y=1.

2-й способ. Получение асимптотического разложения методом униформизации. После преобразования $y=\varepsilon x$, $\theta=\varepsilon t$ задача (1) приводится к виду

$$\frac{dx(\theta)}{d\theta} = x^2(\theta)(1-\varepsilon x(\theta)), \; x(0) = 1. \tag{2}$$

Если решать задачу (2) обычным методом возмущений, то есть искать решение в виде

$$x(\theta)=x_0(\theta)+\varepsilon x_1(\theta)+...+\varepsilon^n x_n(\theta)+..., \tag{3}$$

то имеем

$$x_0(\theta)=(1-\theta)^{-1},..., x_n(\theta)\sim(1-\theta)^{-n-1}\ln^n(1-\theta),... \text{ при } \theta\to 1. \tag{4}$$

Из (4) видно, что ряд (3) расходится в окрестности точки θ=1 или $t=1/\varepsilon$. Более точно, ряд (3) сходится только на промежутке $[0,\theta_0)$, где

$$\theta_0 = 1 - \varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon} - ln\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1)\right).$$

Чтобы получить решение задачи (2) для любого $\theta\in[0,\infty)$, вместо него рассмотрим униформизирующее уравнение

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = x^2(\xi), \;\; \frac{d\theta}{d\xi} = (1 - \varepsilon x(\xi))^{-1}, \; x(0) = 1, \theta(0) = 0, \quad \xi \in [0,\infty). \tag{5}$$

Доказана эквивалентность задач (1) и (5).

В § 3.2 рассмотрена задача химической реакции со стационарной достижимостью[1]. Здесь исследуется нелинейная задача, взятая из теории пространственно однородных тепловых взрывов. Оказывается, в этой задаче асимптотическое разложение решения имеет две особые точки, которые не были замечены в других работах. Они указывают на появление более одной внешней области, более одного (внутреннего) слоя и нелинейного преобразования расжатия.

Исследуется задача Коши

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-T\right)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}, \quad T\left(0\right) = 1. \tag{6}$$

Известно точное решение задачи Коши (6) в неявном виде:

$$t(T) = \frac{\beta}{\varepsilon}\left\{ e^{-\frac{1}{\varepsilon}} Ei\left(\frac{1}{T\varepsilon}\right) - e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}} Ei\left(\frac{1}{\varepsilon T} - \frac{1}{\varepsilon\left(1+\beta\right)}\right)\right\} -$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{ e^{-\frac{1}{\varepsilon}} Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}} Ei\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon\left(1+\beta\right)}\right)\right\},$$

[1] Ashwani K. Kapila Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems. 1983.

где $Ei(x) = P.V.\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{y} e^{y} dy$.

Требуется построить явное асимптотическое решение задачи (6) по малому параметру ε при $\varepsilon \to 0$.

Доказана

Теорема 2. Для решения задачи (6) при $t \in [0, 1 - \varepsilon^{\alpha}]$, $0 < \alpha < 1$ справедливо асимптотическое разложение

$$T = 1 + \varepsilon ln \frac{1}{1-t} + \varepsilon^2 \frac{1}{1-t} \left\{ \tilde{T}_1 + \frac{\varepsilon}{1-t} \tilde{T}_2 + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{1-t} \right)^n \tilde{T}_{n+1} + \ldots \right\} \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (7)$$

Ряд (7) является асимптотическим только при $t \in [0, 1 - \varepsilon^{\alpha}]$, $0 < \alpha < 1$. В малой окрестности точки $t=1$ теряется свойство асимптотичности.

Чтобы построить асимптотическое решение при $t>1$ введем новую переменную *s:* $t - 1 = \frac{\beta}{\varepsilon} e^{-\beta/(1+\beta)\varepsilon} s$.

Введем обозначение: $T(t)=\psi(s)$. Тогда

$$ds = \frac{\beta}{\varepsilon} e^{\frac{\beta}{(1+\beta)\varepsilon}} dt,\ t=1 \Rightarrow s=0;\ t>1 \Rightarrow s \to \infty,\ \varepsilon \to 0;\ t<1 \Rightarrow s \to -\infty,\ \varepsilon \to 0.$$

и уравнение (6) в новой переменной *s* примет вид:

$$\frac{d\psi}{ds} = (1 + \beta - \psi) e^{\frac{\psi - (1+\beta)}{\varepsilon\psi(1+\beta)}},\quad T(1) = \omega := 1 - \varepsilon ln \varepsilon + O\left(\varepsilon \left(ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2, \varepsilon \to 0. \qquad (8)$$

Доказана

Теорема 3. Решение задачи (8) можно представить в виде асимптотического разложения

$$\psi(s) = 1 + \beta + \varepsilon (1+\beta)^2 e^{-s} + O\left(\varepsilon (1+\beta) e^{-s} \right)^2 + \ldots + O\left(\varepsilon (1+\beta) e^{-s} \right)^n + \ldots,\ s \to \infty, \varepsilon \to 0.$$

