ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.928

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич

Равномерная асимптотика решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений

специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент НАН КР   Алымкулов К.

Ош – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ..4
ВВЕДЕНИЕ..9

Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

§ 1.1. Обзор известных результатов по теории сингулярных возмущений с особенностями..18
§ 1.2. Обзор результатов диссертации..23
Заключение по главе 1..42

Глава 2. МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 2.1. Объекты и предметы исследования...43
§ 2.2. Методы исследования...47
Заключение по главе 2..59

Глава 3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

§ 3.1. Асимптотика решения задачи Рейса для явления прыжка.....................60
§ 3.2. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью...68
Заключение по главе 3..79

Глава 4. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

§ 4.1. Сведение уравнения Бесселя к уравнению Риккати.............................80
§ 4.2. Прямой метод получения асимптотики решения из уравнения Бесселя..87
§ 4.3. Асимптотика решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента в комплексной плоскости...95
Заключение по главе 4..100

Глава 5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ НЕРЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ТОЧКУ ИЛИ ТОЧКУ ПОВОРОТА

§ 5.1. Первая краевая задача, случай отрицательного коэффициента перед производной первого порядка..101

§ 5.2. Первая краевая задача, случай положительного коэффициента перед производной первого порядка..107

§ 5.3. Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью порядка три..110

§ 5.4. Асимптотика решения третьей краевой задачи в случае иррегулярной особенности произвольного порядка..114

§ 5.5. Задача Коши с негладким коэффициентом..119

§ 5.6. Точка поворота дробного порядка...125

§ 5.7. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с кратной точкой поворота..132

Заключение по главе 5...137

Глава 6. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ОСОБЕННОСТЯМИ

§ 6.1. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши с квадратичным ростом особенности по времени..138

§ 6.2. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши с особенностью по времени..144

§ 6.3. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности...150

Заключение по главе 6...156

ВЫВОДЫ...157

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ...159

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Бисингулярность – двойная сингулярность (особенность).
- **N**, **Z**, **R** – множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbf{N_0}$=$\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\forall$ – квантор общности.
- $\exists$ – квантор существования.
- $\in$ – «принадлежность».
- $\sim$ – «эквивалентность».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^{\infty}(D)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций в области D.
- $0<\varepsilon$ – малый параметр, λ, μ – такие же параметры, связанные с ε.
- O, o – символы порядка (Ландау).

Основные определения, принятые в работе

1) Пограничная функция или функция пограничного слоя введена для того, чтобы компенсировать невязки граничных условий в сингулярно возмущенных задачах. В этих задачах применение классического метода возмущений приводить к понижению порядка рассматриваемого уравнения, соответственно уничтожению задаваемых начальных или граничных условий.

Метод пограничных функций был создан усилиями московских математиков М.Вишика и Л.А. Люстерника и кыргызского математика М.И. Иманалиева. Затем развита математиками МГУ А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузовым и их учениками, за рубежом математиками США Р. ОМаллей и другими.

Например, пограничная функция $\pi(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ в точке t=0, быстро убывает за короткое время $\tilde{t} = \varepsilon \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$ до значения $O(\varepsilon)$. То есть произошло экспоненциальное убывание функции в точке t=0 направо. Можно сказать, что произошло (экспоненциальный) скачок функции $\pi(t)$ в точке $\tilde{t}$ налево.

2) Обобщенный метод погранфункции создан профессором К. Алымкуловым в связи с расширением метода погранфункций для задач с точкой поворота, где невозможно применить классический метод погранфункций. В частности, этим методом получено равномерное разложение решения сингулярно возмущенного модельного уравнения Коула второго порядка с негладким коэффициентом при производной.

3) Явление прыжка в физических, химических и других науках обычное явление. Они имеют места в явлениях, где имеются фазовые переходы.

4) Скачок в математическом понятии разрыв функции в некоторой точке решения уравнений, однако решения дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями, вообще говоря, не может иметь разрыв первого рода. Поэтому, говоря скачком в решении сингулярно возмущенных уравнений, мы имеем в виду плавный быстрый переход за конечный период "времени".

5) Стационарное достижение. Если имеется точка равновесия обыкновенного дифференциального уравнения, то стационарным достижением понимаем ту точку равновесия, в которую достигается за бесконечный промежуток времени.

6) *Определение малого омикрона **o**.* Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x=a, которая может быть как конечной, так и бесконечно удаленной точкой. Если выполняется предельное равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0,$$

то будем писать $\alpha(x)=o\left(\beta(x)\right)$ при $x\to a$.

7) *Определение большого омикрона* ***O***. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки *x*=*a*. Если существует окрестность точки *x*=*a* и существует такая постоянная *M*>0, что для всех *x* из этой окрестности выполняется неравенство

$$\left|\alpha(x)\right|\le M\left|\beta(x)\right|,$$

то будем писать $\alpha(x)=O\left(\beta(x)\right)$ при $x\to a$.

8) Равенства вида

$$\alpha(x)=o\left(\beta(x)\right) \text{ при } x\to a;$$

$$\alpha(x)=O\left(\beta(x)\right) \text{ при } x\to a$$

будем называть асимптотическими равенствами.

9) Последовательность функций $\varphi_n(x), n\in N$ будем называть асимптотической при $x\to a$, если

$$\forall n\in N:\ \ \varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x)) \text{ при } x\to a.$$

10) Пусть функция *f*(*x*) определена в некоторой проколотой окрестности точки *x*=*a*.

Ряд

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+a_3\varphi_3(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x)+\ldots$$

называется асимптотическим рядом функции *f*(*x*) по асимптотической последовательности функций $\varphi_n(x)$ при $x\to a$, если

$$\forall n\in N:\quad \left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)\right|<c_n\left|\varphi_{n+1}(x)\right|$$

где $0<c_n$ – const.

11) Пусть функция *F*(*t*) определена при всех достаточно больших *t* и $\psi_{k+1}(t)=o\left(\psi_k(t)\right)$, $R_n(t)=o\left(\psi_n(t)\right)$ при $t\to\infty$. Тогда разложение

$$F(t)=\sum_{k=0}^{n}\psi_k(t)+R_n(t),\ t\to\infty$$

называется асимптотическим разложением функции $F(t)$ при $t\to\infty$.

Заметим, что в сумме каждый последующий член суммы по порядку меньше предыдущего.

12) Пусть функция $f(t)$ определена при $t>A$ для некоторого положительного A. Ряд

$$a_0+\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\ldots+\frac{a_n}{t^n}+\ldots$$

называется асимптотическим рядом функции $f(t)$ при $t\to\infty$, если для $\forall n\in \mathrm{N}$, $\forall\ t>A$ справедливо неравенство

$$\left|f(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{t^k}\right|<\frac{c_n}{t^{n+1}},$$

где $0<c_n$ – const.

13) Пусть функция $f(x)$ определена в интервале $x\in(0,\ b)$. Ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

называется асимптотическим рядом функции $f(x)$ при $x\to 0$ (справа), если $\forall n\in N$ и $x\in(0,\ b)$ справедливо неравенство

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right|<c_nx^{n+1},$$

где $0<c_n$ – const.

14) Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки $x=x_0$, то она разлагается в асимптотический ряд по степеням x при $x\to x_0$. Это вытекает из известной формулы Маклорена (остаточный член приведен в форме Пеано):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\Big((x-x_0)^n\Big).$$

Теорема. Пусть $\{\varphi_n(x)\}, n \in N$ является асимптотической последовательностью при $x \to a$ и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) + O(\varphi_{n+1}(x)), \ x \to a.$$

Тогда коэффициенты $a_k, k \in N$ однозначно определяются функцией $f(x)$.

Тем самым асимптотическое представление функции по заданной асимптотической последовательности единственно.

Следствие. Асимптотическое разложение функции по заданной асимптотической последовательности единственно.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Многие практические задачи гидро- и аэродинамики, электро- и радиотехники, квантовой механики, химической кинетики и науки описываются так называемыми «дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при старших производных», и они называются сингулярно возмущенными.

Сегодня сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения составляют самостоятельную область математики, представляющую большой теоретический и прикладной интерес, и поэтому почти за каждые два-три года появляются монографии, посвященные этому разделу теории дифференциальных уравнений.

Случаи, в которых сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения имеют явные решения, крайне редки. Даже для современных компьютеров задача определить поведение решения в пограничных слоях, при достаточно малых значениях параметра, – весьма трудоемкая задача. Важными инструментами при исследовании поведений решений сингулярно возмущенных задач являются асимптотические методы. В связи с этим в настоящее время интенсивно разрабатываются различные асимптотические методы.

В развитие асимптотической теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений большой вклад внесли Л. Прандтль, К. О. Фридрихс, Ф.Х. Нагумо, К.Ф. Гаусс, Ван-дер-Поль, Ж. Лиувилл, Дж. Грин, Г. Вентцель, Х.А. Крамерс, Л. Бриллюэн, А.Н. Крылов, А.Н. Тихонов, И.С. Градштейн, Дж. Лайтхилл, Н. Левинсон, М. Сибуйа, А.Б. Васильева, П. А. Лагерстром, В.П. Маслов, Л.С. Понтрягин, Н.Х. Розов, Е.Ф. Мищенко, А.А. Дородницын, В.Ф. Бутузов, М.Н. Вишик, Л.А. Люстерник, В. Вазов, Д.В. Аносов, М.И. Иманалиев, А.М. Ильин, С.А. Ломов, В.Г. Сушко, А.Р. Данилин, Р.Р. Гадыльшин, Л.А. Калякин, Н.Н. Нефедов, А.Х. Найфе, W. Eckhaus, E.M. De Jager, J. Kevorkian, J.D. Cole,

J. Grasman, P.P.N. De Groen, S. Kaplun, M.B. Федорюк, В. Н. Бобочко, К. Касымов, К. Алымкулов, П.С. Панков, М.К. Дауылбаев, С. Каримов, К.К. Какишов, А.С. Омуралиев, К.С. Алыбаев, Д.А. Турсунов и др.

Вместе с тем проблема построения асимптотических разложений решений для многих классов сингулярно возмущенных задач до сих пор не решена до конца. Появляются новые физико-технические задачи, для которых нужно разработать новые асимптотические методы.

Диссертация посвящена построению асимптотических разложений решений линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных задач, в частности, построению новых методов для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью. Равномерные асимптотические разложения решений задач Дирихле, Коши, Неймана и Робена строятся обобщенным методом пограничных функций, методом униформизации и методом преобразования (метод редукции). Для оценки остаточных членов применяется классический принцип максимума.

Разработан новый метод построения асимптотического разложения решения уравнения Бесселя при больших значениях действительного и комплексного аргумента, который является обобщением метода Пуанкаре – Линдстета в теории нелинейных колебаний. Здесь в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента, которое при больших его значениях является малым.

Также предложен новый подход для построения асимптотики решения для химической реакции, который является обобщением метода Пуанкаре – Лайтхилла – Го в теории нелинейных колебаний.

Связь темы диссертации с государственными программами. Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по темам:

1) «Изучение математических моделей гидро - аэродинамики, химической кинетики, тепло-массообмена и других явлений природы», № гос. регистрации 0005721, 20.04.2012 г.

2) «Математические задачи гидро- аэродинамики и других явлений природы», договор с МОН КР УН 28/13 от 28.03.2013 г.

3) «Метод структурного сращивания и обобщенный метод погранфункций», договор с МОН КР УН № ОН - 2/14 27.01.2014-2015 г.

4) «Обобщение различных моделей для задач горения и взрывов и рекомендации», 2017 г.

5) «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотики», 2019 г.

Цель диссертационной работы. Целью исследования являются: построение асимптотики решения задачи Рейса для явления прыжка и химической реакции со стационарной достижимостью; разработка нового – простого метода для построения асимптотического разложения решения уравнения Бесселя при больших значениях действительного и комплексного аргумента; а также применение обобщенного метода пограничных функций для построения равномерных асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач с иррегулярными особенностями.

Задачи исследования:

1. Построить асимптотику решения

а) модельного уравнения Рейса для явления скачка и определить начало точки скачка;

б) химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком);

в) уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях без использования контурного представления его решения;

2. Применить обобщенный метод погранфункций для построения асимптотических разложений решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку и точку поворота дробного порядка.

3. Построить обобщенным методом погранфункций асимптотику решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа.

Методика исследования обусловлена целями и задачами исследования. В диссертационной работе используются методы мажорант, униформизации, метод преобразования (метод редукции), обобщенный метод малого параметра теории нелинейных колебаний и аналог обобщенного метода погранфункций.

Научная новизна. Впервые в диссертационной работе:

- методом униформизации и методом преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейса и определена точка, в которой начинается скачок;

- построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком). Предложен новый подход для построения асимптотики решения для химической реакции, где асимптотическое разложение решения имеет двойную особую точку. Также использована экспоненциально малая поправка в асимптотическом разложении, без которой нельзя построить правильную асимптотику решения.

- разработан новый метод, который обобщает метод Пуанкаре – Линдстета в теории нелинейных колебаний, при помощи которого исследовано уравнение Бесселя при больших значениях аргумента;

- модифицированным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;

- методом преобразований построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности на верхней полуплоскости.

Теоретическая значимость диссертационной работы определяется возможностью её приложений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Разработанные в диссертации алгоритмы могут быть применены для построения асимптотики решения различных классов линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных задач науки и техники.

Практическая ценность. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки. Разработанные два новых метода построения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных уравнений найдут своё применение в теории сингулярных возмущений. Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, при чтении специального курса для подготовки бакалавров и магистров по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», кроме того, могут быть использованы специалистам и в области математики для решения других теоретических задач, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

- построение методом униформизации и методом преобразований асимптотики решения модельного уравнения Рейса, определение начальной точки перехода к устойчивой стационарной точке;

- построение асимптотики решения химической реакции со стационарной достижимостью. Предложение нового метода достижения особой точки асимптотического разложения, обобщающего метод Пуанкаре – Лайтхилла – Го;

- с помощью нового метода построить асимптотику решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента в действительной и комплексной областях. Этот метод обобщает метод малого параметра Пуанкаре – Линдстета в теории нелинейных колебаний, здесь в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при больших значениях аргумента.

- построение методом погранфункций асимптотических разложений решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку;

- построение обобщенным методом погранфункций асимптотических разложений решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;

- обобщенным методом погранфункций построение асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;

- построение с помощью преобразований асимптотики решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности на верхней полуплоскости.

Все научные результаты, отраженные в диссертации, получены автором лично.

Личный вклад автора в совместных работах. В совместных работах К. Алымкулову принадлежит постановка проблем, Д.А. Турсунову – обсуждение результатов, а соискателю – идеи, разработанные методы, теоретическая разработка полученных результатов, их экспериментальное подтверждение, доказательство теорем, получение и формулировка научных результатов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях:

- «Борубаевские чтения», посвященные 35-летию со дня образования ИМ НАН КР (г. Бишкек, 2019 г.);
- «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры». Конференция, посвященная 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ. 16-19 окт. 2019 г., г. Нур-Султан;
- «Борубаевские чтения» (г. Бишкек, 2018 г.);
- «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения А. Самойленко (г. Чолпон-Ата, 2018 г.);
- VI Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Алматы, Казахстан, 2017 г.);
- «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Международная конференция, посвященная 70-летию профессора А. Керимбекова (г. Чолпон-Ата, 2017 г.);
- «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». Конференция, посвященная 80-летию академика М.И. Иманалиева (г. Бишкек, 2016 г.);

- «Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании». Международная конференция, посвященная 75-летию академика А. Жайнакова (г. Бишкек, 2016 г.);

- «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Конференция, посвященная 65-летию со дня рождения академика А.А. Борубаева (г. Бишкек, 2015 г.).

- Issyk-Kul International Mathematical Forum (г. Чолпон-Ата, 2015 г.);

- «Актуальные проблемы математики и информатики». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК К.А. Касымова (г. Алматы, 2015 г.);

- «Роль науки и образования в современных условиях глобализации». Международная конференция, посвященная 75-летию академика Б. Мурзубраимова (г. Ош, 2015 г.);

- V Конгресс Всемирного математического общества тюркоязычных стран (г. Чолпон-Ата, 2014 г.).

Также на межрегиональном семинаре математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и информатики» под руководством члена-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова (г. Ош, 2012-2019 гг.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По результатам исследований соискателем опубликованы: одна монография [59], 19 статей: [20]-[23], [60]-[75] и 6 тезисов докладов [24], [25], [76]-[79]. В том числе три статьи опубликованы в журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, шести глав, разбитых на 19 параграфов, выводов, списка использованной литературы. Полный объем диссертации 168 страниц.

Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация определений, лемм, теорем, формул – одинарная (автономная) при ссылке тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – порядковый номер в разделе.

Список использованной литературы содержит 95 наименований.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору, Заслуженному деятелю науки, члену-корреспонденту Национальной Академии наук Кыргызской Республики Алымкулову Келдибаю и д.ф.-м.н., профессору Турсунову Дилмурату Абдиллажановичу за постоянное внимание и полезные советы при выполнении работы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

§ 1.1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Современная теория асимптотических разложений начинается с работ Анри Пуанкаре [29] (1886 г.), где он ввел понятие асимптотического ряда. Но Брук Тейлор (1715 г.) и Маклорен (1742 г.) разлагали функции в асимптотические ряды до Анри Пуанкаре. Ряды Тейлора и Маклорена являются асимптотическими рядами в окрестности тех точек, в которых они разлагаются в ряд. Основа теории пограничного слоя был заложен немецким механиком и физиком Людвиг Прандтль [30] (1904 г.) введением понятия пограничного слоя, который появляется в сингулярно возмущенных уравнениях. Людвиг Прандтль на третьем математическом конгрессе доказал, что в пограничных слоях надо ввести новые, «растянутые» координаты. Работы советского академика А.Н. Тихонова [90]-[91] стали стартовой точкой для развития теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Многие прикладные задачи описывались с помощью дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Поэтому статьи академика А.Н. Тихонова привлекли внимание многих исследователей. Проведенные исследования показали, что математическими моделями разнообразных процессов в физике, химии, биологии, технике являются сингулярно возмущенные уравнения.

Сингулярно возмущенные уравнения условно делятся на три типа:

I. Сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения типа Прандтля-Тихонова, т.е. возмущенные уравнения в которых малый параметр содержится при высшей производной, т.е. уравнения вида

$$y'(x) = f(x,y,\varepsilon),\ x \in (0,T), \qquad y(0) = a,$$
$$\varepsilon z'(x) = g(x,y,\varepsilon),\ x \in (0,T), \qquad z(0) = b,$$

где $0<\varepsilon<<1$, *a, b* – заданные числа, *f, g* являются бесконечно дифференцируемыми по переменным *x*, *y*, ε в окрестности точки *O*(0,0,0). Очевидно, что невозмущенное уравнение

$$y_0'(x) = f(x, y, 0),$$
$$0 = g(x, y, 0),$$

имеет первый порядок.

II. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения типа Лайтхилла, к ним относятся возмущенные уравнения, в которых при нулевом значении малого параметра порядок рассматриваемого уравнения не понижается, но содержит особую точку.

Например, модельное уравнение Лайтхилла

$$(x + \varepsilon y(x))y'(x) + p(x)y(x) = r(x), \quad x \in [0,1],$$
$$y(1) = a,$$

где $x \in [0,1]$, $p(x),\ r(x) \in C^{\infty}[0,1]$.

Соответствующее невозмущенное уравнение (ε=0), тоже является дифференциальным уравнением первого порядка и имеет вид:

$$xy'_0(x) + p(x)y_0(x) = r(x),$$

точка x=0 является регулярной особой точкой.

III. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с малым параметром, которые рассматриваются на бесконечном отрезке. Например, уравнение Лагерстрома

$$y''(x) + \frac{n}{x}y'(x) + y(x)y'(x) = \beta(y'(x))^2,$$
$$y(\varepsilon) = 0,\ y(\infty) = 1.$$

Для построения асимптотических решений сингулярно возмущенных задач существует несколько методов, например, метод сращивания (или согласования), метод двумасштабных разложений, классический метод погранфункций, метод регуляризации Ломова, метод ВКБ и др.

Г.Е. Латта (1951 г.) впервые применял классический метод погранфункций для построения асимптотики решений некоторых сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые равномерная асимптотика для решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений методом сращивания получена А.Б. Васильевой (1960 г.), затем В. Вазовым и Сибуйя (1963 г). М.И. Вишиком и Л.А. Люстерником впервые метод пограничных функций систематически применен для линейных и нелинейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной М.И. Иманалиевым.

В теорию сингулярно возмущенных уравнений большой вклад внесли также К.О. Фридрихс, Я.Д. Тамаркин, В.Ж. Тритжниский, М. Хукухара, Й. Сибуйя, Н. Левинсон Д.В., А.А. Дородницын, Понтрягин, Е.Ф. Мищенко, Аносов, Л.С., Н.Х. Розов, Б.Ф. Бутузов, В.А. Тупчиев, О. Олейник, А.М. Ильин, В.А. Треногин, Г.Д. Биркгоф, Р. Ноамон, А. Эрдейи, Ван-Дер-Поль, , Ж. Коул, П.А. Лагерстром, Н.Ж. Левин, Ж.А. Кокран, Р. Хаберман, Ю. Екхаус, В.А. Харрис, Г.А. Хаусс, С. Каплун, Ж. Кеворкиан, Р.К. Файф, Н. Феничел, Л. Флетто, Ф.В. Дорр, С.В. Партер, Л.Ф. Шампэин, Р. Холмс, Е.Ж. Хинч, Д.Р. Смит, Н.Л. Турритин, И.С. Градштейн, М. Иманалиев, К. Касымов, , П.С. Панков, М.Даулбаев С .Каримов, К.С. Алыбаев, Ж. Грассман, Л.А. Люстерник, С.А. Ломов, К. Алымкулов А.Г. Елисеев, А.А. Бободжанов, А.А. Сафонов, А.С. Омуралиев, А.М. Джураев и др.

Бисингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями назовем такие сингулярно возмущенные уравнения, в которых соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение имеет негладкое решение. Например,

$$\varepsilon y'(x) + xy(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \ y(0) = 1.$$

Классический метод пограничных функций Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева применяется для построения асимптотики решения в случае экспоненциальной асимптотической устойчивости решения уравнения в быстрой переменной, т.е. при выполнении условия теоремы А.Н. Тихонова. Ранее, когда эти условия нарушаются, для построения асимптотического разложения применяли метод согласования (сращивания, matching).

Обобщенный метод пограничных функций профессора К. Алымкулова отличается от метода сращивания тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательных асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения (или в погранфункций). Отличие обобщенного метода пограничных функций от классического метода погранфункций состоит в том, что здесь пограничные функции тоже зависят от малого параметра.

В теорию бисингулярных задач вклад внесли Р. Ганс (R. Gans), В. Гейзенберг (W. Heisenberg), Х. Жеффрейс (H. Jeffreys), П.А. Лагерстром (P.A. Lagerstrom), Р.Е. Лангер (R.E. Langer), Х.Л. Турритин (H.L.Turritin), Й. Сибуйя (Y. Sibuya), Ж. Коул, В. Вазов (W. Wasov), Ф. Олвер (F.W. Olver), Г.Ф. Карриер (G.F. Carrier), Р.Е. О’Маллей (R.E. O’Malley), Т. Нишимото (T. Nishimoto), М. Накано (M. Hakano), М. Ивано (M.Iwano), М.А. Евграфов, М.В. Федорюк, Н. Фроман (N. Froman), П.О. Фроман (P.O. Froman), Р.Й. Ли (R.Y. Lee), К.В. Чанг (K.W. Chang), Ф.А. Хаус (F.A. Howes), А.М. Ильин, В.Н. Бобочко, К. Алымкулов, Д.А. Турсунов, П. Гроен (P. De Groen) и др.

Алымкулов К. и его ученики методом структурного сращивания, обобщенным методом погранфункций исследовали сингулярно возмущенные задачи с регулярными особыми точками, с точками поворота и с особенностями на бесконечности (уравнение Лагерстрома).

А.М. Ильиным и его учениками методом сращивания исследованы различные бисингулярно возмущенные уравнения.

Ломов С.А. и его ученики методом регуляризации исследовали бисингулярные задачи.

В работах В.Ф. Бутузова и его учеников методом регуляризации вырожденного уравнения и методом дифференциальных неравенств исследованы различные классы сингулярно возмущенных задач в случае, когда корни вырожденного уравнения не единственные решения, и они пересекаются.

В задачах с начальным скачком большой вклад внесли Л.А. Люстерник, К. Касымов, М. Дауылбаев и их последователи.

В работах Д.А. Турсунова и его учеников исследованы различные краевые задачи для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений.

§ 1.2. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ

Третья глава диссертации посвящена построению асимптотики решения нелинейных сингулярно возмущенных задач с быстрыми переходами. Разнообразные физические явления связаны с быстрыми и внезапными переходами. Типичными примерами этого являются: сгорание и взрывы; вспышки населения; переходы из ледниковых периодов и землетрясения. Все эти проблемы охарактеризованы математически, как небольшое возмущение, вызывающее большую амплитудную реакцию. Таким образом, стандартные асимптотические и возмущающие методы, такие как метод возмущений Пуанкаре-Линстедта и многомасштабный метод не применимы к этим проблемы. Этими методами изучаются реакции с малой амплитудой на небольшие возмущения.

В §3.1 исследована асимптотика решения задачи Рейса для явления прыжка [31]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y^2(t)\big(1 - y(t)\big),\ t \in (0,\infty), \quad y(0) = \varepsilon. \tag{1}$$

(1) – простая математическая модель сгорания. Это уравнение является элементарной моделью для тримолекулярных реакций. Здесь $y(t)>0$ является концентрацией реагирующего химического вещества в момент времени t. В уравнении имеется два состояния равновесия: $y=0$ и $y=1$. Они являются состоянием предварительного зажигания $y=0$ и состоянием взрыва $y=1$. Начальное значение малого параметра $\varepsilon=0$ представляет собой нарушение состояния до розжига.

Линейная устойчивость показывает, что состояние взрыва асимптотически неустойчиво. Однако дифференциальное уравнение в (1) влечет, что $y' > 0$, для y в интервале $0<y<1$. Следовательно, состояние перед зажиганием нелинейно неустойчиво.

Ранее было известно точное решение задачи (1) в неявном виде:

$$-\frac{1}{y}+ln\frac{y}{1-y}=t-\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Оказывается его точное решение можно выразить также в виде:

$$y(t)=\frac{1}{W\left(\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t-1}\right)+1},$$

где $W(x)$ – функция Ламберта (если $xe^x=a$, то $x=W(a)$).

Асимптотическое разложение задачи (1) построено двумя способами:

1-способ. Асимптотика строится из точного неявного решения, доказана

Теорема 1. Начиная с момента

$$t=\frac{1}{\varepsilon}-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \ y\sim 0.78$$

происходит быстрый переход к устойчивой точке y=1.

Для решения задачи (1) справедливо асимптотическое разложение

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\tilde{y}(t,\varepsilon)},\ \ при\ \ t\le\dfrac{1}{\varepsilon}-ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\\ y_2(t),\ \ при\ \ \tau=\dfrac{1}{\varepsilon}-t+ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \tau>0\ \tau>\tau_0,\end{cases}$$

где

$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=1-\varepsilon t-\varepsilon ln\varepsilon+\varepsilon ln(1-\varepsilon)-\varepsilon ln(1-\varepsilon t-\varepsilon ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-1)\left(1+\sum_{i+j=1}^{\infty}a_{ij}\alpha^i\beta^j\right),$$

$$y_2(t)=1-e^{-\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k e^{-k\tau},\ \varphi_j\text{ – некоторые постоянные.}$$

2-способ. Получение асимптотического разложения методом униформизации. После преобразования $y=\varepsilon x$, $\theta=\varepsilon t$ задача (1) приводится к виду

$$\frac{dx(\theta)}{d\theta}=x^2(\theta)(1-\varepsilon x(\theta)),\ x(0)=1. \tag{2}$$

Если решить задачу (2) обычным методом возмущений, то есть, искать решение в виде

$$x(\theta)=x_0(\theta)+\varepsilon x_1(\theta)+...+\varepsilon^n x_n(\theta)+..., \qquad (3)$$

то имеем

$$x_0(\theta)=(1-\theta)^{-1},..., x_n(\theta)\sim(1-\theta)^{-n-1}\ln^n(1-\theta),... \text{ при } \theta\to 1. \qquad (4)$$

Из (4) видно, что ряд (3) расходится в окрестности точки $\theta=1$ или $t=1/\varepsilon$. Более точно, ряд (3) сходиться только на отрезке $[0,\theta_0)$,

где

$$\theta_0=1-\varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon}-ln\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right)+O(1)\right).$$

Чтобы получить решение задачи (2) для любого $\theta\in[0,\infty)$ вместо него рассмотрим униформизирующее уравнение

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi}=x^2(\xi),\quad \frac{d\theta}{d\xi}=(1-\varepsilon x(\xi))^{-1},\ x(0)=1, \theta(0)=0, \qquad (5)$$

где $\xi\in[0,\infty)$.

Доказана эквивалентность задач (1) и (5).

В § 3.2 рассмотрена задача химической реакции со стационарной достижимостью [5]. Здесь исследуется нелинейная задача, взятая из теории пространственно однородных тепловых взрывов. Он демонстрирует несколько особенностей, которых нет в ранее исследованных работах. Они включают появление более чем одной внешней области, более одного (внутреннего) слоя и нелинейного преобразования расжатия.

Исследуется задача Коши

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-T\right)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}},\quad T\left(0\right)=1. \qquad (6)$$

Найдено точное решения задачи Коши (6) в неявном виде:

$$t(T)=\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{T\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon T}-\frac{1}{\varepsilon\left(1+\beta\right)}\right)\right\}-$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}\right)\right\},$$

где $Ei(x)=P.V.\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{y}e^{y}dy$.

Требуется построить явное асимптотическое решение задачи (6) по малому параметру ε при $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Теорема 2. Для решения задачи (6) при $t\in[0,1-\varepsilon^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$ справедливо асимптотическое разложение

$$T=1+\varepsilon ln\frac{1}{1-t}+\varepsilon^{2}\frac{1}{1-t}\left\{\tilde{T}_{1}+\frac{\varepsilon}{1-t}\tilde{T}_{2}+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right)^{n}\tilde{T}_{n+1}+\ldots\right\},\ \text{при } \varepsilon\to 0. \quad (7)$$

Ряд (7) является асимптотическим только при $t\in[0,1-\varepsilon^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$. В малой окрестности точки t=1 теряется свойство асимптотичности.

Чтобы построить асимптотическое решение при t>1 введем новую переменную s: $t-1=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\beta/(1+\beta)\varepsilon}s$.

Введем обозначение T(t)=ψ(s). Тогда

$$ds=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\frac{\beta}{(1+\beta)\varepsilon}}dt,\ t=1\Rightarrow s=0;\ t>1\Rightarrow s\to\infty,\ \varepsilon\to 0;\ t<1\Rightarrow s\to-\infty,\ \varepsilon\to 0.$$

и уравнение (6) в новой переменной s примет вид:

$$\frac{d\psi}{ds}=(1+\beta-\psi)e^{\frac{\psi-(1+\beta)}{\varepsilon\psi(1+\beta)}},\quad T(1)=\omega:=1-\varepsilon ln\,\varepsilon+O\left(\varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{2},\varepsilon\to 0 \quad (8)$$

Доказана

Теорема 3. Решение задачи (8) можно представить в виде асимптотического разложения

$$\psi(s)=1+\beta+\varepsilon(1+\beta)^{2}e^{-s}+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^{2}+\ldots+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^{n}+\ldots,\ s\to\infty,\varepsilon\to 0$$

Доказана

Теорема 4. Асимптотическое решение задачи (6) представляется в виде

$$T(t)=1-\varepsilon ln(\tilde{t}-t)+O[\varepsilon ln(\tilde{t}-t)]^2, \varepsilon\to 0,\ t\le 1$$

$$T(s)\{s=(t-1)\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\beta/(1+\beta)\varepsilon}\}=1+\beta+\varepsilon(1+\beta)^2e^{-s}+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^2$$

$$+\ldots+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^n+\ldots,\ \ s\to\infty,\ t>1,\ \varepsilon\to 0.$$

Вывод. Для задачи Рейса начиная с момента

$$t=t_0:=t_0(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ y=y_0\sim 0.78$$

происходит быстрый переход к устойчивой точке y=1.

Решение задачи (6) начинает скачок в особой точке

$$\tilde{t}=1-\varepsilon ln\varepsilon+(\varepsilon ln\varepsilon)^2,\ \varepsilon\to 0,$$

и при этом

$$T\left(\tilde{t}\right)=1-\varepsilon ln\varepsilon+O\left(\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,\ \varepsilon\to 0\,.$$

Затем быстро перейдет в точку равновесия T=1+β.

Глава 4 посвящена построению асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента.

Обычно, асимптотику решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента, получают из интегрального представления его решения, например, интегральное представление Пуассона, Ханкеля, Сонина, Шлефли и др.

В диссертации изложены простые методы получения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента. Асимптотика решения строится прямо из уравнения Бесселя двумя способами: Сведением к уравнению Риккати и прямым методом.

В § 4.1 асимптотика решения уравнения Бесселя нулевого порядка построена сведением его к уравнению Риккати.

Для простоты рассмотрим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=0\,. \tag{10}$$

В (10) сделаем подстановку

$$y(x)=e^{\int S(x)dx}.$$

Отсюда, относительно $S(x)$ получим уравнение:

$$S'(x)+S^2(x)+\frac{1}{x}S(x)+1=0. \tag{11}$$

За нулевое приближение решения уравнения (11) берем решение уравнения:

$$S_0^2(x)+1=0.$$

Отсюда

$$S_0(x)=\pm i.$$

Доказаны

Теорема 5. Асимптотическое решение задачи (11) можно представить в виде

$$S(x)=\pm i-\frac{1}{2}x^{-1}+a_2x^{-2}+\ldots+a_nx^{-n}+R_{n+1}(x), \quad x\to\infty \tag{12}$$

где $|R_{n+1}(x)|\le lx^{-(n+1)}$, l=const.

Теорема 6. Ряд (12) сходится равномерно при больших значениях x.

В § 4.2 прямым методом построена асимптотика решения уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y(x)=0, \tag{13}$$

подстановкой

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}z(x)$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция, уравнение (13) сводится к виду

$$z''(x)+\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)z(x)=0, \tag{14}$$

где $\alpha=\frac{1}{4}-v^2$.

Мы будем искать решение уравнения (14), удовлетворяющее условию

$$z(x) \to \cos x,\ x \to \infty.$$

Это условие можно заменить условием: $z(x) \to \sin x,\ x \to \infty$.

Доказана

Теорема 7. Асимптотическое решение задачи (14) представимо в виде

$$z(x) = \cos x + \alpha x^{-1} \sin x - \alpha(\alpha - 2)2^{-2} x^{-2} \cos x + \ldots$$

$$+(-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)\ldots[\alpha - 2m(2m+1)]}{2^{2m}(2m+1)!\,x^{2m+1}} + \frac{1}{x^{2m+2}} R_{2m+2}(x)$$

где $|R_{2m+2}(x)| \le l = const,\ x \to \infty.$

В § 4.3 построена асимптотика решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента на комплексной плоскости.

В предыдущих параграфах мы построили асимптотику решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента в действительной области, а теперь, обобщая результаты, мы построим асимптотику решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента в комплексной плоскости.

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя в комплексной плоскости

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dU(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)U(z) = 0, \tag{15}$$

где $z \in D = \{z : |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} - \delta,\ \delta > 0\}$, $\nu \in C$ порядок Бесселовых функций ,

$U(z)$ – неизвестная функция комплексной переменной $z=x+iy$, $i = \sqrt{-1}$, $x, y \in R$.

Как выше, с помощью преобразования $U(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} u(z)$, где $u(z)$ – новая неизвестная функция, уравнение (15) приведем к виду

$$u''(z) + \left(1 + \frac{\alpha}{z^2}\right)u(z) = 0. \tag{16}$$

Асимптотику решения уравнения (16) строим в области $z \in D = \{z : |\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} - \delta,\ \delta > 0\}$.

Решение уравнения (16) ищем в виде:

$$u(z)=\cos z\, X(z)+\sin z\, Y(z), \tag{17}$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ новые независимые функции.

Подставляя соотношение (17) в уравнение (16) мы для $X(z)$ и $Y(z)$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2}-X(z)+2\frac{dY(z)}{dz}+\left(1+\alpha z^{-2}\right)X(z)=0,$$

$$\frac{d^2Y(z)}{dz^2}-Y(z)+2\frac{dX(z)}{dz}+\left(1+\alpha z^{-2}\right)Y(z)=0 \ .$$

Мы потребуем, чтобы функции $X(z)$ и $Y(z)$ удовлетворяли условиям: $X(z)\to 1, z\to\infty; \ Y(z)\to 0,\ z\to\infty.$

Неизвестных функции $X(z)$ и $Y(z)$ будем искать в виде

$$X(z)=1+A_2z^{-2}+A_4z^{-4}+A_6z^{-6}+\ldots\ , \tag{18}$$

$$Y(z)=B_1z^{-1}+B_3z^{-3}+B_5z^{-5}+B_7z^{-7}+\ldots \tag{19}$$

где A_k (k=2,4,...), B_m(m=1,3,...) пока неизвестные коэффициенты.

Доказана

Теорема 8. Ряды (18), (19) являются асимптотическими

$$X(z)=\sum_{k=0}^{m}A_{2k}z^{-2k}+R_{1,2m+2}(z),\ Y(z)=\sum_{k=1}^{m}B_{2k-1}z^{-2k+1}+R_{2,2m+1}(z)$$

где

$$|R_{1,2m+2}(z)|\le l\,|z|^{-2m-2}, |R_{2,2m+1}(z)|\le l\,|z|^{-2m-1}, l=const, z\in D, z\to\infty.$$

В главе 5 строятся асимптотики решения сингулярно возмущенных краевых задач в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку и точку поворота. Здесь исследуются задачи Коши, Дирихле, Неймана и Робена.

В § 5.1 построена асимптотика решения первой краевой задачи на отрезке. Рассмотрена первая краевая задача

$$\varepsilon y''(x)-x^2p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1, \tag{20}$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b, \tag{21}$$

где $p(x)$, $q(x) > 0$, $x\in[0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, a, b – const.

Задача (20)-(21) имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Отметим, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$x^2 p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x),$$

имеет нерегулярную особую точку $x=0$.