Доказана

Теорема 4. Асимптотическое решение задачи (6) представляется в виде

$$T(t) = 1 - \varepsilon ln(\tilde{t} - t) + O[\varepsilon ln(\tilde{t} - t)]^2, \varepsilon \to 0, t \le 1$$

$$T(s)\{ s = (t-1) \frac{\beta}{\varepsilon} e^{\beta/(1+\beta)\varepsilon} \} = 1 + \beta + \varepsilon (1+\beta)^2 e^{-s} + O\left(\varepsilon (1+\beta) e^{-s} \right)^2 +$$

$$+ \ldots + O\left(\varepsilon (1+\beta) e^{-s} \right)^n + \ldots,\ s \to \infty, t > 1, \varepsilon \to 0.$$

Заключение по главе 3. Для задачи Рейса начиная с момента

$$t = t_0 := t_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ y = y_0 \sim 0.78$$

происходит быстрый переход к устойчивой точке y=1.

Решение задачи (6) начинает скачок в особой точке

$$\tilde{t} = 1 - \varepsilon ln\varepsilon + (\varepsilon ln\varepsilon)^2,\ \varepsilon \to 0,$$

и при этом

$$T\left(\tilde{t}\right) = 1 - \varepsilon ln\varepsilon + O\left(\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,\ \varepsilon \to 0.$$

Затем быстро перейдет в точку равновесия T=1+β.

Глава 4 посвящена построению асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента.

Обычно асимптотику решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента получают из интегрального представления его решения, например, из интегрального представления Пуассона, Ханкеля, Сонина, Шлефли и др.

В диссертации изложены простые методы получения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента. Асимптотика решения строится прямо из уравнения Бесселя двумя способами: сведением к уравнению Риккати и прямым методом.

В § 4.1 асимптотика решения уравнения Бесселя нулевого порядка построена сведением к уравнению Риккати.

Для простоты рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0. \tag{10}$$

В (10) сделаем подстановку: $y(x) = e^{\int S(x)dx}$.

Отсюда относительно $S(x)$ получим уравнение:

$$S'(x) + S^2(x) + \frac{1}{x}S(x) + 1 = 0. \tag{11}$$

За нулевое приближение решения уравнения (11) берем решение уравнения:

$$S_0^2(x) + 1 = 0 \Rightarrow S_0(x) = \pm i.$$

Доказаны

Теорема 5. Асимптотическое решение задачи (11) можно представить в виде

$$S(x) = \pm i - \frac{1}{2}x^{-1} + a_2x^{-2} + \ldots + a_nx^{-n} + R_{n+1}(x),\quad x \to \infty, \tag{12}$$

где $|R_{n+1}(x)| \le lx^{-(n+1)}$, l=const.

Теорема 6. Ряд (12) является асимптотическим рядом при больших значениях x.

В § 4.2 прямым методом построена асимптотика решения уравнения Бесселя. Здесь изложен новый метод, который обобщает метод малого параметра Пуанкаре – Линдстета в теории нелинейных колебаний, и в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при больших его значениях.

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y(x)=0 \tag{13}$$

и подстановкой

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}u(x),$$

где $u(x)$ - новая неизвестная функция, уравнение (13) сводим к виду

$$u''(x)+\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)u(x)=0, \tag{14}$$

где $\alpha=\frac{1}{4}-v^2$.

Мы будем искать решение уравнения (14), удовлетворяющее условию

$$u(x)\to\cos x,\ x\to\infty.$$

Это условие можно заменить на условие: $u(x)\to\sin x,\ x\to\infty$.

Доказана

Теорема 7. Асимптотическое разложение решения уравнения Бесселя представляется в виде

$$u(x)=\cos x+J_1(x)\sin x+J_2(x)\cos x, \tag{15}$$

здесь

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}},\quad J_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{2k}\frac{1}{x^{2k}}, \tag{16}$$

$$B_{2k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)...(4v^2-(2k+3)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}},$$

$$A_{2k+2}=(-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)...(4v^2-(2k+4)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}},\ \text{k=0,1,2,....}$$

В § 4.3 доказана справедливость разложения решения уравнения Бесселя (15) при большом значении комплексного аргумента в области $z\in D=\{z:|Arg\,z|<\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta>0\}$ ($z=x+iy$, $i=\sqrt{-1}$, $x, y\in R$). Доказана

Теорема 8. Ряды (16) являются асимптотическими:

$$J_1(z)=\sum_{k=0}^{m}B_{2k+1}\frac{1}{x^{2k+1}}+R_{1,2m+1}(z),\quad J_2(z)=\sum_{k=1}^{m}A_{2k}\frac{1}{x^{2k}}+R_{2,2m+2}(z),$$

где $|R_{1,2m+2}(z)|\le l|z|^{-2m-2}, |R_{2,2m+1}(z)|\le l|z|^{-2m-1}, l=const, z\in D, z\to\infty.$

Заключение по главе 4

Здесь разработан новый метод, который обобщает метод малого параметра Пуанкаре - Линдстета из теории нелинейных колебаний, в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при его больших значениях.

В главе 5 строятся асимптотики решения сингулярно возмущенных начальных и краевых задач с точкой поворота и в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Здесь исследуются задача Коши, Дирихле, Неймана и Робена.

В § 5.1 Модифицированным методом погранфункций построена асимптотика решения первой краевой задачи на отрезке:

$$\varepsilon y''(x)-x^2p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1,\ y(0)=a,\ y(1)=b, \qquad (17)$$

где $p(x), q(x)>0, x\in[0,1]; p, q, f\in C^\infty[0,1], a, b$ - const.

Известно, что задача (17) имеет единственное решение. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Отметим, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon=0$): $x^2p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x)$

имеет нерегулярную особую точку при $x=0$.

Решение задачи

$$x^2p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x),\ \ y(1)=b,$$

представимо в виде: $y_0(x)=O\left(e^{1/x}\right),\ x\to 0,\ \varepsilon\to 0.$

Поэтому интегрируем так, чтобы $y_0(x)\in C^\infty[0,1]$. В таком случае решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^2p(t)}dt.$

Теорема 9. Для решения $y(x)$ задачи (17) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

при $\varepsilon\to 0$ на всем отрезке $0\le x\le 1$, т.е.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $v_k\in C^\infty[0,1]$, $t=x/\mu, \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon}$, $|\pi_k(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t}$, $|z_k(\tau)|\le ce^{-p(1)\tau}$, $0<c-const$, $\pi_k, z_k\in C^\infty[0,\infty)$, $k=0,1,2,....$

Пример. Пусть $p(x)\equiv1$, $q(x)\equiv1$, $f(x)\equiv1$, $a=1$, $b=4$. Тогда задача (17) примет вид

$$\varepsilon y''(x)-x^2y'(x)-y(x)=1,\ 0\le x\le1,\ \ y(0)=1,\ y(1)=4.$$

Задача

$$x^2y'(x)+y(x)=-1,\ 0\le x\le1,\ \ \ y(1)=4$$

имеет решение: $y(x)=-1+5e^{\frac{1}{x}-1}$.

Заметим, что при $x\to0$ решение $y(x)$ экспоненциально растет.

Применяя изложенную выше идею, получаем: $v_0(x)=-1$, $v_k(x)\equiv0$, $k\in\boldsymbol{N}$ и

$$y(x)=-1+2^{-t}+\sqrt{\varepsilon}e^{-t}t\left(c_2t^2+c_1t+c_0\right)+5e^{-\tau}+\varepsilon c_3\tau e^{-\tau}\left(\tau-1\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\varepsilon\to0,$$

где $t=x/\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ c_j-const,\ j=0,1,2,3.$

В § 5.2 исследован случай, когда знак перед производной первого порядка неотрицателен, т.е. исследована следующая задача:

$$\varepsilon y''(x)+x^2p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le1,\ \ y(0)=a,\quad y(1)=b, \tag{18}$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; $p,\ q,\ f\in C^\infty[0,1]$, a, b - const.

Задача (18) имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to0$.

Доказана

Теорема 10. Для решения задачи (18) на отрезке $x\in[0,1]$, при $\varepsilon\to0$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^kv_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $y(x)\in C^\infty[0,1]$, при $x\to0$ имеем $y_k(x)=O(x^\alpha e^{-\beta/x})$, $k\in\boldsymbol{N}$, $0<\beta=q(0)/p(0)$, α – const, $|\pi_k(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t},0<c-const$, $\mu=\sqrt{\varepsilon},\ x=\mu t.$

В § 5.3 исследуется задача Неймана, или вторая краевая задача

$$\varepsilon y''(x)-x^3p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le1,\ \ y'(0)=a,\quad y'(1)=b, \tag{19}$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; $p,\ q,\ f\in C^\infty[0,1]$, a, b - const.

Соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение имеет иррегулярную особую точку при $x=0$. Поэтому решение задачи в точке $x=0$ имеет особенность. Решение задачи (19) ищем в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$.

Соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение первого порядка интегрируем так, чтобы $y_0(x)\in C^\infty[0,1]$. В таком случае решение соответствующего невозмущенного уравнения можно представить в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^3p(t)}dt.$

Доказана

Теорема 11. При достаточно малых ε задача (19) имеет единственное решение $y(x)$, причем ряд

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

является асимптотическим рядом для решения $y(x)$ при $\varepsilon\to0$ на всем отрезке $0\le x\le 1$, т.е.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $v_k\in C^\infty[0,1]$, $|\pi_k(t)|\le c e^{-\sqrt{q(0)}t}$, $|z_k(\tau)|\le c e^{-p(1)\tau}$, $0<c-const$,

$t=x/\mu$, $\tau=(1-x)/\varepsilon$, $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, π_k, $z_k\in C^\infty[0,\infty)$, k=0,1,2,....