Решение задачи

$$x^2 p(x)y'_0(x)+q(x)y_0(x)=-f(x),\ 0\le x\le 1,\ y(1)=b.$$

представимо в виде

$$y_0(x)=O\left(e^{1/\varepsilon}\right),\ x\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

Поэтому интегрируем так, чтобы $y_0(x)\in C^\infty[0,1]$. В таком случае, решение соответствующего невозмущенного уравнения можно записать в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x \frac{q(t)}{t^2 p(t)}dt.$

Теорема 9. Для решения задачи (20)-(21) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),\ \varepsilon\to 0,$$

где $v_k\in C^\infty[0,1]$, $t=x/\mu,\ \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ |\pi_k(t)|\le c\,e^{-\sqrt{q(0)}t},\ 0<c-const$, $|z_k(\tau)|\le c_1 e^{-p(1)\tau},\ 0<c_1-const$ π_k, $z_k\in C^\infty[0,\infty)$, $k=0,1,2,...$

Следствие 1. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x,\varepsilon)=y_0(x),\ x\in(0,1).$$

Пример. Пусть $p(x)\equiv1$, $q(x)\equiv1$, $f(x)\equiv1$, a=1, b=4.
Тогда задача (20)-(21) примет вид

$$\varepsilon y''(x)-x^2y'(x)-y(x)=1,\ 0\le x\le 1,\ \ y(0)=1,\ y(1)=4.$$

Соответствующая невозмущенная задача

$$x^2y'(x)+y(x)=-1,\ 0\le x\le 1,\ \ y(1)=4$$

имеет решение

$$y(x)=-1+5e^{\frac{1}{x}-1}.$$

Заметим, что при $x\to0$ решение $y(x)$ экспоненциально растет.

Применяя наш метод, получаем:

$$v_0(x)\equiv-1,\ v_k(x)\equiv0,\ k\in\boldsymbol{N}\text{ и}$$

$$y(x)=-1+2^{-t}+\sqrt{\varepsilon}e^{-t}t\left(c_2t^2+c_1t+c_0\right)+5e^{-\tau}+\varepsilon c_3\tau e^{-\tau}\left(\tau-1\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\varepsilon\to0,$$

где $t=x/\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ c_j-const,\ j=0,1,2,3.$

В § 5.2 исследован случай, когда знак перед производной первого порядка, неотрицательна, т.е. исследована следующая задача

$$\varepsilon y''(x)+x^2p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1, \tag{22}$$

$$y(0)=a,\quad y(1)=b, \tag{23}$$

где $p(x)$, $q(x)>0$, $x\in[0,1]$; $p, q, f\in C^\infty[0,1]$, a, b – const.

Задача (22)-(23) тоже имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to0$.

Доказана

Теорема 10. Для решения задачи (22), (23) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),$$

где $y(x)\in C^{\infty}[0,1]$, при $x\to 0$ имеем $y_k(x)=O(x^{\alpha}e^{-c/x})$, $k\in\mathbf{N}$, $0<c=q(0)/p(0)$, α – const, $|\pi_k(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t}, 0<c-const$, $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, $x=\mu t$.

Следствие 2. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x,\varepsilon)=y_0(x),\ x\in(0,1].$$

В § 5.3 исследуется задача Неймана или вторая краевая задача:

$$\varepsilon y''(x)-x^3p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1, \tag{24}$$

$$y'(0)=a, \quad y'(1)=b, \tag{25}$$

где $p(x), q(x)>0$, $x\in[0,1]$; $p, q, f\in C^{\infty}[0,1]$, a, b – const.

Здесь тоже, соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение имеет иррегулярную особую точку при x=0. Поэтому решение задачи в точке x=0 имеет особенность. Решение задачи (24)-(25) ищем в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$.

Применяя нашу идею, интегрируем так чтобы $y_0(x)\in C^{\infty}[0,1]$. В таком случае, решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^3p(t)}dt.$

Доказана

Теорема 11. Для решения задачи (24)-(25) справедливо асимптотическое разложение

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau), \tag{26}$$

где $v_k\in C^{\infty}[0,1]$, $|\pi_0(t)|\le ce^{-\sqrt{q(0)}t}$, $0<c-const$, $|z_0(\tau)|\le c_1e^{-p(1)\tau}$, $0<c_1-const$, $t=x/\mu$, $\tau=(1-x)/\varepsilon$, $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, π_k, $z_k\in C^{\infty}[0,\infty)$, k=0,1,2,...

Следствие 3. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x,\varepsilon)=y_0(x),\ x\in(0,1).$$

В § 5.4 исследуем задачу Робена, т.е. третью краевую задачу:

$$\varepsilon y''(x) - x^n p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{27}$$

$$y(0) - h_1 y'(0) = a, \quad y(1) + h_2 y'(1) = b, \tag{28}$$

где $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, a, b – const, $0<h_1$, $0<h_2$, n – фиксированное натуральное число больше единицы.

Задача (27)-(28) имеет единственное решение, требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что здесь тоже соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$x^n p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x),$$

имеет нерегулярную особую точку $x=0$.

Доказана

Теорема 12. Для решения задачи (27)-(28) справедливо асимптотическое разложение (26).

В § 5.5 исследована задача Коши с негладким коэффициентом

$$\varepsilon y'(x) + \sqrt{x} q(x) y(x) = f(x),\ 0 < x < T, \tag{29}$$

$$y(0)=y^0, \tag{30}$$

где $q(x)>0$ $x \in [0,T]$, $q, f \in C^\infty[0,T]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, x \to 0$, $f_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $f_0 \ne 0$, T, y^0 – const.

Задача (29)-(30) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$y(x) = y^0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s} q(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(\tau) e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\tau \sqrt{s} q(s) ds} d\tau.$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$, $\varepsilon \to 0$ на отрезке $x \in [0, T]$. Решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon=0$):

$$y_0(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}\,q(x)},$$

не удовлетворяет начальному условию и не является гладкой функцией на отрезке $[0,T]$.

Доказана

Теорема 13. Для решения задачи Коши (29)-(30) при $\varepsilon\to0$, $0\le x\le T$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),$$

где $t=x/\mu^2$, $\mu^3=\varepsilon$, $v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\ \tilde{v}_{2k}\in C^\infty\left[0,T\right],\ v_{2k+1}\in C^\infty\left[0,T\right]$,

$$|\,\pi_{6k-1}(t)|\le ct^{-3/2},\quad |\,\pi_0(t)|\le|\,y^0\,|\,e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},\ \pi_{6m}(t)\equiv0,|\pi_{6k+1}(t)|\le ct^{-2},$$

$$\pi_{6k+2}(t)\equiv0,\,|\,\pi_{6k+3}(t)|\le|\,v_{2k+1}(0)|\,e^{-\frac{2}{3}t^{3/2}},\,\pi_{6k+4}(t)\equiv0,$$

В § 5.6 исследована задача Дирихле с точкой поворота дробного порядка

$$\varepsilon y''(x)-\sqrt{x}y(x)=f(x),\ x\in(0,1),\tag{31}$$

$$y(0)=0,\quad y\,(1)=0\tag{32}$$

где $f\in C^\infty[0,1]$, $f(0)\neq0$.

Не нарушая общности, рассматриваем однородные граничные условия, так как неоднородные граничные условия $y(0)=a$, $y(1)=b$ с помощью линейного преобразования $y(x)=a+(b-a)x+z(x)$ всегда можно привести к однородным граничным условиям $z(0)=0$, $z(1)=0$.

Задача (31)-(32) имеет единственное решение, с помощью модифицированных функций Бесселя можно записать явное решение. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ по малому параметру ε в классе бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to0$.

Здесь тоже решение соответствующего невозмущенного уравнения ($\varepsilon=0$)

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$$

не удовлетворяет краевым условиям и не является гладкой функцией на отрезке [0, 1], точку x=0 по терминологии М.В. Федорюка называют дробной точкой поворота. Следовательно, задача (31)-(32) является бисингулярной.

Доказана вспомогательная

Лемма 1. Задача

$$z''(t) - \sqrt{t}z(t) = \frac{c}{\sqrt{t^k}},\ t \in (0,\infty),\ k = 0,1,3,\ z(0) = z^0,\ \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

имеет единственное решение (здесь c, z^0 – const) представимое в виде

$$z(t) = \frac{z^0 z_2(t)}{z_2(0)} + cc_1\left(z_2(t)\int_0^t s^{-k/2} z_1(s)ds + z_1(t)\int_t^\infty s^{-k/2} z_2(s)ds\right).$$

Доказана

Теорема 14. Асимптотическое решение задачи Дирихле (31)-(32) при $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$, представимо в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k w_k(\tau),$$

где $v_{2k}(x) = \sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\ \tilde{v}_{2k} \in C^\infty[0,1],\ v_{2k+1} \in C^\infty[0,1],$

$\pi_{10k-1}(t)=O(1/t^{1/2})$, $\pi_{10k+1}(t)=O(1/t^2)$, $\pi_{10k+3}(t)=O(1/t)$, $t\to\infty$.

$\pi_{10k-1}(t)=O(t^2)$, $\pi_{10k+1}(t)=O(t^{1/2})$, $\pi_{10k+3}(t)=O(t^{1/3})$, $t\to 0$.

$t=x/\mu^2$, $\mu^5=\varepsilon$, $\lambda^2=\lambda$, $\tau=(1-x)/\lambda$.

Замечание. Аналогично строится равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле

$$\varepsilon y''(x) - x^\alpha p(x)y(x) = f(x),\ 0 < x < 1,\ \ y(0) = y^0, y(1) = y^1,$$

где α – рациональное число, $p, f\in C^\infty[0,T]$, $0<p(x)$, $x\in[0,T]$, $f_0\neq 0$, y^0, y^1 – const.

В § 5.7 построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с кратной точкой поворота

$$\varepsilon y''(x)+x^n y(x)=f(x),\quad 0<x\leq T, \tag{33}$$

$$y(0)=a,\quad y'(0)=b, \tag{34}$$

где n – фиксированное натуральное число, T, a, b – const, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x)$,

$f_k\in C^{\infty}[0,T],\ f_0(0)\neq 0.$

Решение задачи (33),(34) существует и единственно, требуется построить асимптотическое разложение решения этой бисингулярной задачи при $\varepsilon\to 0$.

Доказана

Лемма 2. Задача

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)=\tilde{f}_0(\mu t),\ \ 0<t\le T/\mu,\ \pi_{-n}(0)=0,\ \pi'_{-n}(0)=0$$

имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение в классе функций убывающих степенным ростом, когда $t\to T/\mu$, $\mu\to 0$. Здесь $\tilde{f}_0(x)=\sum_{j=0}^{n-1}x^j f_{0,j}$, $f_{0,j}=f_0^{(j)}(0)/j!$.

Доказана

Теорема 15. Для решения задачи Коши (33), (34) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=-n}^{-1}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(v_k(x)+\pi_k(t)),$$

где $\mu=\sqrt[n+2]{\varepsilon},\ x=\mu t,\ \pi_k(t)$ – пограничные функции, зависящие от μ, $\pi_k\in C^{\infty}[0,T/\mu]$, $v_k(x)\in C^{\infty}[0,T]$.

В 6-ой главе диссертации построена асимптотика решения сингулярно возмущенных параболических задач с различными особенностями.

В § 6.1 исследовано асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Коши на бесконечной прямой с квадратичной особенностью по времени.

Равномерное асимптотическое разложение решения построено обобщенным методом пограничных функций. Рассмотрен случай, когда решение соответствующего «вырожденного» уравнения имеет квадратичный рост сингулярности по времени. Приведена асимптотическая оценка для остаточного члена.

Исследуем задачу Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \qquad (35)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty, \qquad (36)$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in \widetilde{C}^{\infty}(D)$, $f(x,0)\ne 0$, $p(x,t)>0\ \ (x,t)\in \overline{D}$, $\varphi\in \widetilde{C}^{\infty}(R)$, $\widetilde{C}^{\infty}(D)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ – неизвестная функция.

Задача (35)-(36) является бисингулярной, так как соответствующее невозмущенное уравнение имеет не гладкое решение:

$$u_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{t^2 p(x,t)}.$$

Нас интересует асимптотическое поведение решения задачи (35)-(36), когда $\varepsilon\to 0$.

Докажем вспомогательные теоремы.

Теорема 16. Пусть $F(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$, $z^0(x)\in C^{\infty}(R)$, $a(x)>0$. Тогда задача

$$\frac{\partial z(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^2 a(x)z(x,\tau)=F(x,\tau),\ (x,\tau)\in D_1,\ z(x,0)=z^0(x),$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$.

Теорема 17. Пусть $0<a(x)\in C^{\infty}(R)$ и функции $F_j(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$F_j(x,\tau)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\qquad \tau\to+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

Тогда в области D_1, существуют решения уравнений

$$\frac{\partial z_j(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^2 a(x)z_j(x,\tau)=F_j(x,\tau),\ \ j=0,1,2,\ \tau\to+\infty,$$

которые разлагаются в ряды

$$z_j(x,\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\quad \tau\to+\infty .$$

Теорема 18. Для решения задачи (35)-(36) при ε→0 справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x,t)+\sum_{k=-2}^{\infty}\mu^k w_k(x,\tau),$$

где $v_k(x,t)\in C^\infty(D),\ k=0,1,...\ w_k(x,\tau)\to 0$ при τ→+∞, $x\in$R $\varepsilon=\mu^3,\tau=t/\mu$.

В § 6.2 построена асимптотика решения бисингулярной задачи Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{37}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in R, \tag{38}$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0<t\le 1\}$, $f\in\tilde{C}^\infty(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in\tilde{C}^\infty(R)$, m – фиксированное натуральное число, $\tilde{C}^\infty(D)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ – неизвестная функция.

Задача (37)-(38) тоже является бисингулярной, так как предельное (соответствующее невозмущенное, ε=0) уравнение:

$$t^m u^0(x,t)=f(x,t),$$

имеет не гладкое решение:

$$u^0(x,t)=\frac{f(x,t)}{t^m},$$

т.е. решение в точке t=0 имеет полюс m-го порядка.

Доказаны

Лемма 3. Пусть $r(x,\tau)\in\tilde{C}^\infty(\bar{D}_1),\ a(x)\in\tilde{C}^\infty(R)$. Тогда задача

$$z_\tau(x,\tau)\ +\tau^m z(x,\tau)=r(x,\tau),\quad z(x,0)=a(x),$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in\tilde{C}^\infty(D_1)$.

Теорема 19. Для решения задачи (37)-(38) в области $\bar{D}$ при ε→0 справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z^{(k)}(x,t)+\sum_{k=-m}^{\infty}\mu^k w^{(k)}(x,\tau),$$

где $z^{(k)}(x,t) \in \tilde{C}^{\infty}(D),\ W(x,\tau) \in \tilde{C}^{\infty}(D_1),\ D_1 = \{(x,\tau) \mid x \in \mathrm{R},\ 0 < \tau < \infty\}$,

$\varepsilon = \mu^{m+1},\ \tau = t/\mu$.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\left(u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)\right) + tu(x,t) = (1+x^2)^{-1},\quad (x,t) \in D, \qquad u(x,0)=1.$$

Для решения этой задачи справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t) = \mu^{-1}w^{(-1)}(x,\tau) + w^{(0)}(x,\tau) + \mu w^{(1)}(x,\tau) + \mu^2 w^{(2)}(x,\tau) + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0,$$

$(x,t) \in \bar{D}$,

где

$$w^{(-1)}(x,\tau) = (1+x^2)^{-1}\left(\tau^{-1} + \tau^{-3} + O(\tau^{-5})\right),\ \tau \to +\infty,\ x \in R,$$

$$w^{(0)}(x,\tau) = c^{(0)}(x)\left(\tau^{-2} + \tau^{-4} + O(\tau^{-6})\right),\ c^{(0)}(x) = \left((1+x^2)^{-1}\right)'',\ \tau \to +\infty,\ x \in R,$$

$$w^{(j)}(x,\tau) = c^{(j)}(x)\mathrm{O}(\tau^{-2-j}),\ c^{(j)}(x) = \left(c^{(j-1)}(x)\right)'',\ j = 1,2,\ \tau \to +\infty,\ x \in R.$$

В § 6.3 исследовано уравнение теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводностью

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ (x,t) \in D, \tag{39}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = f(x),\quad x \in R, \tag{40}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t < \infty,\ x \in R\}$, $f(x)$ – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Решение задачи существует и единственно. Требуется построить полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру в области $\bar{D}$.

Доказана

Теорема 20. Для решения задачи (39)-(40) в области $\bar{D}$ при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$u(\eta,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots\right)$$

где $t=\dfrac{1}{\varepsilon\eta}-1,\ 0\le\eta\le 1/\varepsilon$.

Пример. Пусть $f(x)=e^{-x^2}$. Тогда

$$u(\eta,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{(\eta+1-4\varepsilon)}}e^{-\frac{x^2}{1+1/\eta-4\varepsilon}}=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{1+\eta}\sqrt{1-\frac{4\varepsilon}{1+\eta}}}e^{-\frac{x^2}{1+\frac{1}{\eta}-4\varepsilon}}$$

$$=e^{-\frac{x^2}{1+1/\eta-4\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1+\eta}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}+\frac{3}{8}\left(\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\ldots\right).$$

Здесь с помощью метода преобразования и обобщенным методом пограничных функций построены равномерные асимптотические разложения решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с негладким коэффициентом. Приведены точные асимптотические оценки для остаточных членов асимптотических рядов, т.е. асимптотические разложения обоснованы.

Заключение по главе 1

Приведен обзор и анализ результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. А также основные научные результаты данной диссертационной работы.

На основе этого анализа можем утверждать, что диссертационное исследование актуально, оригинально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

ГЛАВА 2. МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 2.1. Объект и предмет исследования

Объектами исследования в диссертации являются:

В § 3.1 изучается математическая модель сгорания для явлений со скачком, предложенный американским математиком Рейсом:

$$\frac{d}{dt}y(t)=y^2(t)\left(1-y(t)\right),0<t<\infty,$$

$$y(0)=\varepsilon.$$

В § 3.2 строится асимптотическое разложение решения математической модели химической реакции со стационарной достижимостью

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\varepsilon}{\beta}\left(1+\beta-T\right)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}},\quad T\left(0\right)=1.$$

В § 4.1 строится асимптотика решения линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, т.е. уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=0$$

для больших действительных значений аргумента x.

В § 4.2 рассматривается уравнение Бесселя произвольного порядка

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y(x)=0$$

где x – достаточно большое действительное число.

В § 4.3 строится асимптотика решения уравнения Бесселя произвольного порядка в комплексной плоскости

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dU(z)}{dz}+\left(1-\frac{v^2}{z^2}\right)U(z)=0,$$

при больших значениях аргумента, где $z \in D = \{ z : | Arg\, z | < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0 \}$.

В § 5.1 изучается бисингулярно возмущенное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon y''(x) - x^2 p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1,$$

с краевыми условиями первого типа (или условие Дирихле)

$$y(0)=a, \quad y(1)=b,$$

где $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^{\infty}[0,1]$, a, b – const.

В § 5.2 исследуется бисингулярно возмущенное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon y''(x) + x^2 p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1,$$

с краевыми условиями первого типа

$$y(0)=a, \quad y(1)=b,$$

где $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^{\infty}[0,1]$, a, b – const.

В § 5.3 рассматривается бисингулярно возмущенное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon y''(x) - x^3 p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1,$$

с краевыми условиями второго типа (или условие Неймана)

$$y'(0)=a, \quad y'(1)=b,$$

где $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^{\infty}[0,1]$, a, b – const.

В § 5.4 исследуется бисингулярно возмущенное линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varepsilon y''(x) - x^n p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1,$$

с краевыми условиями третьего типа (или условие Робена)

$$y(0) - h_1 y'(0) = a, \quad y(1) + h_2 y'(1) = b,$$

где $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^{\infty}[0,1]$, a, b – const, $0<h_1$, $0<h_2$, n – фиксированное натуральное число больше единицы.

В § 5.5 рассматривается задача Коши с негладким коэффициентом

$$\varepsilon y'(x) + \sqrt{x} q(x) y(x) = f(x),\ 0 < x < T, \qquad y(0)=y^0,$$

где $q(x)>0$ $x\in[0,T]$, $q, f\in C^{\infty}[0,T]$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, x\to 0$, $f_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$, $f_0\neq 0$, T, y^0 – const.