В § 5.4 исследуется задача Робена

$$\varepsilon y''(x)-x^n p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1, \tag{20}$$

$$y(0)-h_1y'(0)=a,\quad y(1)+h_2y'(1)=b, \tag{21}$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; p, q, $f\in C^\infty[0,1]$, a, b - const, $0<h_1$, $0<h_2$, n - фиксированное натуральное число больше единицы.

Заметим, что задача (20)-(21) имеет единственное решение. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to0$.

Соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение (ε= 0):

$$x^n p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x)$$

имеет нерегулярную особую точку x=0.

Доказана

Теорема 12. Для решения $y(x)$ задачи (20)-(21) при $\varepsilon\to0$ на всем отрезке $0\le x\le 1$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $v_k\in C^\infty[0,1]$, $|\pi_k(t)|\le c e^{-\sqrt{q(0)}t}$, $|z_k(\tau)|\le c e^{-p(1)\tau}$, $0<c-const$,

$t=x/\mu$, $\tau=(1-x)/\varepsilon$, $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, π_k, $z_k\in C^\infty[0,\infty)$, k=0,1,2,...

В § 5.5 исследована задача Коши с негладким коэффициентом

$$\varepsilon y'(x)+\sqrt{x}q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le T,\quad y(0)=y^0, \tag{22}$$

где $q(x)>0$ $x\in[0,T]$, q, $f\in C^\infty[0,T]$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kx^k, x\to0$, $f_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$, $f_0\ne0$, T, y^0 – const.

Задача (22) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$y(x)=y^0e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\sqrt{s}q(s)ds}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(\tau)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\tau\sqrt{s}q(s)ds}d\tau.$$

Решение соответствующего невозмущенного уравнения (ε=0):

$$y_0(x)=f(x)/q(x)\sqrt{x}$$

не удовлетворяет начальному условию и не является гладкой функцией на отрезке $[0,T]$.

Доказана

Теорема 13. Для решения задачи Коши (22) при $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le T$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{6m+3}\mu^k\pi_k(t)+O\left(\varepsilon^{2m+1}\right),$$

где $t=x/\mu^2$, $\mu^3=\varepsilon$, $v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x)$, $\tilde{v}_{2k}\in C^\infty\left[0,T\right]$, $v_{2k+1}\in C^\infty\left[0,T\right]$,

$$|\pi_{6k-1}(t)|\le ct^{-3/2},\quad |\pi_0(t)|\le|y^0|e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},\ \pi_{6m}(t)\equiv 0, |\pi_{6k+1}(t)|\le ct^{-2},$$

$$\pi_{6k+2}(t)\equiv 0, |\pi_{6k+3}(t)|\le|v_{2k+1}(0)|e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},\ \pi_{6k+4}(t)\equiv 0.$$

В § 5.6 исследована задача Дирихле с точкой поворота дробного порядка

$$\varepsilon y''(x)-\sqrt{x}y(x)=f(x),\ x\in(0,1),\quad y(0)=0,\quad y(1)=0, \qquad (23)$$

где $f\in C^\infty[0,1]$, $f(0)\ne 0$.

Не нарушая общности, рассматриваем однородные граничные условия, так как неоднородные граничные условия $y(0)=a$, $y(1)=b$ с помощью линейного преобразования $y(x)=a+(b-a)x+z(x)$ всегда можно привести к однородным граничным условиям $z(0)=0$, $z(1)=0$.

Задача (23) имеет единственное решение и с помощью модифицированных функций Бесселя можно записать его явный вид. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ по малому параметру ε в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Здесь также решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon=0$)

$$y_0(x)=-f(x)/\sqrt{x}$$

не удовлетворяет краевым условиям и не является гладкой функцией на отрезке [0, 1], точку $x=0$ называют дробной точкой поворота. Следовательно, задача (23) является бисингулярной. Сначала доказывается вспомогательная

Лемма 1. Задача

$$z''(t)-\sqrt{t}z(t)=\frac{c}{\sqrt{t^k}},\ t\in(0,\infty),\ k=0,1,3,\ z(0)=z^0,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0$$

имеет единственное решение (здесь c, z^0 - const), представимое в виде

$$z(t)=\frac{z^0 z_2(t)}{z_2(0)}+cc_1\left(z_2(t)\int_0^t s^{-k/2}z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^\infty s^{-k/2}z_2(s)ds\right).$$

Доказана

Теорема 14. Асимптотическое решение задачи Дирихле (23) при $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$ представимо в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{10m+5}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{4m+2}\lambda^k w_k(\tau)+O\left(\varepsilon^{2m+1}\right),$$

где $v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\ \tilde{v}_{2k}\in C^{\infty}[0,1],\ v_{2k+1}\in C^{\infty}[0,1],$ $t=x/\mu^2$, $\mu^5=\varepsilon$, $\lambda^2=\lambda$, $\tau=(1-x)/\lambda$, $\pi_{10k-1}(t)=O(1/t^{1/2})$, $\pi_{10k+1}(t)=O(1/t^2)$, $\pi_{10k+3}(t)=O(1/t)$, $t\to\infty$.

$\pi_{10k-1}(t)=O(t^2)$, $\pi_{10k+1}(t)=O(t^{1/2})$, $\pi_{10k+3}(t)=O(t^{1/3})$, $t\to 0$.

Замечание. Аналогично строится равномерное асимптотическое разложение решения задачи

$$\varepsilon y''(x)-x^{\alpha}p(x)y(x)=f(x),\ 0<x<1,\ \ y(0)=y^0,\, y(1)=y^1,$$

где α - рациональное число, $p, f\in C^{\infty}[0,T]$, $0<p(x)$, $x\in[0,T]$, $f_0\neq 0$, y^0, y^1 - const.

В § 5.7 построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с кратной точкой поворота

$$\varepsilon y''(x)+x^n y(x)=f(x),\quad 0\le x\le T,\quad y(0)=a,\ \ y'(0)=b, \tag{24}$$

где n - фиксированное натуральное число, T, a, b - const, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x)$, $f_k\in C^{\infty}[0,T],\ f_0(0)\neq 0.$

Решение задачи (24) существует и единственно. Требуется построить асимптотическое разложение решения этой бисингулярной задачи при $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Лемма 2. Задача

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)=\tilde{f}_0(\mu t),\ \ 0<t\le T/\mu,\ \pi_{-n}(0)=0,\ \pi'_{-n}(0)=0$$

имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение в классе функций, убывающих степенным ростом, когда $t\to T/\mu$, $\mu\to 0$. Здесь $\tilde{f}_0(x)=\sum_{j=0}^{n-1}x^j f_{0,j},\ f_{0,j}=f_0^{(j)}(0)/j!.$

Доказана

Теорема 15. Для решения задачи Коши (24) при $\varepsilon\to 0$ на отрезке $x\in[0,T]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=-n}^{-1}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{m(n+2)}\mu^k\left(v_k(x)+\pi_k(t)\right)+O\left(\varepsilon^{m+2/(n+2)}\right),$$

где $\mu=\sqrt[n+2]{\varepsilon},\ x=\mu t;\ \pi_k(t)$ - пограничные функции, зависящие от μ, $\pi_k\in C^{\infty}[0,T/\mu]$, $v_k(x)\in C^{\infty}[0,T]$.

Заключение по главе 5.

Применением метода преобразования и обобщенным методом пограничных функций построены равномерные асимптотические разложения решений начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в случаях, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку: с точкой поворота дробного порядка; с негладким коэффициентом и кратным точкой поворота. Приведены точные асимптотические оценки для остаточных членов асимптотических рядов, т.е. асимптотические разложения обоснованы.

В 6-ой главе диссертации построена асимптотика решения сингулярно возмущенных параболических задач с различными особенностями.

В § 6.1 исследовано асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Коши на прямой с квадратичной особенностью по времени.

Равномерное асимптотическое разложение решения построено обобщенным методом пограничных функций. Рассмотрен случай, когда решение соответствующего «вырожденного» уравнения имеет квадратичный рост сингулярности по времени. Приведена асимптотическая оценка для остаточного члена.

Исследуется задача Коши на бесконечной прямой

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{25}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty, \tag{26}$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in \widetilde{C}^{\infty}(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in \widetilde{C}^{\infty}(R)$, $\widetilde{C}^{\infty}(D)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ - неизвестная функция.

Задача (25)-(26) является бисингулярной, так как соответствующее невозмущенное уравнение имеет не гладкое решение:

$$u_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{t^2 p(x,t)}.$$

Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (25)-(26), когда $\varepsilon\to 0$.

Докажем вспомогательные теоремы.

Теорема 16. Пусть $F(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$, $z^0(x)\in C^{\infty}(R)$, $a(x)>0$. Тогда задача

$$\frac{\partial z(x,\tau)}{\partial \tau}+\tau^2 a(x)z(x,\tau)=F(x,\tau),\ (x,\tau)\in D_1,\ z(x,0)=z^0(x)$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$.

Теорема 17. Пусть $0<a(x)\in C^{\infty}(R)$ и функции $F_j(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$F_j(x,\tau)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\qquad \tau\to+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

Тогда в области D_1 существуют решения уравнений

$$\frac{\partial z_j(x,\tau)}{\partial \tau}+\tau^2 a(x)z_j(x,\tau)=F_j(x,\tau),\ \ j=0,1,2,\ \tau\to+\infty,$$

которые разлагаются в ряды

$$z_j(x,\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\ \ \tau\to+\infty.$$

Теорема 18. Для решения задачи (25)-(26) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x,t)+\sum_{k=-2}^{3m}\mu^k w_k(x,\tau)+O\left(\varepsilon^m\right),$$

где $v_k(x,t)\in C^\infty(D),\ k=0,1,\ldots;\ w_k(x,\tau)\to 0$ при $\tau\to+\infty$, $x\in R$ $\varepsilon=\mu^3,\tau=t/\mu$.