В § 5.6 исследуется задача Дирихле для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с точкой поворота дробного порядка

$$\varepsilon y''(x)-\sqrt{x}\,y(x)=f(x),\ x\in(0,1),\quad y(0)=0,\quad y(1)=0$$

где $f\in C^{\infty}[0,1]$, $f(0)\neq 0$.

В § 5.7 рассматривается задача Коши для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с кратной точкой поворота

$$\varepsilon y''(x)+x^n y(x)=f(x),\quad 0<x\leq T,\qquad y(0)=a,\quad y'(0)=b,$$

где n – фиксированное натуральное число, T, a, b – const, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x)$, $f_k\in C^{\infty}[0,T]$, $f_0(0)\neq 0$.

В § 6.1 строится асимптотика решения задачи Коши на бесконечной прямой для линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty,$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\leq t\leq 1\}$, $f\in\widetilde{C}^{\infty}(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $p(x,t)>0$ $(x,t)\in\bar{D}$, $\varphi\in\widetilde{C}^{\infty}(R)$, $\widetilde{C}^{\infty}(D)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ – неизвестная функция.

В § 6.2 рассматривается задача Коши на бесконечной прямой для линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in D,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty,$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in\widetilde{C}^{\infty}(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in\widetilde{C}^{\infty}(R)$, $\widetilde{C}^{\infty}(D)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, m – фиксированное натуральное число, $u(x,t)$ – неизвестная функция.

В § 6.3 строится обобщенное асимптотическое представление Пуанкаре для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводностью

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ (x,t)\in D,$$

с начальным условием

$$u(0,x)=f(x),\ \ x\in R,$$

где $D=\{(t,x):0<t<\infty,\ x\in R\}$, $f(x)$ – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Предметом исследования во всех параграфах является построение равномерного асимптотического разложения решения поставленных задач при малых значениях параметра ε.

§ 2.2. Методы исследования

В диссертации основном используются асимптотические: метод преобразования (метод редукции), метод малого параметра, классический метод погранфункций, обобщенный метод погранфункций, метод униформизации.

Для начала приведем некоторые фундаментальные понятия и определения.

Решение возмущенной задачи называется асимптотическим в области *D*, если разность между точным решением и асимптотическим решением стремиться к нулю в *D*, при стремлении малого параметра к нулю по некоторой норме.

Если при этом $\sup\limits_{D}\left\| u(x,\varepsilon)-U(x,\varepsilon)\right\| = O\left(\varepsilon^{k}\right)$, то говорят, что $U(x,\varepsilon)$ является асимптотическим решением с точностью порядка ε^{k} для решения $u(x,\varepsilon)$ в D .

Асимптотическое решение называется равномерной в области *D*, если оно пригодно на всей области *D*.

Под асимптотическим методом понимается тот или иной способ построения асимптотического решения возмущенных задач. Как правило, построение асимптотического решения сводится к решению более простых задач, чем исходная возмущенная задача. Практическая ценность асимптотического метода определяется возможностью эффективного нахождения асимптотического решения с помощью этих более простых задач.

1. Метод малого параметра

В методе малого параметра асимптотическое решение возмущенной задачи ищется в виде ряда по степеням малого параметра. Этот метод применяется обычно при построении внешнего решения или при регулярном возмущении. Например, рассмотрим регулярно возмущенную задачу Коши

$$y'(x)+\varepsilon y(x)=1,\ \ x\in(0,1],\qquad y(0)=1.$$

Асимптотическое решение этой задачи ищется в виде

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots,$$

подставляя это выражение в уравнение, имеем:

$$y'_0(x)+\varepsilon y'_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y'_n(x)+\ldots+\varepsilon y_0(x)+\varepsilon^2 y_1(x)+\ldots+\varepsilon^{n+1}y_n(x)+\ldots=1$$

теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра:

$$\varepsilon^0:\ y'_0(x)=1,$$
$$\varepsilon^k:\ y'_k(x)+y_{k-1}(x)=0,\ k\in N.$$

Интегрируем эти уравнения, учитывая начальное условие $y(0)=1$:

$$y'_0(x)=1\Rightarrow y_0(x)=x+c\ \Rightarrow c=1\Rightarrow y_0(x)=x+1;$$
$$y'_1(x)+x+1=0\Rightarrow y_1(x)=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right);$$
$$y'_2(x)-\frac{x^2}{2}-x=0\Rightarrow y_2(x)=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!};$$

Заметив закономерность, получаем:

$$y_n(x)=(-1)^n\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^n}{n!}\right).$$

Значит, формальное асимптотическое решение задачи Коши можно записать в виде

$$y(x)=1+x-\varepsilon\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+\varepsilon^2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\right)+\ldots+(-1)^n\varepsilon^n\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)+\ldots$$

Чтобы доказать, что этот формальный ряд действительно является асимптотическим решение задачи Коши мы должны оценить остаточный член этого ряда.

Пусть

$$y(x)=y_n(x)+R_n(x),$$

где

$$y_n(x)=1+x-\varepsilon\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+\varepsilon^2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\right)+\ldots+(-1)^n\varepsilon^n\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^n}{n!}\right),$$

$R_n(x)$ – остаточная функция.

Тогда для остаточной функции $R_n(x)$ получим следующую задачу:

$$R'_n(x)+\varepsilon R_n(x)=\varepsilon^{n+1}\Phi(x),\ \ x\in(0,1],\qquad R_n(0)=0,$$

где $\Phi(x)=(-1)^{n+1}\left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

Решение этой задачи можно записать явно:

$$R_n(x)=\varepsilon^{n+1}e^{-\varepsilon x}\int\limits_0^x\Phi(s)e^{\varepsilon s}\,ds.$$

Отсюда получаем, что

$$R_n(x)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Следовательно, когда $\varepsilon\to 0,\ x\in[0,1]$ справедливо разложение:

$$y(x)=1+x-\varepsilon\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+\ldots+(-1)^n\varepsilon^n\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)+O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

2. Классический метод погранфункций

Он в современных трактовках разработан кыргызским математиком М.И. Иманалиевым в 1964 г. и применяется при построении асимптотического решения для сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при старших производных, когда невозмущеннное уравнение имеет гладкое асимптотическое решение на рассматриваемом отрезке.

Приведем простой пример. Исследуем задачу Коши

$$\varepsilon y'(x)+y(x)=x^2+x+1,\ \ x\in(0,1],\qquad y(0)=0.$$

Для начала применяем метод малого параметра, т.е. решение ищем в виде

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots,$$

подставляя это выражение в уравнение, имеем:

$$\varepsilon y'_0(x)+\varepsilon^2 y'_1(x)+\ldots+\varepsilon^{n+1}y'_n(x)+\ldots+y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots=x^2+x+1$$

теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра:

$$\varepsilon^0: \; y_0(x) = x^2 + x + 1,$$
$$\varepsilon^k: \; y'_{k-1}(x) + y_k(x) = 0, \; k \in N.$$

Отсюда находим неизвестные функций $y_k(x)$:

$$y_0(x) = x^2 + x + 1,$$
$$y_1(x) = -(2x+1),$$
$$y_2(x) = 2,$$
$$y_k(x) \equiv 0, \; 2 < k.$$

Следовательно, внешнее решение примет вид:

$$y(x) = x^2 + x + 1 - \varepsilon(2x+1) + 2\varepsilon^2.$$

Нетрудно заметить, что это решение не удовлетворяет начальному условию $y(0)=0$. Остается только окрестность начальной точки. В окрестности начальной точки производим замену переменной $x=\varepsilon t$, t – новая независимая переменная. Решение задачи состоит из двух видов решений: внешнего решения $y(x)$ и погранслойного решения $\pi(t)$.

Решение задачи Коши ищем в виде

$$y(x) = y_0(x) + \pi_0(t) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon \pi_1(t) + \ldots$$

Подставляя это выражение в уравнение имеем:

$$\varepsilon y'_0(x) + \pi'_0(t) + \varepsilon^2 y'_1(x) + \varepsilon \pi'_1(t) + \ldots + y_0(x) + \pi_0(t) + \varepsilon y_1(x) + \ldots = x^2 + x + 1.$$

Отсюда получаем:

$$y_0(x) = x^2 + x + 1,$$
$$\pi'_0(t) + \pi_0(t) = 0, \; \pi_0(0) = -y_0(0),$$
$$y_k(x) = -y'_{k-1}(x),$$
$$\pi'_k(t) + \pi_k(t) = 0, \; \pi_k(0) = -y_k(0).$$

Решения этих задач имеют вид:

$$y_0(x) = x^2 + x + 1, \; y_1(x) = -(2x+1), \; y_2(x) = 2, \; y_k(x) \equiv 0, \; 2 < k;$$

$$\pi_0(t) = -e^{-t}, \;\; \pi_1(t) = e^{-t}, \; \pi_2(t) = -2e^{-t}, \; \pi_k(t) \equiv 0, 2 < k.$$

Функции $\pi_k(t)$ устраняют невязку в начальной точке и экспоненциально исчезают при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно,

$$y(x)=x^2+x+1-e^{-x/\varepsilon}-\varepsilon(2x+1-e^{-x/\varepsilon})+2\varepsilon^2\left(1-e^{-x/\varepsilon}\right).$$

3. Обобщенный метод погранфункций

Если невозмущенное уравнение имеет особенность в начальной точке, то для построения асимптотики решения К. Алымкулов предложил обобщенный метод погранфункций. Поясним идею этого метода для скалярного уравнения с особой точкой.

Рассмотрим бисингулярную задачу Коши

$$\varepsilon y'(x)+xy(x)=f(x), 0<x\le 1, \quad y(0)=a, \tag{1}$$

где $f(x)\in C^\infty[0,\infty)$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, $f_k=f^{(k)}(0)/k!$, $f_0\ne 0$, a – const.

Явное решение задачи (1) при $\varepsilon>0$ имеет вид:

$$y(x)=y^0 e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{\frac{s^2-x^2}{2\varepsilon}} f(s)ds.$$

Как мы видим, при x=0 нарушается условия асимптотической устойчивости. Предельное уравнение (соответствующее невозмущенное)

$$-x\tilde{y}(x)+f(x)=0,$$

имеет решение:

$$\tilde{y}(x)=f(x)/x.$$

Если искать решение задачи (1) в виде

$$y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots, \tag{2}$$

то

$$y_0(x)=\frac{f(x)}{x}\sim f_0x^{-1}, \qquad y_1(x)=x^{-1}y'_0(x)\sim f_0x^{-3},\ x\to 0,$$

$$y_2(x)=x^{-1}y'_1(x)\sim 3f_0x^{-5},\ \ y_3(x)=x^{-1}y'_2(x)\sim 3\cdot 5f_0x^{-5},\ x\to 0,$$

$$y_n(x)=x^{-1}y'_{n-1}(x)\sim 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)f_0x^{-(2n+1)},\ x\to 0,$$

и ряд (2) является асимптотическим на отрезке $(\sqrt{\varepsilon},1]$, особая точка асимптотического ряда (2) $x_0=\sqrt{\varepsilon}=\mu$. Поэтому решение задачи (1) ищем в виде

$$y(x)=\frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t)+Y_0(x)+\pi_0(t)+\mu\big(Y_1(x)+\pi_1(t)\big)+\mu^2\big(Y_2(x)+\pi_2(t)\big)+\ldots,\ \mu\to 0, \quad (3)$$

где $Y_k(x)\in C^{(\infty)}[0,1], \pi_k(t)\in C^{(\infty)}[0,\mu^{-1}], x=\mu t$.

Подставляя (3) в (1) получим

$$\begin{aligned}&\pi'_{-1}(t)+\mu^2 Y'_0(x)+\mu\pi'_0(t)+\mu^3 Y'_1(x)+\mu^2\pi'_1(t)+\mu^4 Y'_2(x)+\mu^3\pi'_2(t)+\\&+\mu^5 Y'_3(x)+\mu^4\pi'_3(t)+\ldots+xY_0(x)+\mu xY_1(x)+\mu^2 xY_2(x)+\mu^3 xY_3(x)+\\&+\ldots+t\pi_{-1}(t)+\mu t\pi_0(t)+\mu^2 t\pi_1(t)+\mu^3 t\pi_2(t)+\mu^4 t\pi_3(t)+\ldots=f(x)\end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) имеем

μ^0 $$\pi'_{-1}(t)+t\pi_{-1}(t)+xY_0(x)=f(x), \quad (5)$$

μ^1 $$\pi'_0(t)+t\pi_0(t)+xY_1(x)=0, \quad (6)$$

μ^{k+1} $$\pi'_k(t)+t\pi_k(t)+xY_{k+1}(x)+Y'_{k-1}(x)=0,\ k=1,2,\ldots \quad (7)$$

Начальные условия для функций $\pi_{k-1}(t),\ k=0,1,...$

$$\pi_{-1}(0)=0, \pi_0(0)=a-Y_0(0), \pi_k(0)=-Y_k(0),\ k=1,2,...$$

Чтобы функция $Y_0(x)$ была гладкой мы определим из уравнения

$$xY_0(x)=f(x)-f_0 \text{ или } Y_0(x)=(f(x)-f_0)/x$$

тогда из (51) для $\pi_{-1}(t)$ имеем уравнение

$$\pi'_{-1}(t)+t\pi_{-1}(t)=f_0.$$

Отсюда

$$\pi_{-1}(t)=f_0 e^{-t^2/2}\int_0^t e^{s^2/2}ds\in C^\infty[0,\mu^{-1}].$$

Очевидно, что эта функция ограничена и бесконечно дифференцируема на отрезке $[0,\mu^{-1}]$, причем при $t\to\infty$

$$\pi_{-1}(t)=-\frac{f_0}{t}\left(1+\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t^4}+\ldots\right).$$

Эту асимптотику можно получить интегрированием по частям интегральное выражение для $\pi_{-1}(t)$.

Из (6) определяем функции $Y_1(x)$ и $\pi_0(t)$. Пусть $Y_1(x)\equiv 0$, тогда

$$\pi'_0(t) + t\pi_0(t) = 0,\ \pi_0(0) = a - f_1,$$

Отсюда находим

$$\pi_0(t) = (a - f_1)e^{-t^2/2}.$$

Из (7) при k=1 имеем

$$\pi'_1(t) + t\pi_1(t) + xY_2(x) + Y'_0(x) = 0.$$

Пусть $xY_2(x) = Y'_0(0) - Y'_0(x)$, тогда $\pi'_1(t) + t\pi_1(t) = -Y'_0(0)$.

Отсюда

$$Y_2(x) = (Y'_0(0) - Y'_0(x))/x,\ \pi_1(t) = -f_2 e^{-t^2/2}\int_0^t e^{s^2/2}ds \in C^\infty[0, \mu^{-1}],$$

причем

$$\pi_{-1}(t) = \frac{f_2}{t}(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^4} + \ldots), t \to \infty.$$

Из (7) при k=2 имеем

$$\pi'_2(t) + t\pi_2(t) + xY_3(x) + Y'_1(x) = 0 \text{ или } \pi'_2(t) + t\pi_2(t) + xY_3(x) = 0.$$

Пусть $Y_3(x) \equiv 0$, тогда

$$\pi'_2(t) + t\pi_2(t) = 0,\ \pi_2(0) = -Y_2(0) = 2f_3.$$

Отсюда находим

$$\pi_2(t) = 2f_3 e^{-t^2/2}.$$

Аналогично продолжая этот процесс, мы определяем остальные функций $Y_k(x)$, $\pi_k(t)$.

Для обоснования этого формального разложения рассмотрим остаточную функцию $R_m(x) = y(x) - \tilde{y}_m(x)$,

где $\tilde{y}_m(x) = \dfrac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + Y_0(x) + \pi_0(t) + \mu(Y_1(x) + \pi_1(t)) + \ldots + \mu^m(Y_m(x) + \pi_m(t))$.

Для остаточного члена $R_k(x)$ получим задачу:

$$\varepsilon R'_m(x) + xR_m(x) = -\mu^{m+2}Y'_m(x),\ 0<x\le 1,\ R_m(0) = 0. \quad (8)$$

Отметим, что если m – нечетное, то $Y'_m(x) \equiv 0$.

Задача (8) имеет единственное решение

$$R_k(x) = -\mu^m e^{-x^2/2\varepsilon} \int_0^x Y'_m(s) e^{s^2/2\varepsilon} ds,$$

и для него справедлива асимптотическая оценка $R_m(x)=O(\mu^m)$, $\mu\to 0$, $0\le x\le 1$.

Таким образом, для решения задачи (1) справедливо разложение:

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\pi_{-1}(t) + Y_0(x) + \pi_0(t) + \mu\left(Y_1(x) + \pi_1(t)\right) + \mu^2\left(Y_2(x) + \pi_2(t)\right) + \ldots, \ \mu\to 0,$$

4. Метод Лайтхилла и метод униформизации

Применение обычного метода малого параметра к уравнению

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) = r(x) - q(x)u(x), \ u(1) = u^0 \tag{9}$$

не дает равномерно пригодного решения на отрезке [0,1]. Поэтому Лайтхилл предложил новый метод для получения параметрического представления решения этого уравнения на отрезке [0,1]. Чтобы показать основную идею метода Лайтхилла, рассмотрим вначале пример

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) + u(x) = 0, \ u(1) = b \tag{10}$$

Точное решение этой задачи

$$u(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 b^2} - x}{\varepsilon} \tag{11}$$

Очевидно, что при $b>0$ решение (11) существует на отрезке [0,1] и

$$u(0) = \frac{\sqrt{2b + \varepsilon b^2}}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{12}$$

Решение задачи (10), полученное методом малого параметра, можно также получить из (11). Для этого запишем (11) в виде

$$u(x) = \frac{x}{\varepsilon}\left(-1 + \sqrt{1 + 2b\frac{\varepsilon}{x} + b^2\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2}\right)$$

и считая $x^2>2\varepsilon b$, можем это выражение разложить в ряд по степеням ε, тогда имеем

$$u(x)=\frac{b}{x}+\frac{b^2}{2x}\frac{\varepsilon}{x^2}(x^2-1)+\ldots+O\left(\frac{1}{x}\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^n\right)+\ldots \tag{13}$$

Ряд (13) является неравномерно сходящимся асимптотическим рядом и он являтется асимптотическим только на отрезке $[\varepsilon^{\alpha},1], 0<\alpha<1/2$, поэтому Лайтхилл предложил искать решение задачи (10) в параметрической форме

$$\begin{cases} u=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\varepsilon^2 u_2(\xi)+\ldots, \quad u(1)=u^0,\, u^0=b, \\ x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\varepsilon^2 x_2(\xi)+\ldots, \quad x(1)=1, \end{cases} \tag{14}$$

где $u_i(\xi)$, $x_{i+1}(\xi)$ $(i=0,1,2,\ldots)$ – пока неопределенные функции, такие что

$$u_i(1)=x_i(1)=0,\ i=1,2,\ldots \tag{15}$$

сначала запишем уравнение (10) в виде

$$(x+\varepsilon u(\xi))u'(\xi)+u(\xi)x'(\xi)=0 \tag{16}$$

Подставляем (14) в (9):

$$(\xi+\varepsilon(u_0(\xi)+x_1(\xi))+\ldots+\varepsilon^n(u_{n-1}(\xi)+x_n(\xi))+\ldots)(u'_0(\xi)+\varepsilon u'_1(\xi)+\ldots+$$
$$+\varepsilon^n u'_n(\xi)+\ldots)+(u_0(\xi)+\varepsilon u'_1(\xi)+\ldots\varepsilon^n u'_n(\xi)+\ldots)(1+\varepsilon x'_1(\xi)+\ldots+\varepsilon^n x'_n(\xi)+\ldots)=0$$

отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε имеем

$$\xi u'_0(\xi)+u_0(\xi)=0 \tag{17}$$

$$\xi u'_n(\xi)+u_n(\xi)+\sum_{i=0}^{n-1}\big((u_i(\xi)+x_{i+1}(\xi))u'_{n-1-i}(\xi)+u_i(\xi)x'_{n-i}(\xi)\big)=0,\ u_n(1)=0,$$

$$n=1,2,\ldots \tag{18}$$

Из (17) имеем:

$$u_0(\xi)=b\xi^{-1}.$$

Используя (17), уравнение (18) при n=1, запишем в виде

$$\xi u'_1(\xi)+u_1(\xi)=(\xi x'_1(\xi)-x_1(\xi)+u_0(\xi))u'_0(\xi)=0,\ u_1(1)=0. \tag{19}$$

Если положим $x_1(\xi)$=0 в (19), то получим

$$\xi u'_1(\xi)+u_1(\xi)=-b^2\xi^{-3},\ u_1(1)=0.$$

Отсюда, решая это уравнение, имеем

$$u_1(\xi) = b^2(2\xi)^{-1} - b^2(2\xi^3)^{-1}.$$

Это значение $u_1(\xi)$ совпадает с коэффициентом при ε в (13) при $\xi=x$, что соответствует применению к уравнению (10) метода малого параметра.