В § 6.2 построена асимптотика решения бисингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D,\qquad u(x,0)=\varphi(x),\ x\in R,\quad (27)$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in\tilde{C}^\infty(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in\tilde{C}^\infty(R)$, m - фиксированное натуральное число, $\tilde{C}^\infty(D)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ - неизвестная функция.

Задача (27) тоже является бисингулярной, так как предельное (соответствующее невозмущенное, $\varepsilon=0$) уравнение: $t^m u^0(x,t)=f(x,t)$ имеет негладкое решение: $u^0(x,t)=\dfrac{f(x,t)}{t^m}$, т.е. решение в точке $t=0$ имеет полюс m-го порядка.

Доказаны

Лемма 3. Пусть $r(x,\tau)\in\tilde{C}^\infty(\overline{D}_1),\ a(x)\in\tilde{C}^\infty(R)$. Тогда задача

$$z_\tau(x,\tau)\ +\tau^m z(x,\tau)=r(x,\tau),\quad z(x,0)=a(x)$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in\tilde{C}^\infty(D_1)$.

Теорема 19. Для решения задачи (27) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(x,t)+\sum_{k=-m}^{(m+1)n}\mu^k w_k(x,\tau)+O\left(\varepsilon^n\right),$$

где $z_k(x,t)\in\tilde{C}^\infty(D),\ W(x,\tau)\in\tilde{C}^\infty(D_1),\ D_1=\{(x,\tau)\,|\,x\in\mathrm{R},0<\tau<\infty\}$,
$\varepsilon=\mu^{m+1},\tau=t/\mu$.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+tu(x,t)=\frac{1}{1+x^2},\quad (x,t)\in D,\qquad u(x,0)=1.$$

Для решения этой задачи справедливо асимптотическое разложение

$u(x,t)=\mu^{-1}w_{-1}(x,\tau)+w_0(x,\tau)+\mu w_1(x,\tau)+\mu^2 w_2(x,\tau)+O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, $(x,t)\in\overline{D}$,

где $w_{-1}(x,\tau)=(1+x^2)^{-1}\left(\tau^{-1}+\tau^{-3}+O(\tau^{-5})\right)$, $\tau\to+\infty$, $x\in R$,

$$w_0(x,\tau)=c^{(0)}(x)\left(\tau^{-2}+\tau^{-4}+O(\tau^{-6})\right),\ c^{(0)}(x)=\left((1+x^2)^{-1}\right)'',\ \tau\to+\infty,\ x\in R,$$

$$w_j(x,\tau)=c^{(j)}(x)\mathrm{O}(\tau^{-2-j}),\ c^{(j)}(x)=\left(c^{(j-1)}(x)\right)'',\ j=1,2,\ \tau\to+\infty,\ x\in R.$$

В § 6.3 исследована задача Коши для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ (x,t)\in D,\qquad u(0,x)=f(x),\ \ x\in R,\quad (28)$$

где $D = \{(t,x): 0 < t < \infty,\ x \in R\}$, $f(x)$ - ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Решение задачи (28) существует и единственно. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение по малому параметру в области $\overline{D}$.

Доказана

Теорема 20. Для решения задачи (28) справедливо разложение

$$u(\eta,x) = \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}} f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s + x\right)ds\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots\right)$$

где $t = \dfrac{1}{\varepsilon\eta} - 1,\ 0 \le \eta \le 1/\varepsilon$.

Заключение по главе 6

В данной главе исследованы задачи Коши на бесконечной прямой для бисингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными.

Методом преобразований (редукция) и обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений. Получены оценки для остаточных членов разложений, т.е. асимптотические разложения строго обоснованы.

ВЫВОДЫ

Впервые в диссертационной работе:

- методом униформизации и методом преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейса. Построено явное решение этого уравнения с помощью специальной функции Ламберта. Определена точка начала скачка для перехода к стационарной точке;

- построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью. Предложен новый метод построения асимптотики решения вблизи особой точки асимптотического разложения, который обобщает метод Пуанкаре - Лайтхилла - Го;

- разработан новый метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента (действительного или комплексного), который обобщает метод малого параметра Пуанкаре - Линдстета из теории нелинейных колебаний, и в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при его больших значениях;

- модифицированным обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;

- обобщенным методом погранфункций построена асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;

- методом преобразований построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности и предложен новый метод построения асимптотики.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки КР, члену-корреспонденту Национальной Академии наук Кыргызской Республики *Алымкулову Келдибаю Алымкуловичу* и д.ф.-м.н., профессору Турсунову Дилмурату Абдиллажановичу за постоянное внимание и полезные советы при выполнении работы.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Монография

1. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // – Ош: Билим, 2019. – 154 с.

Статьи, опубликованные в журналах, цитируемые в базах Scopus, Web of Science

2. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2019. – Т. 29. – Вып 3. – С. 1–9. DOI: 10.20537/vm190306.
3. Kozhobekov, K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Far East Journal of Mathematical Sciences. – Allahabad (India): Pushpa Publishing House, 2017. – Vol. 102, № 2. –P. 329-336. DOI: 10.17654/MS102020329.
4. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика». – 2017. – Т. 21. – С. 108–121.
DOI: 10.26516/19977670.2017.21.108.

Статьи, опубликованные в журналах, цитируемые в базе РИНЦ

5. Kozhobekov, K.G. A new approach to constructing the asymptotic of the solution of the Bessel equation for large values of the complex argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // International Journal of Professional Science. – 2019. – № 9. – P. 6–10.
6. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 4 (43). – С. 3-7.
7. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши на бесконечной прямой для уравнения теплопроводности [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 4 (43). – С. 8-13.
8. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Робена с иррегулярной особенностью [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3. – С. 19-23.
9. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3. – С. 14-19.

10. Кожобеков, К.Г. Прямой метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, Алымкулов К. // Постулат. – 2019. – № 2(40). – С. 30-35.
11. Kozhobekov, K.G. Asymptotics of the solution of Bessel equation at large values of the argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // Norwegian Journal of development of the International Science. –2019. – No 27. – P. 58–62.
12. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения уравнения бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Международный студенческий научный вестник. – 2019. – № 1. – С. 104. URL: http://www.eduherald.ru/article/view?id=19461.
13. Кожобеков, К.Г. Об асимптотике решения задачи Рейса для явления прыжка [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – №2(41). – С. 3-6.
14. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 3 (42). – С. 3-6.
15. Кожобеков, К.Г. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзор. – М.: ВИНИТИ РАН, 2018. –Т. 156. –С. 84–88.
16. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2018. – № 1(36). – С. 5-8.
17. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенного неоднородного уравнения типа Эйри [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д.А.Турсунов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 5. – С. 56-59.
18. Кожобеков, К.Г. Обобщенный метод погранпчных функций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Известия КГТУ им. И. Раззакова. – 2016. – Т. 39. № 1. – С. 13-16.
19. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения бисингулярной задачи на бесконечной прямой с квадратичной особенностью по времени [Текст] / К.Г. Кожобеков // Молодой ученый. – 2016. – № 18 (122). – С. 1-5.
20. Кожобеков, К.Г. Обобщенный метод погранпчных функций для бисингулярной задачи на бесконечной прямой [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Приволжский научный вестник. – 2016. – № 8 (60) – С. 8-12.

Тезисы докладов

21. Kozhobekov, K.G. A new approach to constructing the asymptotic of the solution of the Bessel equation for large values of the argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // III Borubaev's readings, Bishkek, may 24, 2019. –P. 20.

22. Кожобеков, К.Г. Новый подход к построению асимптотики решения уравнения Бесселя для больших значений комплексного аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Сб. тезисов межд. конф «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры», посвящ. 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ. 16-19 окт. 2019 г., г. Нур-Султан. – С. 75-76.
23. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Дирихле с иррегулярной особой точкой [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Борубаевские чтения, 2018. – С. 14.
24. Kozhobekov, K.G. Asymptotics of the solution of the Bessel equation for the large values of the argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8 Bishkek - Cholpon-Ata, Kyrgyzstan, June 17-23, 2018. – С. 17-23.
25. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых. – Ташкент, Узбекистан, 15–17 декабря 2017 года. – С. 123-124.
26. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Международная конференция, посвященная 70-летию профессора А. Керимбекова. г. Чолпон-Ата, 2017 г. – Бишкек, 2017. – С. 56.

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевичтин «Бисингулярдуу козголгон дифференциалдык теңдемелердин чечимдеринин бир калыптагы асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин доктору окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: асимптотикалык ажыралыш, кичине параметр, бисингулярдык теңдеме, Кошинин маселеси, Бесселдин теңдемеси, стационардык жетишүүлүгү бар химиялык реакциянын моделдик теңдемеси, Дирихленин маселеси, Робендин маселеси, Неймандын маселеси, Рейстин моделдик теңдемеси, жалпыланган чек аралык функциялар методу.

Изилдөөнүн объекти. Сызыктуу жана сызыктуу эмес бисингулярдык козголгон дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы жана чектик (Дирихле, Нейман, Робен) маселелер, аргументи чексизге умтулгандагы Бесселдин теңдемеси, сингулярдуу козголгон параболалык теңдемелер.

Иштин максаттары. Секирик кубулушу үчүн Рейстин жана стационардык жетишүүлүгү бар химиялык реакциянын маселесинин чечиминин асимптотикасын тургузуу. Бесселдин теңдемесинин чечиминин асимптотикасы аргументтин чоң маанисинде чыныгы жана комплекстик тегиздиктерде тургузуу. Иррегуляр өзгөчөлүккө ээ болгон бисингулярдык козголгон маселелердин чечимдеринин асимптотикасын тургузуу үчүн жалпыланган чек аралык функциялар усулун өркүндөтүү.