Поскольку дифференцирование ухудшает свойство негладкой функции, выбираем $x_1(\xi)$ так, чтобы выражение в скобке в правой части (19) было равно нулю, т.е.

$$\xi x'_1(\xi) - x_1(\xi) + u_0(\xi) = 0,\ x_1(1) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$x_1(\xi) = \frac{b}{2}\xi - \frac{b}{2\xi}.$$

Тогда уравнение (19) примет вид:

$$\xi u'_1(\xi) + u_1(\xi) = 0,\ u_1(1) = 0.$$

Отсюда, получаем

$$u_1(\xi)=0.$$

Теперь уравнение (18) при n=2 примет вид

$$\xi u'_2(\xi) + u_2(\xi) = (\xi x'_2(\xi) - x_2(\xi))u'_0(\xi) = 0,\ u_2(1) = 0.$$

Возьмем $x_2(\xi)=0$, тогда и $u_2(\xi)=0$. Далее также выбираем $x_i(\xi)=u_i(\xi)=0$ (i=3,4,…), т.к. они тоже удовлетворяют начальным условиям (15). Таким образом, мы получили, что

$$u(\xi) = b\xi^{-1} \tag{20}$$

$$x(\xi) = \xi + \frac{b}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\varepsilon. \tag{21}$$

Полагая в (21) x=0, имеем

$$\xi = \sqrt{b\varepsilon/(2 + b\varepsilon)}. \tag{22}$$

При b>0 точка x=0 достигается при действительном значении ξ. Подставляя значение (22) в (20), получаем формулу (12). Более того, исключая из (20) и(21) параметр ξ, мы получаем точное решение (11).

К. Алымкулов предложил для сингулярно возмущенных уравнений типа Лайтхилла метод униформизации.

Вместо задачи (9) рассматривается следующее униформизованное уравнение

$$\begin{cases} \xi u'(\xi) = r(x(\xi)) - q(x(\xi))u(\xi),\ u(1) = u^0, \\ \xi x'(\xi) = x(\xi) + \varepsilon u(\xi),\ x(1) = 1,\ \xi \in [\eta, 1], \end{cases} \tag{23}$$

где $\eta = \eta(\varepsilon)$ является корнем $x(\eta)=0$.

Если этот корень 1) $\eta = \eta(\varepsilon)>0$ то $x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0$, на отрезке $[\eta,1]$ и задача (1) и (23) эквивалентны.

Эту идею изложим для двух модельных уравнений

Пример 1. Сначала рассмотрим уравнение (10) согласно (23) униформизованная задача имеет вид

$$\begin{cases} \xi u'(\xi) = -u(\xi),\ \ u(1) = b, \\ \xi x'(\xi) = x(\xi) + \varepsilon u(\xi),\ x(1) = 1,\ \xi \in [\eta, 1], \end{cases}$$

Легко интегрируя эту систему получим

$$u(\xi) = b\xi^{-1},\ x(\xi) = (1 + 2^{-1}b\varepsilon)\xi - (2\xi)^{-1}b\varepsilon\,,$$

Отсюда, исключая переменную ξ получим точное решение (11)

$$u(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 b^2} - x}{\varepsilon}.$$

Пример 2. (G. Темпл). $(x + \varepsilon y(x))y'(x) + (2 + x)y(x) = 0,\ y(1) = e^{-1}$.

Униформизированное уравнение имеет вид

$$\begin{cases} \xi x'(\xi) = x + \varepsilon y(\xi),\ \ x(1) = 1, \\ \xi y'(\xi) = -(2 + x(\xi))y(\xi),\ y(1) = e^{-1},\ \xi \in [\eta, 1]. \end{cases} \tag{24}$$

Пусть

$$\begin{cases} x(\xi) = x_0(\xi) + \varepsilon x_1(\xi) + O(\varepsilon^2), \\ y(\xi) = y_0(\xi) + \varepsilon y_1(\xi) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24) имеем:

$$x_0(\xi) = \xi, \qquad x_1(\xi) = \xi\int_1^{\xi} e^{-s}s^{-4}ds,$$

$$y_0(\xi) = e^{-\xi}\xi^{-2},\ \ y_1(\xi) = -e^{-\xi}\xi^{-2}\int_1^{\xi} e^{-s}s^{-4}ds.$$

Отсюда при $\xi \to 0$ получаем:

$$x_0(\xi) = \xi, \qquad x_1(\xi) = -\frac{1}{3}\xi^{-2} + \ldots,$$

$$y_0(\xi) = \xi^{-2} + \ldots, \quad y_1(\xi) = -\frac{1}{6}\xi^{-4} + \ldots$$

Из уравнения $x(\eta) = 0$ находим $\eta : \eta \sim \sqrt[3]{\varepsilon / 3}$.

Докажем, что $x(\xi)+\varepsilon y(\xi)\neq 0$, на отрезке $[\eta,1]$.

Действительно,

$$x(\xi) + \varepsilon y(\xi) \sim \xi + \varepsilon\xi^{-2} \neq 0, \xi \in [\eta,1].$$

5. Метод мажорант применятся для доказательства сходимости аналитических решений обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений используя неравенства Коши для аналитических функций.

Заключение по главе 2

В главе 2 приведены объекты и предметы исследования, также с конкретными примерами описаны многократно используемый в данной диссертации асимптотические методы: метод малого параметра, классический метод погранфункций, обобщенный метод погранфункций, метод униформизации и метод мажорант. Отмечено, к каким классам возмущенных задач применяются эти методы.

Глава 3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Глава посвящена построению асимптотики решения нелинейных сингулярно возмущенных задач с быстрыми переходами. Разнообразные физические явления связаны с быстрыми и внезапными переходами. Типичными примерами этого являются: сгорание и взрывы; вспышки населения; переходы из ледниковых периодов и землетрясения. Все эти проблемы охарактеризованы математически, как небольшое возмущение, вызывающее большую амплитудную реакцию. Таким образом, стандартные асимптотические и возмущающие методы, такие как метод возмущений Пуанкаре-Линстедта и многомасштабный метод не применимы к этим проблемы. В этих методах изучаются реакции с малой амплитудой на небольшие возмущения.

§ 3.1. Асимптотика решения задачи Рейса для явления прыжка

Исследуем асимптотику решения задачи Рейса для явления прыжка

$$\frac{dy}{dt} = y^2(t)\big(1 - y(t)\big),\ t \in (0,\infty), \quad y(0) = \varepsilon. \tag{1}$$

(1) – простая математическая модель сгорания. Это уравнение является элементарной моделью для тримолекулярных реакций. Здесь $y(t)>0$ является концентрацией реагирующего химического вещества в момент времени t. В уравнении имеется два состояния равновесия: $y=0$ и $y=1$. Они являются состоянием предварительного зажигания $y=0$ и состоянием взрыва $y=1$. Начальное значение малого параметра $\varepsilon=0$ представляет собой нарушение состояния до розжига.

Линейная устойчивость показывает, что состояние взрыва асимптотически неустойчиво. Однако дифференциальное уравнение в (1) влечет, что $y' > 0$, для y в интервале $0<y<1$. Следовательно, состояние перед зажиганием нелинейно неустойчиво.

Нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка (1) имеет две точки равновесия:

$y=0$ – неустойчивая точка равновесия;

$y=1$ – устойчивая точка равновесия.

Ранее, для решения задачи (1), в работе [31] получена следующая асимптотика:

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)e^{-\sigma}}, \text{ при } \sigma<1,\\ \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)e^{1+\frac{1-\sigma}{\varepsilon}}}, \text{ при } \sigma>1\end{cases} \tag{2}$$

где $\sigma=\varepsilon t$.

Из соотношения (2) следует , что решение имеет скачок при $\sigma=1$ или $t=1/\varepsilon$.

А в работе [19] получена трех зонная асимптотика решения данной задачи.

Попробуем найти точное решение задачи (1). Для этого преобразуем уравнение к следующему виду

$$\frac{dy}{y^2(1-y)}=dt,$$

Интегрируя это равенство, имеем:

$$\int_0^t \frac{dy}{y^2(1-y)}=\int_0^t ds, \text{ или}$$

$$\int_0^t \frac{(1-y)dy}{y^2(1-y)}+\int_0^t \frac{ydy}{y^2(1-y)}=t,$$

После интегрирования получаем:

$$-\frac{1}{y(t)}+\frac{1}{y(0)}+ln\frac{y(t)}{1-y(t)}-ln\frac{y(0)}{1-y(0)}=t,$$

отсюда, учитывая начальное условие $y(0)=\varepsilon$ имеем:

$$-\frac{1}{y(t)}+\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{y(t)}{1-y(t)}-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}=t.$$

Действительно, задача (1) имеет точное решение в неявном виде:

$$-\frac{1}{y}+ln\frac{y}{1-y}=t-\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\ . \tag{3}$$

Используя специальную функцию Ламберта, точное решение в неявном виде (3) можно записать в явном виде:

$$ln\, e^{-\frac{1}{y}}\frac{y}{1-y}=t-\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

или

$$e^{-\frac{1}{y}}\frac{y}{1-y}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{t-\frac{1}{\varepsilon}}$$

упростим:

$$\frac{1-y}{y}e^{\frac{1}{y}}=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t}$$

$$\left(\frac{1}{y}-1\right)e^{\frac{1}{y}-1}=e^{-1}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t}$$

$$\frac{1}{y}-1=W\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t-1}\right)$$

в результате, получаем явное решение:

$$y(t)=\frac{1}{W\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}-t-1}\right)+1},$$

где $W(x)$ – функция Ламберта.

Функция Ламберта определяется следующим образом:
если $xe^x=a$, то $x=W(a)$.

1-способ. Попробуем получить асимптотику решения задачи (1) из точного решения в неявном виде.

Если

$$t = t_0 := t_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

то нелинейное алгебраическое уравнение

$$\frac{1}{y} = ln\frac{y}{1-y}$$

имеет единственный корень: y=0.7821882941

Если $t<t_0$ то $\tau\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Точное решение в неявной форме (3) запишем в виде

$$u - ln\frac{1}{u-1} = \frac{1}{\varepsilon} - t - ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} := \tau \tag{4}$$

где $u=y^{-1}$.

Получим разложение решения этого уравнения при $\tau\to\infty$.

В (4) сделаем преобразование

$$u=\tau-z\ \ln(\tau-1)\ .$$

Тогда для z получим следующее уравнение

$$F(z,\alpha,\beta):=z-1-\alpha\ln(1-\beta z)=0 \tag{5}$$

где

$\alpha=\alpha(\varepsilon):=[\ln(\tau-1)]^{-1}$, $\beta=\beta(\varepsilon):=(\tau-1)^{-1}\ln(\tau-1)$.

Очевидно, что α, β стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Функция $F(z,\alpha,\beta)$ является аналитической функцией своих аргументов.

Так как $F(1,0,0)=0$, $F_z(1,0,0)=1\neq 0$ то, по теореме о неявных функциях уравнение (5) имеет единственное сходящееся решение при малых α, β, то есть имеет место разложение

$$z = 1 + \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}\alpha^i\beta^j$$

где a_{ij} – некоторые постоянные, например, $a_{10}=0$, $a_{01}=0$, $a_{11}=-1$, $a_{20}=0$, $a_{02}=0$, $a_{12}=-1/2$ причем этот ряд сходится при малых α, β.

Таким образом, разложение для $y(t)$ имеет вид:

$$y(t)=\frac{\varepsilon}{\tilde{y}(t,\varepsilon)}, \qquad \text{при} \quad t\le\frac{1}{\varepsilon}+ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \tag{6}$$

где

$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=1-\varepsilon t-\varepsilon ln(1-\varepsilon)-\varepsilon ln(1-\varepsilon t-\varepsilon ln\varepsilon+\varepsilon ln(1-\varepsilon)-1)\left(1+\sum_{i+j=1}^{\infty}a_{ij}\alpha^i\beta^j)\right).$$

Отметим, что этот ряд сходится при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, мы получили разложение решения уравнения (1) при $t\le t_0=\frac{1}{\varepsilon}-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Теперь рассмотрим случай $t>t_0$.

В этом случае (4) запишем в виде

$$1-y=e^{-\tau}e^{-\frac{1}{y}}y. \tag{12}$$

Вводим новую переменную $y=1-\varphi$, тогда (12) запишется в виде

$$\varphi=e^{-\tau}\left(1-\varphi\right)e^{-\frac{1}{1-\varphi}}. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) при $\tau\to\infty$ разлагается ряд в виде

$$\varphi=e^{-\tau}-\varphi_2e^{-2\tau}+\varphi_3e^{-3\tau}+\dots$$

где φ_j – некоторые постоянные.

Следовательно, при $t>t_0=\frac{1}{\varepsilon}-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, имеем

$$y=1-e^{-\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k e^{-k\tau},\ \tau=\frac{1}{\varepsilon}-t-ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \tau>0.$$

Таким образом, доказана

Теорема. Для решения задачи (1) справедливо следующее разложение

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\tilde{y}(t,\varepsilon)},\ при\quad t\le\dfrac{1}{\varepsilon}+ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\\ y_2(t),\quad при\quad \tau=\dfrac{1}{\varepsilon}-t-ln\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \tau>0\ \tau>\tau_0\end{cases} \tag{14}$$

где

$$\tilde{y}(t,\varepsilon)=1-\varepsilon t-\varepsilon ln\varepsilon+\varepsilon ln(1-\varepsilon)-\varepsilon ln(1-\varepsilon t-\varepsilon ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-1)\left(1+\sum_{i+j=1}^{\infty}a_{ij}\alpha^i\beta^j\right),$$

$$y_2(t)=1-e^{-\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k e^{-k\tau}.$$

2-способ. Получение асимптотического разложения методом униформизации

После преобразования $y=\varepsilon x,\ \theta=\varepsilon t$ задача (1) приводится к виду

$$\frac{dx(\theta)}{d\theta}=x^2(\theta)(1-\varepsilon x(\theta)),\ x(0)=1. \qquad (15)$$

Если решать задачу (15) обычным методом возмущений, то есть, искать решение в виде

$$x(\theta)=x_0(\theta)+\varepsilon x_1(\theta)+...+\varepsilon^n x_n(\theta)+..., \qquad (16)$$

то имеем

$$x_0(\theta)=(1-\theta)^{-1},...,\ x_n(\theta)\sim(1-\theta)^{-n-1}\ln^n(1-\theta),...\ \text{при}\ \theta\to 1. \qquad (17)$$

Из (17) видно, что ряд (16) расходится в окрестности точки $\theta=1$ или $t=1/\varepsilon$. Более точно, ряд (16) сходиться только на отрезке $[0,\theta_0)$ где

$$\theta_0=1-\varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon}-ln\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right)+O(1)\right).$$

Чтобы получить решение задачи (15) для любого $\theta\in[0,\infty)$ вместо него рассмотрим униформизирующее уравнение

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi}=x^2(\xi),\quad \frac{d\theta}{d\xi}=(1-\varepsilon x(\xi))^{-1},\ x(0)=1,\ \theta(0)=0 \qquad (18)$$

где $\xi\in[0,\infty)$.

Решая эти задачи, имеем

$$x(\xi)=\frac{1}{1-\xi},\ \theta=\xi-\varepsilon ln\frac{|1-\xi-\varepsilon|}{1-\varepsilon}. \qquad (19)$$

Это параметрическое решение не менее сложное, чем явное решение (3) так как $x(\xi)$ имеет полюс в точке $\xi=1$.

Теперь получим сходящееся разложение из параметрического представления (19).

Введем обозначение:

$$\sigma=\frac{1-\theta}{\varepsilon}-1+ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon};\ \delta=\frac{1-\xi}{\varepsilon}-1. \qquad (23)$$

Тогда второе выражение в (19) запишется в виде

$$\delta e^{|\delta|}=e^{\sigma}:=\rho \qquad (24)$$

Если $0\le\theta\le 1$, то $\sigma\to+\infty(\rho\to+\infty)$ при $\varepsilon\to 0$ и решение уравнения (23) разлагается в сходящий ряд

$$\delta=\sigma-ln\sigma+\sum_{i+j=0}^{\infty}a_{ij}\tilde{\alpha}^i\beta^j,\quad \tilde{\alpha}=\frac{1}{\sigma},\quad \tilde{\beta}=\frac{ln\sigma}{\sigma} \qquad (25)$$

где a_{ij} – такие же постоянные, как и в (6). Используя (25) и (24), а затем возвращаясь к переменным y, t имеем

$$y(t)=\left[1-t\varepsilon+\varepsilon ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}-\varepsilon ln\left(\frac{1-\varepsilon t}{\varepsilon}-1+ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon)\right]^{-1} \qquad (26)$$

В случае θ>1 параметр ρ в (24) становится малым при малом ε. Поэтому решение уравнения (24) разлагается в ряд по степеням

$$\delta=\rho+\delta_2\rho^2+\delta_3\rho^3+\ldots, \qquad (27)$$

где δ_k определяются подстановкой (27) в (24). Используя (23) и (19) возвращаясь к переменным y, t имеем

$$y(t)=\varepsilon+\left[\varepsilon+(1-\varepsilon)e^{\frac{1-\tau}{\varepsilon}-1}+\varepsilon\sum_{j=2}^{\infty}\delta_j e^{j\sigma}\right]^{-1},\quad t>\frac{1}{\varepsilon}$$

Замечание. Из (25) и (27) следует, что

$$1-\xi\sim\varepsilon ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},\ \text{если } \theta=\varepsilon t\le 1,$$

$$1-\xi\sim\varepsilon+(1-\varepsilon)e^{\frac{1-\theta}{\varepsilon}-1},\ \text{если } \theta=\varepsilon t>1.$$

Отсюда вытекает эквивалентность задачи (1) и (18).

Заключение. Начиная с момента

$$t = t_0 := t_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ y = y_0 \sim 0.78$$

происходит быстрый переход к устойчивой точке $y=1$.

§ 3.2. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью

В этом параграфе исследуется нелинейная задача, взятая из теории пространственно однородных тепловых взрывов. Он демонстрирует несколько особенностей, которых нет в ранее исследованных работах. Они включают появление более чем одной внешней области, более одного (внутреннего) слоя и нелинейного преобразования расжатия.