Изилдөөнүн усулдары: өзгөртүп түзүү (редукция) усулу, мажоранттар усулу, жалпыланган чек аралык функция усулу, униформизация усулу.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары.

Секирик кубулушу үчүн Рейстин жана стационардык жетишүүлүгү бар химиялык реакциянын маселесинин чечиминин асимптотикасы тургузулду. Өзгөчө чекиттин чеке-белинде чыгарылыштын асимптотикалык ажыралмасын тургузуу үчүн Пуанкаре - Лайтхилл - Гонун методун жалпылоочу жаңы метод сунушталды.

Бесселдин теңдемесинин чыгарылышынын (чыныгы жана комплекстик), аргументтин чоң маанисинде, асимптотикасын тургузуу үчүн жаңы метод иштелип чыкты. Бул метод сызыктуу эмес термелүүлөр теориясындагы Пуанкаре – Линдстеттин кичине параметрлер методун жалпылайт, мында кичине параметрдин ордуна аргументтин чоң маанилеринин тескери маанилери катышат.

Регулярдуу эмес (иррегулярдуу) өзгөчөлүккө ээ болгон бисингулярдык маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу үчүн жалпыланган чек аралык функциялар методу өнүктүрүлдү.

РЕЗЮМЕ

диссертации Кожобекова Кудайберди Гапаралиевича на тему: «Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, бисингулярное уравнение, задача Коши, модельная задача химической реакции со стационарной достижимостью, задача Дирихле, задача Робена, задача Неймана, модельное уравнение Рейса, метод обобщенной погранфункции.

Объект исследования. Начальные и граничные (Дирихле, Нейман, Робен) задачи для линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Уравнение Бесселя при больших значениях аргумента, сингулярно возмущенные уравнения теплопроводности.

Цель работы. Построение асимптотики решения задач Рейса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Построение асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях. Развитие обобщенного метода погранфункций для построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных задач с иррегулярной особенностью.

Методы исследования: метод преобразования (редукция), метод мажорант, обобщенный метод погранфункций и метод униформизации.

Научная новизна.

Построены асимптотики решений задач Рейса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Предложен новый метод построения асимптотики решения вблизи особой точки асимптотического разложения, который обобщает метод Пуанкаре - Лайтхилла - Го.

Разработан новый метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента (действительного или комплексного), который обобщает метод малого параметра Пуанкаре - Линдстета в теории нелинейных колебаний, и в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при его больших значениях.

Развит обобщенный метод погранфункций для построения асимптотики решения бисингулярно возмущенных задач с иррегулярной особенностью.

SUMMARY

Kozhobekov Kudayberdi Gaparalievich
Dissertation «Asymptotic of solutions of bisingularly perturbed differential equations » for the scientific degree of doctor of physical-mathematical sciences
(specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: asymptotic expansion, small parameter, bisingular equation, the equation of Bessel, Cauchy problem, Dirichlet problem, Robin problem, Neumann problem, model Reuss equation, generalized boundary function method.

Object of research. Initial and boundary (Dirichlet, Neumann, Robin) problems for linear and nonlinear bisingularly perturbed differential equations. Bessel equation.

Purpose of work. The construction of the asymptotics of the solution of Reuss problems for the phenomenon of a jump and a chemical reaction with stationary reachability. The construction of the asymptotics of the solution of the Bessel equation, for large values of the argument in the real and complex domains. Development of a generalized method of boundary functions for constructing the asymptotics of the solution of bisingularly perturbed problems with an irregular singularity.

Research methods: transformation method (reduction), majorant method, generalized border function method and uniformization method.

Scientific novelty.

The asymptotics of the solutions of the Reiss problems for the phenomenon of a jump and a chemical reaction with stationary reachability are constructed. A new method is proposed for constructing the asymptotics of a solution near a singular point of the asymptotic expansion, which generalizes the Poincaré-Lighthill-Go method.

A new method has been developed for constructing the asymptotics of the solution of the Bessel equation for large values of the argument (real or complex), which generalizes the method of the small Poincare-Lindstet parameter in the theory of nonlinear oscillations, and the inverse value of the argument for large values of the argument acts as a small parameter.

A generalized method of boundary functions is developed for constructing the asymptotics of the solution of bisingularly perturbed problems with an irregular singularity.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- Бисингулярность – двойная сингулярность (особенность).
- **N**, **Z**, **R** – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\forall$ – квантор общности.
- $\exists$ – квантор существования.
- $\in$ – «принадлежность».
- $\sim$ – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^{\infty}(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в области D.
- $0<\varepsilon$ – малый параметр, λ, μ – такие же параметры, связанные с ε.
- O, o – символы Ландау.

КОЖОБЕКОВ КУДАЙБЕРДИ ГАПАРАЛИЕВИЧ

Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Подписано в печать: 05.03.2020
Обьем : 1,75 п.л.
Формат 60x84 1/16. Тираж 120 экз.

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.