Рассмотрим изолированную в воде емкость, в которой происходит одностадийная, необратимая экзотермическая реакция типа $A \to B$. Математическая модель, которой представима в виде [5]:

$$\frac{dY}{dt} = -AYe^{-(E/RT)}, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{c}AYe^{-(E/RT)}, \tag{2}$$

с начальным условием $Y(0)=Y_0$, $T(0)=T_0$.

Здесь время независимая переменная, Y и T соотвественно массовая доля реагента A и температуры. Величины c – удельная теплоемкость, Q – теплота реакции, A –предэкспоненциальный фактор, E –энергия активации, и R –универсальная массовая константа. Все эти величины положительные.

Из (1) и (2) имеем

$$\frac{dT}{dY} = -\frac{Q}{c} \quad \Rightarrow dT = -\frac{Q}{c}dY \quad \Rightarrow T - T_0 = -\frac{Q}{c}\left(Y - Y_0\right),\ T_0, Y_0 - const$$

Отсюда

$$T + \frac{Q}{c}Y = T_0 + \frac{Q}{c}Y_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{c}Y = T_0 + \frac{Q}{c}Y_0 - T.$$

Учитывая $\frac{Q}{c}Y = T_0 + \frac{Q}{c}Y_0 - T$, уравнению (2) можно записать в виде

$$\frac{dT}{dt} = A\left(T_0 + \frac{Q}{c}Y_0 - T\right)e^{-(E/RT)},\ T(0) = T_0. \tag{3}$$

Используя T_0 в характеристической температуре и

$$t_0 = \frac{cT_0^2 R}{AQY_0E}e^{(E/RT_0)}$$

уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varepsilon}{\beta}(1+\beta-T)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}, \qquad T(0) = 1,$$

где $\beta = QY_0/(cT_0)$, $\varepsilon = RT_0/E$.

Далее, исследуем задачу Коши

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varepsilon}{\beta}(1+\beta-T)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}, \tag{4}$$

$$T(0) = 1. \tag{5}$$

Для начала попробуем найти точное решение. Для этого уравнению (4) запишем в виде

$$dt = \frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta-T)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon T}}dT,$$

или

$$dt = \frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{T}\left(\frac{1+\beta}{1+\beta-T} - 1\right)e^{\frac{1}{\varepsilon T}}dT,$$

$$dt = \frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{1+\beta}{T(1+\beta-T)} - \frac{1}{T}\right)e^{\frac{1}{\varepsilon T}}dT,$$

$$dt = \frac{\beta}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}e^{\frac{1}{\varepsilon T}}dT + \frac{1+\beta}{T(1+\beta-T)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon T}}dT\right),$$

отсюда имеем:

$$\int_1^T dt = \frac{\beta}{\varepsilon}\left\{\int_1^T\left(-\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}e^{\frac{1}{\varepsilon s}}ds\right) + \int_1^T \frac{1+\beta}{s(1+\beta-s)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon s}}ds\right\},$$

$$t(T)=\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\int_1^T\left(\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon s}}e^{\frac{1}{\varepsilon s}}d\left(\frac{1}{\varepsilon s}\right)\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}\int_1^T\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon s}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}e^{\frac{1}{\varepsilon s}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}d\left(\frac{1}{\varepsilon s}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}\right)s\right\}$$

Если ввести обозначение $Ei(x)=P.V.\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{y}e^{y}dy$, то получим

$$t(T)=\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\int_{1/\varepsilon}^{1/T\varepsilon}\frac{1}{y}e^{y}dy-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}\int_{\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}^{\frac{1}{\varepsilon T}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}\frac{1}{y}e^{y}dy\right\}=$$

$$=\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\left(\int_{-\infty}^{1/T\varepsilon}-\int_{-\infty}^{1/\varepsilon}\right)\frac{1}{y}e^{y}dy-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{1}{\varepsilon T}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}-\int_{-\infty}^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}\right)\frac{1}{y}e^{y}dy\right\},$$

или

$$\begin{aligned}t(T)=&\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{T\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon T}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}\right)\right\}-\\&-\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}\right)\right\}\end{aligned}. \qquad (6)$$

Мы получили решение задачи (4)-(5) в неявном виде.

Попробуем теперь построить явное асимптотическое решение задачи (4)-(5) по малому параметру ε при $\varepsilon\to 0$.

Сначала построим внешнее асимптотическое решение, которого будем искать в виде:

$$T=1+\varepsilon T_1+\varepsilon^2T_2+\ldots+\varepsilon^n T_n+\ldots, \qquad (7)$$

где $T=T(t),\ T_i=T_i(t)$ – пока неизвестные функции.

Подставляя ряд (7) в выражение $e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}$ имеем:

$$e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}=e^{T_1}+\varepsilon e^{T_1}\left(T_2-T_1^2\right)+\varepsilon^2e^{T_1}(T_3-2T_1T_2+T_1^3+\frac{1}{2}T_2^2-T_2T_1^2+\frac{1}{2}T_1^4)+$$

$$+\varepsilon^3 e^{T_1}(T_4-2T_1T_3-T_2^3+3T_2T_1^2-T_1^4+T_3T_2-2T_1T_2^2+3T_2T_1^3-T_3T_1^2-T_1^5+$$
$$+\frac{1}{6}T_2^3-\frac{1}{2}T_2^2T_1^2+\frac{1}{2}T_2T_1^4-\frac{1}{6}T_1^6)+\dots \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (4) имеем:

$$T_1'+\varepsilon T_2'+\varepsilon^2T_3'+\dots=\frac{1}{\beta}\left(\beta-\varepsilon T_1-\varepsilon^2T_2-\varepsilon^3T_3-\dots\right)\left(e^{T_1}+\varepsilon e^{T_1}\left(T_2-T_1^2\right)+\right.$$
$$\left.+\varepsilon^2e^{T_1}(T_3-2T_1T_2+T_1^3+\frac{1}{2}T_2^2-T_2T_1^2+\frac{1}{2}T_1^4)+\dots\right)$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и учитывая начальное условие (2), получаем:

$$\frac{dT_1}{dt}=e^{T_1},\ T_1(0)=0, \tag{9}$$

$$\frac{dT_2}{dt}=e^{T_1}\left(T_2-T_1^2\right)-e^{T_1}\frac{T_1}{\beta},\ T_2(0)=0 \tag{10}$$

$$\frac{dT_3}{dt}=e^{T_1}\left(T_3-2T_1T_2+T_1^3+\frac{1}{2}T_2^2-T_2T_1^2+\frac{1}{2}T_1^4\right)-e^{T_1}\frac{T_1}{\beta}\left(T_2-T_1^2\right)-\frac{T_2}{\beta}e^{T_1},\ T_3(0)=0 \tag{11}$$

…

Решение задачи (9) представимо в виде:

$$T_1=ln\frac{1}{1-t},\ e^{T_1}=\frac{1}{1-t},\ 0\le t<1.$$

Подставляя это выражение в (10) имеем:

$$T_2'=\frac{1}{1-t}T_2-\frac{1}{1-t}ln^2\frac{1}{1-t}-\frac{1}{\beta\left(1-t\right)}ln\frac{1}{1-t}$$

интегрируя последнее выражение получаем:

$$T_2=ln^2\frac{1}{1-t}+2ln\frac{1}{1-t}+2+\frac{1}{\beta}ln\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\beta}+\frac{c}{1-t},\ c=-2-\frac{1}{\beta}.$$

Заметим, что справедливы асимптотические оценки:

$$T_1=ln\frac{1}{1-t},\ t\to 1,$$

$$T_2 = O\left(\frac{1}{1-t}\right),\ t \to 1.$$

Учитывая эти асимптотические оценки, получаем следующие соотношения:

$$T_3 = O\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right),\ t \to 1, \qquad T_k = O\left(\frac{1}{(1-t)^{k-1}}\right),\ t \to 1,\ k > 3.$$

Следовательно, справедливо разложение

$$T = 1 + \varepsilon ln\frac{1}{1-t} + \varepsilon^2 \frac{1}{1-t}\left\{\tilde{T}_1 + \frac{\varepsilon}{1-t}\tilde{T}_2 + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right)^n \tilde{T}_{n+1} + \ldots\right\}, \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

т.е. асимптотика решения задачи (4)-(5) имеет вид

$$T(t) = 1 - \varepsilon ln(1-t) + \frac{\varepsilon^2}{1-t}\big(-c + O(\varepsilon)\big),\ \varepsilon \to 0,$$

где $c = 2 + \dfrac{1}{\beta}$.

Отсюда следует, что этот ряд является асимптотическим только на отрезке $[0, 1-\varepsilon^{\alpha}]$, где $0 < \alpha < 1$.

Справедлива

Теорема 1. Асимптотика решения задачи (4)-(5) имеет вид (12) и она остается асимптотическим на отрезке $[0, 1-\varepsilon^{\alpha}]$, $0<\alpha<1$.

Доказательство этой теоремы приведем для случая асимптотики порядка 2, т.е. если решение задачи (4)-(5) представить в виде

$$T(t) = 1 + \varepsilon ln(1-t) + \varepsilon^2 T_2(t), \tag{13}$$

то

$$|T_2(t)| \le c_2 + O\left(ln^2(1-t)\right),\ t \in [0, 1-\varepsilon^{\alpha}].$$

Доказательство. Для $T_2(t)$ получим следующее уравнение

$$T'_2 = e^{T_1}\left(T_2 - T_1^2\right) - e^{T_1}\frac{T_1}{\beta} + \varepsilon F(t, T_1, T_2, \varepsilon),\ T_2(0) = 0 \tag{14}$$

где $F(t, T_1, T_2, \varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(1 - \dfrac{\varepsilon T_1}{\beta} - \dfrac{\varepsilon T_2}{\beta}\right)e^{\frac{T_1 + \varepsilon T_2}{1 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2}} - e^{T_1} - \varepsilon\left(e^{T_1}\left(T_2 - T_1^2\right) - e^{T_1}\dfrac{T_1}{\beta}\right).$

Свойства функции $F(t,T_1,T_2,\varepsilon)$:

$$F(t,T_1,T_2,\varepsilon)=O\left(\varepsilon T_2\right)+O\left(\varepsilon^2 T_1^2\right),\ \varepsilon\to 0.$$

Из (14) переходим в интегральное уравнение

$$T_2(t)=\left(1-t\right)^{-1}\int_0^t(1-s)F(s,T_1,T_2,\varepsilon)ds+f(t)\equiv S[T_2],$$

где $f(t)=c_2(1-t)^{-1}-c_2\,ln(1-t)+ln^2(1-t)$.

Рассмотрим множество Г функций на отрезке $\tilde{t}=[0,1-\varepsilon^{\alpha}]$ и $|T_2(t)|\le 2|f(t)|,\ t\in[0,1-\varepsilon^{\alpha}]$.

Из свойств функции F вытекает, что оператор S переводить множество Г в себя и

$$|T_2(t)|\le 2\left((1-t)^{-1}c_2-2ln(1-t)+ln^2(1-t)\right).$$

Далее, чтобы продолжить, это решение до точки t=1 в решении (13) производим замену переменных

$$t=\tau-\alpha(\varepsilon),$$

где $\alpha(\varepsilon)=\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2+O\left(\varepsilon^3\right),\ \varepsilon\to 0$.

Тогда имеем

$$T(1-\tau-\alpha(\varepsilon))=u(\tau)=1-\varepsilon ln\tau-\varepsilon\tau^{-1}\alpha(\varepsilon)+\varepsilon^2\tau^{-2}\alpha^2(\varepsilon)+O\left(\varepsilon\alpha^2\tau^{-2}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{\tau}\left(1+\frac{\alpha}{\tau}+)\left(\frac{\alpha^2}{\tau^2}\right)\right)\left(-c+\frac{\varepsilon a_1}{\tau}+\ldots+\varepsilon^n\tau^{-n}a_n+\ldots\right).$$

Если выбрать $\alpha=-c\varepsilon+O\left(\varepsilon^2\right)$, то очевидно, что

$$T(1-\tau-\alpha(\varepsilon))=u(\tau)=1-\varepsilon ln\tau+O((\varepsilon ln\tau)^2).$$

Отсюда, имеем

$$T(1)=1-\varepsilon ln\varepsilon+O((\varepsilon ln\varepsilon)^2)$$

т.е. мы достигли точку t=1.

Этот результат можно также доказать из точного неявного решения (6):

$$t=\tilde t_\varepsilon-\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1+\beta-T}{\varepsilon(1+\beta)T}\right)+\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{T\varepsilon}\right), \tag{15}$$

где $\tilde t_\varepsilon=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{\beta}{(1+\beta)\varepsilon}\right)-\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Используя асимптотику

$$Ei(x)=p.v.\int_{-\infty}^{x}\frac{e^s}{s}ds=\frac{e^x}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^2}+\ldots+\frac{m!}{x^m}+\ldots\right),\ x\to\infty$$

имеем

$$\tilde t_\varepsilon=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}e^{\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}\frac{\varepsilon(1+\beta)}{\beta}\left(1+\frac{\varepsilon(1+\beta)}{\beta}+\frac{\varepsilon^2(1+\beta)^2}{\beta^2}+O(\varepsilon^3)\right)-$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2!}+O\left(\varepsilon^3\right)\right)=1+c\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$

где $c=2+\frac{1}{\beta}$.

Таким образом $\tilde t_\varepsilon=1+c\varepsilon+O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0$.

Теперь из (15) получим асимптотическое представление. Формулу (15) перепишем в виде

$$\tilde t_\varepsilon-t=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1+\beta-T}{\varepsilon(1+\beta)T}\right)-\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon T}\right)$$

или используя разложение $Ei(x)$ при $x\to\infty$ получим

$$\tilde t_\varepsilon-t=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\frac{\beta}{\varepsilon(1+\beta)}}e^{-\frac{1+\beta-T}{\varepsilon(1+\beta)T}}\frac{\varepsilon(1+\beta)T}{1+\beta-T}\left(1+\frac{\varepsilon(1+\beta)T}{1+\beta-T}+O\left(\varepsilon^2\right)\right)-$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\varepsilon T\left(1+\varepsilon T+O(\varepsilon^2)\right)e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon T}}.$$

$$e^{\frac{-1+T}{\varepsilon T}}(\tilde t_\varepsilon-t)=\beta\frac{(1+\beta)T}{1+\beta-T}\left(1+\frac{\varepsilon(1+\beta)T}{1+\beta-T}+O(\varepsilon^2)\right)-\beta T\left(1+\varepsilon T+O(\varepsilon^2)\right)$$

$$e^{\frac{(T-1)}{\varepsilon T}}(\tilde{t}_\varepsilon - t)\frac{(1+\beta-T)}{\beta T} = \left(1+\frac{\varepsilon(1+\beta)T}{1+\beta-T}\right) - \left(1+\varepsilon T + O(\varepsilon^2)\right) =$$

$$e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}\left(\tilde{t}-t\right)\frac{1+\beta-T}{\beta T} = \beta + O(\varepsilon),$$

$$\frac{T-1}{\varepsilon T} + ln\left((\tilde{t}-t)\frac{1+\beta-T}{\beta T}\right) = ln(\beta + O(\varepsilon))$$

$$T\left(1+\varepsilon ln\left((\tilde{t}-t)\frac{1+\beta-T}{\beta T}\right) + ln(\beta + O(\varepsilon))\right) = 1.$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{1+\varepsilon ln\left((\tilde{t}-t)\frac{1+\beta-T}{\beta T} + ln(\beta+O(\varepsilon))\right)}.$$

Следовательно

$$T \sim 1 - \varepsilon ln(\tilde{t}-t) + O(\varepsilon ln(\tilde{t}-t))^2, \ \varepsilon \to 0.$$

Из этой формулы следует, что

$$T(1) \sim 1 - \varepsilon lnc\varepsilon + O\left(\left(\varepsilon ln\varepsilon\right)^2\right), \ \varepsilon \to 0.$$

Чтобы построить асимптотическое решение при $t>1$ введем новую переменную s.

Если сделать подстановку $t-1 = \frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\beta/(1+\beta)\varepsilon}s$, то

$$s = \left(t-1\right)\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\beta/(1+\beta)\varepsilon} = \left\| \begin{matrix} t = 1 - e^{-\sigma/\varepsilon} \\ t-1 = -e^{-\sigma/\varepsilon} \end{matrix} \right\| = -\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\gamma/\varepsilon}e^{-\sigma/\varepsilon} = -\frac{\beta}{\varepsilon}e^{(\gamma-\sigma)/\varepsilon} =$$

$$= -\frac{\beta}{\varepsilon}e^{r(\varepsilon)/\varepsilon}$$

Введем обозначение $T(t)=\psi(s)$. Тогда

$$ds = \frac{\beta}{\varepsilon}e^{\frac{\beta}{(1+\beta)\varepsilon}}dt, \ t=1 \Rightarrow s=0; \ \ t>1 \Rightarrow s \to \infty, \ \varepsilon \to 0; \ t<1 \Rightarrow s \to -\infty, \ \varepsilon \to 0.$$

и уравнение (4) в новой переменной s примет вид:

$$\frac{d\psi}{ds}=\left(1+\beta-\psi\right)e^{\frac{\psi-(1+\beta)}{\varepsilon\psi(1+\beta)}}, \tag{16}$$

и

$$T\left(1\right)=\omega:=1-\varepsilon ln\,\varepsilon+O\left(\varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{2},\varepsilon\to 0.$$

Асимптотическое решение уравнения (16) ищем в виде:

$$\psi(s)=1+\beta+\varepsilon\left(1+\beta\right)^{2}\psi_{1}(s)+\varepsilon^{2}\left(1+\beta\right)^{2}\psi_{2}(s)+\ldots, \tag{17}$$

Начальное условие для функций $\psi_{k}(s)(k=1,2,...)$ будут

$$\psi_{1}(0)=\frac{\omega-\beta}{\varepsilon},\psi_{k}(0)=0(k=2,3,...).,$$

Подставляя (17) в (16) получим:

$$\psi'_{1}(s)+\varepsilon\psi'_{2}(s)+\ldots\varepsilon^{n}\psi'_{n+1}(s)+\ldots=$$

$$=-\left(\psi_{1}(s)+\varepsilon\psi_{2}(s)+\ldots\right)exp\left(\frac{\psi_{1}(s)+\varepsilon\psi_{2}(s)+\ldots}{\left(1+\varepsilon\left(1+\beta\right)\psi_{1}(s)+\left(1+\beta\right)\varepsilon^{2}\psi_{2}(s)+\ldots\right)}\right),$$

Так как

$$exp\left(\frac{\psi_{1}(s)+\varepsilon\psi_{2}(s)+\ldots}{\left(1+\varepsilon\left(1+\beta\right)\psi_{1}(s)+\left(1+\beta\right)\varepsilon^{2}\psi_{2}(s)+\ldots\right)}\right)=e^{\psi_{1}(s)}+\varepsilon\left(\psi_{2}(s)-\psi_{1}(s)\left(1+\beta\right)\right)e^{\psi_{1}(s)}+$$

$$+e^{\psi_{1}(s)}\varepsilon^{2}\left(\psi_{3}(s)-2\left(1+\beta\right)\psi_{1}(s)\psi_{2}(s)+\left(1+\beta\right)^{2}\psi_{1}^{3}(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\psi_{2}^{2}(s)-\left(1+\beta\right)\psi_{2}(s)\psi_{1}^{2}(s)+\frac{1}{2}\left(1+\beta\right)^{2}\psi_{1}^{4}(s)\right)+\ldots,\ \varepsilon\to 0.$$

Поэтому, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в последнем дифференциальном уравнений, имеем

$$\psi'_{1}(s)=-\psi_{1}(s)e^{\psi_{1}(s)}\quad,\quad\psi_{1}(0)=\frac{\omega-\beta}{\varepsilon} \tag{18}$$

$$\psi'_{2}(s)=-\psi_{2}(s)e^{\psi_{1}(s)}-\psi_{1}(s)\left(\psi_{2}(s)-\psi_{1}(s)\left(1+\beta\right)\right)e^{\psi_{1}(s)} \tag{19}$$

$$\psi'_{3}(s)=-\psi_{3}(s)e^{\psi_{1}(s)}-\psi_{2}(s)\left(\psi_{2}(s)-\psi_{1}(s)\left(1+\beta\right)\right)e^{\psi_{1}(s)}-$$

$$-\psi_{1}(s)e^{\psi_{1}(s)}\left(\psi_{3}(s)-2\left(1+\beta\right)\psi_{1}(s)\psi_{2}(s)+\right.$$

$$+\left(1+\beta\right)^2\psi_1^3(s)+\frac{1}{2}\psi_2^2(s)-\left(1+\beta\right)\psi_2(s)\psi_1^2(s)+\frac{1}{2}\left(1+\beta\right)^2\psi_1^4(s)\Big)\quad \psi_2(0)=0$$

(20)

Решение уравнения (18) имеет вид

u=ψ_1

$$-\frac{e^{-u}du}{u}=ds$$

$$\int_{-u_0}^{-u}\frac{e^{\tau}}{\tau}d\tau=-s,\ \ u_0=\beta/\varepsilon \qquad (21)$$

Из (21) при u→+0, s→+∞ имеем

$$\int_{-u_0}^{-u}\frac{e^{-\tau}-1}{\tau}d\tau+ln\,u-ln\,u_0=-s$$

или

$$\int_{-u_0}^{-u}\frac{e^{-\tau}-1}{\tau}d\tau+O\left(u\right)+ln\,|-u|=-s+s_0$$

отсюда получаем:

$$u=-e^{-s}+0\left(e^{-s}\right),\ s\to\infty,(t>1).$$

Таким образом,

$$\psi_1(s)=-e^{-s}+0\left(e^{-s}\right),s\to\infty(t>1).$$

Теперь решаем задачу

$$M\psi_2(s):=\psi'_2(s)+\left(1-\psi_1(s)\right)e^{\psi_1(s)}\psi_2(s)=-\psi_1^2(s)e^{\psi_1(s)},\ \psi_1(u_0)=0 \qquad (22)$$

Однородное уравнение (22) имеет решение

$$V(s)=\psi_2^{одн}(s)=\psi_1'(s)=e^{-s}+0\left(e^{-s}\right),t>1.$$

Учитывая этого из (22) имеем:

$$\psi_2(s)=\int_{s_0}^{s}V(s)V^{-1}(\rho)u^2(\rho)e^{u(s)}ds=u^2(s),\ s\to+\infty,\ t>1$$

и т.д.

$$\psi_k(s)=u^k(s),\ s\to+\infty.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\psi(s)=1+\beta+\varepsilon(1+\beta)^2 e^{-s}+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^2+\ldots+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^n+\ldots,\quad s\to\infty,\ \varepsilon\to 0 \tag{23}$$

Таким образом, формально доказана следующая

Теорема 2. Решение задачи (16) можно представить в виде асимптотического разложения (23).

Строгое доказательство проводится применением принципа Банаха.

В целом для асимптотического приближения задачи (4)-(5) доказана следующая

Теорема 3. Асимптотическое решение задачи (4)-(5) представляется в виде

$$T(t)=1-\varepsilon ln(\tilde{t}-t)+O[\varepsilon ln(\tilde{t}-t)]^2,\varepsilon\to 0,\ t\le 1$$

$$T(s)\{s=(t-1)\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\beta/(1+\beta)\varepsilon}\}=1+\beta+\varepsilon(1+\beta)^2 e^{-s}+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^2$$
$$+\ldots+O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^n+\ldots,\quad s\to\infty,\ t>1,\ \varepsilon\to 0.$$

Вывод. Таким образом, решение этой задачи начинает скачок в особой точке

$$\tilde{t}=1-\varepsilon ln\varepsilon+(\varepsilon ln\varepsilon)^2,\ \varepsilon\to 0,$$

и при этом

$$T(\tilde{t})=1-\varepsilon ln\varepsilon+O\left(\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,\ \varepsilon\to 0.$$

Затем быстро перейдет в точку равновесия T=1+β.

Заключение по главе 3

В главе 3 рассмотрены две задачи: задача Рейса для явления скачка и задача химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком).

Методом униформизации и методом преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейса и определена точка, в которой начинается скачок. Начиная с момента

$$t = t_0 := t_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ y = y_0 \sim 0.78$$

происходит быстрый переход к устойчивой точке *y=1*.

Построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком). Предложен новый подход для построения асимптотики решения для химической реакции, где асимптотическое разложение решения имеет двойную особую точку. Также использована экспоненциально малая поправка в асимптотическом разложении, без которого нельзя построить правильную асимптотику решения. Этот метод имеет свою перспективу для изучения асимптотики для других автономных уравнений, описывающих химические реакции. Для решение этой задачи начинает скачок в особой точке

$$\tilde{t} = 1 - e^{\sigma_0/\varepsilon},\ \sigma_0 = \frac{\beta}{1+\beta} - \varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

и при этом

$$T\left(\tilde{t}\right) = \frac{\beta}{1+\beta} - \varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon\, ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Затем быстро перейдём к экспоненциальному равновесию T=1+β.

Глава 4. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА

§ 4.1. Сведение уравнения Бесселя к уравнению Риккати

Постановка задачи. В математике широко известно дифференциальное уравнение, названное в честь немецкого математика, астронома и геодезиста Фридриха Вильгельма Бесселя (1784-1846):

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)y(x)=0, \tag{1}$$

встречающийся во многих областях науки и техники, $\nu \in R$, v – порядок бесселовых функций.

Заметим, что при замене независимой переменной x на $(-x)$ структура уравнения Бесселя не меняется, поэтому полагаем, что $y(x)$ определена на положительной части действительной оси.

В этой главе рассмотрим два способа построения асимптотического разложения решения уравнения (1):

а) сведением уравнения Бесселя к уравнению Риккати

б) прямой метод получения асимптотики решения из уравнения Бесселя.

Сведением уравнения Бесселя к уравнению Риккати

Идею изложим для уравнения Бесселя нулевого порядка $(v=0)$:

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+y(x)=0. \tag{2}$$

В уравнении (2) сделаем преобразование вида:

$$y(x)=e^{\int S(x)dx},$$

где $S(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда, вычисляя производные первого и второго порядков получим:

$$y'(x)=S(x)e^{\int S(x)dx},$$

$$y''(x)=S'(x)e^{\int S(x)dx}+S^2(x)e^{\int S(x)dx}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение Бесселя нулевого порядка (2), получаем:

$$S'(x)e^{\int S(x)dx}+S^2(x)e^{\int S(x)dx}+\frac{1}{x}S(x)e^{\int S(x)dx}+e^{\int S(x)dx}=0$$

или

$$\left(S'(x)+S^2(x)+\frac{1}{x}S(x)+1\right)e^{\int S(x)dx}=0.$$

Относительно $S(x)$ получим дифференциальное уравнение Риккати:

$$S'(x)+S^2(x)+\frac{1}{x}S(x)+1=0. \qquad (3)$$

За нулевое приближение решения уравнения (3) берем корни уравнения:

$$S_0^2(x)+1=0,$$

тогда, получаем

$$S_0(x)=\pm i.$$

Асимптотическое решение дифференциального уравнения Риккати (3), когда $x\to\infty$, будем искать в виде

$$S(x)=\pm i+a_1x^{-1}+a_2x^{-2}+a_3x^{-3}+\ldots \qquad (4)$$

где коэффициенты a_k – пока неизвестные постоянные, $k\in\mathbf{N}$.

Вычисляя производную $S'(x)$ и $S^2(x)$ имеем:

$$S'(x)=-a_1x^{-2}-2a_2x^{-3}-3a_3x^{-4}+\ldots \qquad (5)$$

$$S^2(x)=-1\pm 2ia_1x^{-1}+(a_1^2\pm 2a_2\,i)\,x^{-2}+(\pm 2i\,a_3+2a_1a_3)x^{-3}+\ldots \qquad (6)$$

Подставляя соотношения (4), (5) и (6) в дифференциальное уравнение Риккати (3), получим:

$$-\frac{a_1}{x^2}-\frac{2a_2}{x^3}-\frac{3}{x^4}+\ldots-1\pm\frac{2ia_1}{x}+\frac{a_1^2\mp 2a_2 i}{x^2}\pm$$

$$+\frac{2a_3+2a_1a_2}{x^3}+\ldots\pm\frac{i}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^3}+\ldots+1=0.$$

Здесь приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, имеем:

$1+2a_1=0$;

$a_1^2\pm 2ia_2=0$;

$2a_2a_1-a_2\pm 2ia_3=0$;

$2a_3a_1-2a_3+a_2^2\pm 2ia_4=0$;

$2a_4a_1+2a_2a_3-3a_4\pm 2ia_5=0$;

...

Отсюда последовательно определяем значения неизвестных коэффициентов a_k:

$$a_1=-\frac{1}{2};\ a_2=\pm\frac{i}{8};\ a_3=\frac{1}{8};a_4=\mp\frac{i25}{128};\ a_5=\frac{13}{32};\ldots$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_k в асимптотический ряд (5), имеем:

$$S(x)=\pm i-\frac{1}{2x}\pm\frac{i}{8x^2}+\frac{1}{8x^3}\mp\frac{25i}{128x^4}+\frac{13}{32x^5}+O\left(\frac{1}{x^6}\right),\ \ x\to\infty .$$

Интегрируем $S(x)$:

$$\int S(x)dx=\pm ix-\frac{1}{2}ln|x|\mp\frac{i}{8x}-\frac{1}{16x^2}\pm\frac{25i}{384x^3}-\frac{13}{128x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right),\ \ x\to\infty$$

Подставляя это выражение в $y(x)=e^{\int S(x)dx}$, получаем:

$$y(x)=e^{\pm ix}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\mp\frac{i}{8x}-\frac{1}{16x^2}\pm\frac{25i}{384x^3}-\frac{13}{128x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)},\ x\to\infty .$$

Нами доказана

Теорема 1. Формальное асимптотическое разложение решения уравнения Риккати (3), при больших значениях x, можно представить рядом

$$S(x)=\pm i-\frac{1}{2x}\pm\frac{i}{8x^2}+\frac{1}{8x^3}\mp\frac{25i}{128x^4}+\frac{13}{32x^5}+O\left(\frac{1}{x^6}\right),\ \ x\to\infty .$$

Оценим остаточный член этого ряда.

Пусть

$$S(x)=\pm i-\frac{1}{2x}\pm\frac{i}{8x^2}+\frac{1}{8x^3}\mp\frac{25i}{128x^4}+\frac{13}{32x^5}+...+\frac{1}{x^{m+1}}R(x),\ \ x\to\infty, \tag{7}$$

где $R(x)$ – ограниченная функция.

Теорема 2. Ряд (7) представляет собой асимптотический ряд.

Доказательство. Чтобы было понятно, докажем теорему для случая m=1.

Пусть

$$S(x)=\pm i-\frac{1}{2x}+u(x), \tag{8}$$

где $u(x)$ – новая искомая функция.

Покажем, что

$$|u(x)|\le\frac{l}{x^2}.$$

Имеем

$$S^2(x)=-1\mp\frac{i}{x}\pm 2iu(x)-\frac{u(x)}{x}+\frac{1}{4x^2}+u^2(x),$$

также $S'(x)=\dfrac{1}{2x^2}+u'(x)$.

Подставляя выражения для $S(x), S'(x)$ и $S^2(x)$ в уравнение Риккати (3) для новой неизвестной функции $u(x)$ получим дифференциальное уравнение Риккати:

$$u'(x)+u^2(x)\pm 2iu(x)+\tfrac{1}{4}x^{-2}=0 \tag{9}$$

Как нам известно, линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$u_0'(x) \pm 2iu_0(x) + \frac{1}{4}x^{-2} = 0$$

с предельным условием $\lim\limits_{x\to\infty} u_0(x) = 0$ имеет единственное решение:

$$u_0(x) = 4^{-1}e^{\mp 2ix}\int_x^{\infty} e^{\pm 2is}s^{-2}ds$$.

Интегрируя этот интеграл по частям, получим:

$$u_0(x) = \mp\frac{i}{8}e^{\mp 2ix}\int_x^{\infty} s^{-2}d\left(e^{\pm 2is}\right) = \pm\frac{i}{8x^2} \mp \frac{i}{4}\int_x^{\infty} s^{-3}e^{\pm 2i(s-x)}ds .$$

Отсюда следует, что для функции $u_0(x)$ справедлива асимптотическая оценка:

$$|u_0(x)| \le \frac{a}{x^2},\ x \to \infty, \qquad (10)$$

где $0 < a$ – $const$.

Обозначим через Q множество функций удовлетворяющих неравенству (10).

Решение уравнения Риккати (9) с предельным условием $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$ можно записать в виде

$$u(x) - u(0) = \int_x^{\infty} e^{\mp 2is(x-s)}u^2(s)ds := T(u). \qquad (11)$$

Оператор T переводит множество Q в себя. Действительно имеем

$$\left|T(u)\right| \le a^2\int_x^{\infty} s^{-4}ds = \frac{a^2}{3x^3} \le \frac{a}{x^2}$$

А также оператор T является сжимающим в множестве Q. Действительно, для $u_1, u_2 \in Q$ имеем:

$$\left|T(u_1) - T(u_2)\right| \le \int_x^{\infty}\left|u_1(s) + u_2(s)\right|\left|u_1(s) - u_2(s)\right|ds \le$$

$$\le 2a\int_x^{\infty}\frac{1}{s^2}\left|u_1(s) - u_2(s)\right|ds \le \frac{2}{x}\left\|u_1 - u_2\right\| \le \frac{1}{2}\left\|u_1 - u_2\right\|$$

где $\|u\| = sup\,|\,u_1(x) - u_2(x)\,|$.

Следовательно, для решения уравнения Риккати (9) справедливо неравенство:

$$|\,u(x)\,| \le 2\alpha x^{-2}.$$

Теорема доказана

Эту теорему 4.2 можно доказать и методом мажорант.

2- способ доказательства теоремы 2. Пусть в (11):

$$u(x)=x^{-2}z(x),$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда (11) примет вид:

$$z(x) = x^2 u_0(x) + x^2 \int_x^{\infty} e^{\mp 2i(x-s)} s^{-4} z^2(s)\,ds.$$

Учитывая неравенство $|x^2 u_0(x)| \le a$, получаем мажорантное квадратное уравнение относительно $\rho(x)$:

$$\rho(x) = a + \frac{1}{3x}\rho^2(x),$$

где $|\,z(x)\,| \le \rho(x)$.

Дискриминант квадратного уравнения:

$$d = 1 - \frac{4a}{3x} > 0,\ x \to \infty.$$

Поэтому квадратное уравнение имеет две корни:

$$\rho_1(x) = \frac{3x}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{3x}}\right) \text{ и } \rho_2(x) = \frac{3x}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a}{3x}}\right).$$

Из них $\rho_1(x)$ неограниченно, $\rho_2(x)$ ограниченно, при $x \to \infty$, действительно:

$$\lim_{x\to\infty} \rho_1(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{3x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2} 2 = \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\rho_2(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4a}{3x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}\frac{\left(1-\sqrt{1-\frac{4a}{3x}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{4a}{3x}}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\frac{4a}{3x}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\frac{4a}{3x}}\right)}\frac{4a}{3x}=a.$$

Отсюда следует, что решение $\rho_2(x)$ можно разложить в ряд:

$$\rho(x)=a+\frac{\rho_1}{x}+\frac{\rho_2}{x^2}+\ldots+\frac{\rho_m}{x^m}+\ldots,\ x\to\infty,$$

где ρ_k – consts, k=1,2,...

Таким образом, асимптотическое решение уравнения Риккати (3) представимо сходящимся рядом (4), при $x>\frac{4}{3}a$.

Далее, в § 4.2 излагается простой метод получения асимптотики решения уравнения Бесселя, при больших значениях аргумента, прямо из него без сведения к уравнению.

§ 4.2. Прямой метод получения асимптотики решения из уравнения Бесселя

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0 \tag{1}$$

подстановкой

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}z(x)$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция, уравнение (1) сводится к виду

$$z''(x)+\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)z(x)=0, \tag{2}$$

где $\alpha=\frac{1}{4}-\nu^2$.

Мы будем искать решение уравнения (2) удовлетворяющее условию

$$z(x)\to \cos x,\ x\to\infty.$$

Это условие можно заменить условием: $z(x)\to \sin x,\ x\to\infty$.

Такое решение мы будем искать в виде

$$z(x)=\cos x+\frac{z_1(x)}{x}+\frac{z_2(x)}{x^2}+\frac{z_3(x)}{x^3}+\frac{z_4(x)}{x^4}+\ldots+$$

$$+\frac{z_{m-1}(x)}{x^{m-1}}+\frac{z_m(x)}{x^m}+\ldots, \tag{3}$$

где $z_k(x)\ (k=1,2,3,\ldots)$ непрерывные и ограниченные неизвестные функции на $\mathbf{R}^+=[0,\ \ \infty)$, которые определяется рекуррентным образом.

Дважды дифференцируя (3) имеем

$$\frac{d^2z(x)}{dx^2}=-\cos x+\frac{2}{x^3}z_1(x)-\frac{2}{x^2}\frac{dz_1(x)}{dx}+\frac{1}{x}\frac{dz_1(x)}{dx}+\frac{2\cdot 3}{x^4}z_2(x)-$$

$$-\frac{2\cdot 2}{x^3}\frac{dz_2(x)}{dx}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2z_1(x)}{dx^2}+\frac{3\cdot 4}{x^5}z_3(x)-\frac{2\cdot 3}{x^4}\frac{dz_3(x)}{dx}+\frac{1}{x^3}\frac{dz_3(x)}{dx}+$$

$$+\frac{4\cdot5}{x^6}z_4(x)-\frac{2\cdot4}{x^5}z_4(x)+\frac{1}{x^4}\frac{dz_4(x)}{dx^2}+\ldots+\frac{m(m+1)}{x^{m+1}}z_{m-1}(x)-$$

$$-\frac{2(m-1)}{x}z_m(x)+\frac{1}{x^{m-1}}\frac{d^2z_{m-1}(x)}{dx^2}-\frac{2(m-1)}{x^m}\frac{dz_{m-1}(x)}{dx}+\frac{m(m+1)}{x^{m+2}}z_m(x)+$$

$$+\frac{1}{x^m}\frac{d^2z_m(x)}{dx^2}-\frac{2m}{x^{m+1}}\frac{dz_m(x)}{dx}+\frac{m(m+1)}{x^{m+2}}z_m(x)\ldots \quad (4)$$

Теперь подставляя (3) и (4) в уравнение (2) получим

$$-\cos x+x^{-1}\frac{d^2z_1(x)}{dx^2}-2x^2\frac{dz_1(x)}{dx}+2x^{-3}z_1(x)-$$

$$+x^2\frac{d^2z_2(x)}{dx^2}-2\cdot2x^{-3}\frac{dz_2(x)}{dx}+2\cdot3x^{-4}z_2(x)+$$

$$+x^{-3}\frac{d^2z_3(x)}{dx^2}-2\cdot3x^{-4}\frac{dz_3(x)}{dx}+3\cdot4x^{-5}z_3(x)+$$

$$+x^{-4}\frac{d^2z_4}{dx^2}-2\cdot4x^{-5}\frac{dz_4(x)}{dx}+4\cdot5x^{-6}z_4(x)+$$

$$\ldots+x^{-m+1}\frac{d^2z_{m-1}(x)}{dx^2}-2(m-1)x^{-m}\frac{dz_{m-1}(x)}{dx}+(m-1)m\cdot x^{-m-1}z_m(x)+$$

$$+x^{-m}\frac{d^2z_2(x)}{dx^2}-2\cdot mx^{-m-1}\frac{dz_m(x)}{dx}+m(m+1)x^{-m-2}z_m(x)+\cdots-$$

$$+\cos x+x^{-1}z_1(x)+x^{-2}z_2(x)+x^{-3}z_3(x)++x^{-m+1}z_{m-1}(x)+x^{-m}z_m(x)$$
$$+\cdots+$$

$$\alpha x^{-2}\cos x-\ \alpha x^{-3}z_1(x)-\alpha x^{-4}z_2(x)-\alpha x^{-5}z_3(x)-\alpha x^{-6}z_4(x)-$$

$$\cdots-\alpha x^{-m}z_{m-2}(x)-\alpha x^{-m+1}z_{m-1}(x)-\alpha x^{-m+2}z_m(x)+\cdots=0 \quad (5)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^{-k} $(k=1,2\cdots)$ в выражении (5) ,получим уравнения для определения функций $z_k(x)$ $(k=1,2\cdots)$

$$Lz_1(x)=\frac{d^2z_1(x)}{dx^2}+z_1(x)=0 \quad (6)$$

$$Lz_2(x)=+2\frac{dz_1}{dx}+\alpha\cos x, \quad (7)$$

$$Lz_3(x)=-2z_1(x)+2\cdot2\frac{dz_2(x)}{dx}+\alpha z_1(x), \quad (8)$$

……………………………………………………………

$$Lz_{m-1}(x) = -(m-3)(m-2)z_{m-3} + 2\cdot(m-2)\frac{dz_{m-2}}{dx} + \alpha z_{m-3}(x), \tag{9}$$

$$Lz_m(x) = -(m-2)(m-1)z_{m-2} + 2(m-2)\frac{dz_{m-1}(x)}{dx} + \alpha z_{m-2}(x), \tag{10}$$

………………………………………………………………

Теперь последовательно решаем эти уравнения так, чтобы они допускали ограниченные периодические решения без секулярных членов типа $x^m \cos x, x^m \sin x \quad (m = 1,2,\cdots)$

Из (6) получим

$$z_1(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x \tag{11}$$

где a_1, b_1 – произвольные постоянные. Подставляя (11) в уравнение (7) имеем

$$Lz_2(x) = -2a_1 \sin x + b_1 \cos x + \alpha \cos x \tag{12}$$

Пусть f(x) является 2π - периодической функцией и разлагается в ряд Фурье.

$$f(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

где $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx.$

Лемма. Для того чтобы уравнение

$$Lv(x) := \frac{d^2v(x)}{dx^2} + v(x) = f(x)$$

допускало ограниченное 2π - периодическое решение на полуоси $[0,\infty)$ необходимо и достаточно, выполнение условий

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = 0, \\ b_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость условий (13). Пусть выполнены условия (13) тогда уравнение имеет 2π - периодическое решение представимое в виде

$$v(x)=\sum_{k\neq 1}\left(\frac{a_k}{1-k^2}\cos kx+\frac{b_k}{1-k^2}\sin kx\right)+f_0 .$$

Достаточность условий (13). Пусть уравнение $Lv(x)=f(x)$ имеет 2π - периодическое решение, но условие (13) не выполнено. Тогда решение уравнения $Lv(x)=f(x)$ представляется в виде

$$v(x)=\frac{a_1}{2}x\sin x-\frac{b_1}{2}x\cos x+\sum_{k\neq 1}\left(\frac{a_k}{1-k^2}\cos kx+\frac{b_k}{1-k^2}\sin kx\right)+f_0 .$$

Очевидно, что это решение не является 2π - периодической функцией, что противоречить условию. Лемма доказана.

В силу леммы 1, уравнение (12) допускает ограниченное решение на полуоси, при условии $a_1=0, b_1=-\alpha$. Тогда выражение (11) и (12) примут вид

$$z_1(x)=-\alpha\sin x, \tag{14}$$

$$Lz_2=0, \tag{15}$$

Из (15) получим

$$z_2(x)=a_2\cos x+b_2\sin x \tag{16}$$

где a_2, b_2 – произвольные постоянные. Теперь, подставляя (14) и (16) в уравнение (8), получим

$$Lz_3(x)=(\alpha-2)z_1(x)+2\cdot 2(-a_2\sin x+b_2\cos x)=-\alpha(\alpha-2)\sin x-2\cdot 2a_2\sin x+2\cdot 2b_2\cos x \tag{17}$$

Чтобы это уравнение допускало ограниченное решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_2=-\frac{\alpha(\alpha-2)}{2\cdot 2}, \quad b_2=0 .$$

Тогда выражение (16) и (17) имеют вид, соответственно

$$z_2(x)=-\frac{\alpha(\alpha-2)}{2\cdot 2}\cos x , \tag{18}$$

$$Lz_3(x) = 0. \tag{19}$$

Из (19) получим

$$z_3(x) = a_3 \cos x + b_3 \sin x.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$z_{2m}(x) = (-1)^{2m} \frac{\alpha(\alpha-1\cdot2)(\alpha-2\cdot3)\cdots[\alpha-(2m-1)2m]}{2^{2m-1}.(2m)!} \cos x \,,$$

$$z_{2m+1}(x) = (-1)^{2m+1} \frac{\alpha(\alpha-1\cdot2)\cdots[\alpha-2m(2m+1)]}{2^{2m}.(2m+1)!} \; sinx, \quad \forall m \in N$$

Таким образом, ряд (3) имеет вид

$$z(x) = cos\,x + \frac{\alpha}{x} sin\,x - \frac{\alpha(\alpha-2)}{2^2 x^2} cos\,x + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)}{2^2\cdot3!\,x^3} sin\,x +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)(\alpha-3\cdot4)}{2^3\cdot4!\,x^4} cos\,x - \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)(\alpha-3\cdot4)(\alpha-4\cdot5)}{2^4\cdot5!\,x^5} sin\,x + \ldots +$$
$$(-1)^{2m-1} \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)(\alpha-3\cdot4)\ldots[(\alpha-(2m-1)2m]}{2^{2m-1}\cdot(2m)!\cdot x^{2m}} cosx -$$
$$(-1)^{2m-1} \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)(\alpha-3\cdot4)\ldots[(\alpha-(2m+1)2m]}{2^{2m}.(2m+1)!\cdot x^{2m+1}} sinx + \cdots \;. \tag{20}$$

Введем обозначение

$$a_m = (-1)^{m-1} \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)(\alpha-3\cdot4)\cdots[\alpha-(m-1)m]}{2^{m-1}.(m)!}.$$

Ряд (20) расходиться при $x \to \infty$.

Действительно, применяя признак Даламбера, имеем

$$d = \lim_{m\to\infty} \frac{a_{2m+1}}{a_{2m}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{[\alpha-2m(2m+1)]}{2\cdot(2m+1)}\right| = \infty.$$

Однако этот ряд является асимптотическим рядом, при $x \to \infty$, т. е справедливо, следующая теорема.

Теорема. Ряд (20) является асимптотическим рядом, т.е. если рассмотреть усеченный ряд

$$z(x) = cos\,x + \alpha x^{-1} sin\,x - \alpha(\alpha-2)2^{-2}x^{-2} cos\,x + \ldots +$$
$$+(-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)\ldots[\alpha-2m(2m+1)]}{2^{2m}(2m+1)!\,x^{2m+1}} + \frac{1}{x^{2m+2}} R_{2m+2}(x)$$

Тогда

$$|R_{2m+2}(x)| \le l = \mathrm{const}, \qquad x \to \infty\,.$$

Первое доказательство этой теоремы, следует из того, что ряд (20) является знакопеременным. Остаточный член меньше первого выброшенного члена по абсолютной величине.

Второе доказательство. Для простоты, эту теорему докажем, при $m = 0$,

Положим

$$z(x) = \cos x + x^{-1} z_1(x) + x^{-2} R(x) \tag{21}$$

Тогда, подставляя (21) и дважды продифференцированное его выражение в (3), получим:

$$-\cos x + x^{-1} z_1''(x) - 2x^{-2} z_1'(x) + 2x^{-3} z_1(x) + x^{-2} R''(x) - 4x^{-3} R'(x) -$$
$$+3!\, x^{-4} R(x) + \cos x + x^{-1} z_1(x) + x^{-2} R(x) + dx^{-2} \cos x + \alpha x^{-3} z_1(x)$$
$$+ \alpha x^{-4} R(x) = 0$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^{-1} до второй степени, получим

$$z''_1(x) + z_1(x) = 0 \tag{22}$$

$$R''(x) + R(x) = 2z'_1(x) + \alpha \cos x - 2x^{-1} z'_1(x) + 4x^{-1} R'(x) - \alpha x^{-1} z_1(x)$$
$$+3!\, x^{-2} R(x) - \alpha x^{-2} R(x) \tag{23}$$

Из (22) имеем

$$z_1(\mathrm{x}) = a_1 \cos x - b_1 \sin x$$

где a_1 и b_1 —произвольные постоянные.

Тогда (23) имеет вид

$$R''(x) + R(x) = 2a_1 \sin x + 2b_1 \cos x - \alpha \cos x + \frac{2-\alpha}{x}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) +$$
$$+4x^{-1} R(x) + \frac{(\alpha - 3!)}{x^2} R(x)$$

Выберем $a_1 = 0$, и $b_1 = \frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$R''(x) + R(x) = -\frac{(2-\alpha)\alpha}{2x} \sin x + \frac{4}{x} R'(x) + \frac{(\alpha - 3!)}{x^2} R(x) \tag{24}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\mathrm{R}(x) = \frac{+\alpha(\alpha-2)}{4} cosx + R_1(x) \tag{25}$$

Вставляя (25) в (24) имеем

$$R''_1(x) + R_1(x) = \frac{4}{x} R_1(x) + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-3!)}{4x^2} cosx + \frac{(\alpha-3!)}{x^2} R_1(x)$$

или

$$R''_1(x) - \frac{4}{x} R_1(x) + R_1(x) = f(x), \tag{26}$$

где $f(x) = \frac{\alpha(\alpha-2)}{4x^2}(\alpha-3!)$

В (26) сделаем подстановку

$$R_1(x) = x^2 K(x) \tag{27}$$

Тогда, (26) имеет вид

$$2K(x) + 4xK'(x) + x^2K''(x) - \frac{4}{x}\left(2xK(x) + x^2K'(x)\right) + x^2K(x) = f(x)$$

или

$$x^2K''(x) + \left(1 - \frac{6}{x^2}\right) K(x) = \frac{f(x)}{x^2} \tag{28}$$

Решение уравнения (28), которое ограничено на бесконечности, эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$K(x) = g(x) + 6\int_{\infty}^{x} \frac{\sin(x-s)}{s^2} K(s)ds = T[K], \tag{29}$$

где

$$g(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-2\cdot3)}{s^4} \sin(x-s)\, ds.$$

Очевидно, что

$$|g(x)| \le lx^{-3} \quad , \tag{30}$$

где $l = const.$

Обозначим через S множество функций, удовлетворяющих условию (30), при больших x. Очевидно, что оператор T переводит множеств S в себя. Докажем, что оператор T является сжимающим в S. Действительно, для любых $K_1(x), K_2(x), \epsilon S$ из (29), имеем

$$|T[K_1] - T[K_2]| \le \frac{6}{x} |K_1(x) - K_2(x)|$$

Отсюда получаем, что при $x \geq 12$ оператор Т является сжимающим и его решение удовлетворяет условно

$$|K(x)| \leq lx^{-3}.$$

Следовательно, в силу (25), (27) и (21) получим, что $\left|R(x)\right| \leq l$, $x \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Здесь асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях независимой переменной получена непосредственно из самого дифференциального уравнения, и доказана асимптотический характер полученного решения.

§ 4.3. Асимптотика решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента на комплексной плоскости

В предыдущем параграфе мы построили асимптотику решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента в действительной области, а теперь, обобщая результаты, мы построим асимптотику решения уравнения Бесселя при большом значении аргумента в комплексной плоскости.

Рассмотрим теперь уравнение Бесселя в комплексной плоскости

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dU(z)}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)U(z)=0, \tag{1}$$

где $z \in D = \{z: |Arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0\}$, $\nu \in C$, ν – порядок Бесселовых функций, $U(z)$ – неизвестная функция комплексной переменной $z = x + iy, i = \sqrt{-1}$, $x, y \in R$.

С помощью преобразования

$$U(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}u(z),$$

где $u(z)$ – новая неизвестная функция, уравнению (1) можно привести к виду

$$u''(z)+\left(1+\frac{\alpha}{z^2}\right)u(z)=0, \tag{2}$$

где $\alpha=\frac{1}{4}-\nu^2$.

Мы построим асимптотику решения уравнения (2) в области $z \in D = \{z: |Arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0\}$.

Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$u(z)=X(z)\cos z+Y(z)\sin z, \tag{3}$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ новые независимые неизвестные функции.

Вычислим $u''(z)$:

$$u'(z) = X'(z)\cos z - X(z)\sin z + Y'(z)\sin z + Y(z)\cos z$$

$$u''(z) = X''(z)\cos z - 2X'(z)\sin z - X(z)\cos z +$$
$$+Y''(z)\sin z + 2Y'(z)\cos z - Y(z)\sin z.$$

Подставляя соотношение (3) в дифференциальное уравнение (2) имеем:

$$\left(X''(z) + 2Y'(z) + \frac{\alpha}{z^2}X(z) \right)\cos z + \left(Y''(z) - 2X'(z) + \frac{\alpha}{z^2}Y(z) \right)\sin z = 0$$

отсюда для $X(z)$ и $Y(z)$ получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2X(z)}{dz^2} + 2\frac{dY(z)}{dz} + \frac{\alpha}{z^2}X(z) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d^2Y(z)}{dz^2} - 2\frac{dX(z)}{dz} + \frac{\alpha}{z^2}Y(z) = 0. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы функции $X(z)$ и $Y(z)$ удовлетворяли условиям:

$$X(z) \to 1, z \to \infty; Y(z) \to 0, z \to \infty.$$

Неизвестных функции $X(z)$ и $Y(z)$ будем искать в виде:

$$X(z) = 1 + A_2z^{-2} + A_4z^{-4} + A_6z^{-6} + \ldots, \qquad z\to\infty; \tag{6}$$

$$Y(z) = B_1z^{-1} + B_3z^{-3} + B_5z^{-5} + B_7z^{-7} + \ldots, \; z\to\infty. \tag{7}$$

где A_k $(k = 2,4,\ldots), B_l$ (l=1,3,…) пока неизвестные коэффициенты.

Имеем

$$X'(z) = -2A_2z^{-3} - 4A_4z^{-5} - 6A_6z^{-7} - \ldots - 2k\,A_{2k}\,z^{-(2k+1)} - \ldots;$$

$$X''(z) = 6A_2z^{-4} + 20A_4z^{-6} + 42A_6z^{-8} + \ldots + 2k(2k+1)A_{2k}\,z^{-(2k+2)} + \ldots;$$

$$Y'(z) = -B_1z^{-2} - 3B_3z^{-4} - 5B_5z^{-6} - \ldots - (2k-1)B_{2k-1}z^{-2k} - \ldots;$$

$$Y''(z) = 2B_1z^{-3} + 12B_3z^{-5} + 30B_5z^{-7} + \ldots + 2k(2k-1)B_{2k-1}z^{-(2k+1)} + \ldots$$

Подставляя эти выражения и ряды (6) и (7) в уравнении (4) и (5) соответственно, имеем:

$$\{6A_2z^{-4} + 20A_4z^{-6} + 42A_6z^{-8} + \ldots\} + 2\{-B_1z^{-2} - 3B_3z^{-4} - 5B_5z^{-6} - \ldots\} +$$
$$+\alpha z^{-2}\{1 + A_2z^{-2} + A_4z^{-4} + A_6z^{-6} + \ldots\} = 0$$

и

$$\{2B_1z^{-3} + 12B_3z^{-5} + 30B_5z^{-7} + \ldots\} - 2\{-2A_2z^{-3} - 4A_4z^{-5} - 6A_6z^{-7} - \ldots\} +$$

$$+\alpha z^{-2}\{B_1 z^{-1}+B_3 z^{-3}+B_5 z^{-5}+B_7 z^{-7}+...\}=0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, для неизвестных коэффициентов A_k $(k=2,4,...), B_l$ (l=1,3,…) получаем следующие выражения:

$$-2B_1+\alpha=0,$$

$$(2+\alpha)B_1+4A_2=0,$$

$$(2\cdot 3+\alpha)A_2-2\cdot 3B_3=0,$$

$$(3\cdot 4+\alpha)B_3+2\cdot 4A_4=0,$$

$$(4\cdot 5+\alpha)A_4-2\cdot 5B_5=0,$$

$$...$$

$$(\alpha+(2m+1)(2m+2))B_{2m+1}+2(2m+2)A_{2m+2}=0,$$

$$(\alpha+(2m+2)(2m+3))A_{2m+2}-2(2m+3)B_{2m+3}=0,\ m\in N.$$

Отсюда получаем:

$$B_1=\frac{\alpha}{2}=-\frac{4v^2-1}{8};$$

$$A_2=-\frac{(2+\alpha)}{2\cdot 2}B_1=-\frac{\alpha(2+\alpha)}{2^3}=\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)}{2!8^2};$$

$$...$$

$$B_{2k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)...(4v^2-(2k+3)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}};$$

$$A_{2k+2}=(-1)^{k+1}\frac{(4v^2-1)(4v^2-3^2)...(4v^2-(2k+4)^2)}{(2k+1)!8^{2k+1}}.$$

Следовательно, выражения (6), (7) полностью совпадают с формулой (4.2.20) и является аналитическим продолжением этой формулы к D.

Теорема. Ряды (6), (7) являются асимптотическими

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\frac{1}{z^{2k}}+R_{1,2m+2}(z), \qquad (8)$$

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k-1}\frac{1}{z^{2k-1}}+R_{2,2m+1}(z),\tag{9}$$

где $|R_{1,2m+2}(z)|\le l|z|^{-2m-2}, |R_{2,2m+1}(z)|\le l|z|^{-2m-1}, l=const, z\in D, z\to\infty.$

Доказательство. Для простоты докажем эту теорему, для $m = 0$.

Пусть

$$X(z)=1+R_1(z),\tag{10}$$

$$Y(z)=B_1z^{-1}+R_2(z).\tag{11}$$

Подставляя выражения (10) и (11) в уравнении (4), (5) получим следующие уравнения

$$\frac{d^2R_1(z)}{dz^2}+2\frac{dR_2(z)}{dz}+\frac{\alpha}{z^2}R_1(z)=0,$$

$$\frac{d^2R_2(z)}{dz^2}-2\frac{dR_1(z)}{dz}+\frac{\alpha}{z^2}R_2(z)-\frac{\gamma}{z^3}=0,$$

где $\gamma=-2B_1-4B_1^2$.

Теперь мы вводим новую функцию

$$V(z)=R_1(z)+iR_2(z)$$

где $V(z)=O\left(|z|^{-2}\right)\to 0,\ z\to\infty$.

Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}-2i\frac{dV(z)}{dz}+\frac{\alpha}{z^2}V(z)=\frac{\gamma}{z^3}i.\tag{12}$$

В уравнении (12) сделаем следующее преобразование

$$V(z)=e^{iz}W(z)$$

где $W(z)$ – новая неизвестная функция.

Тогда, для $W(z)$ получим уравнение:

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2}+W(z)+\frac{\alpha}{z^2}W(z)=\frac{\gamma}{z^3}ie^{-iz}.$$

Решение этого уравнения, которое стремится к нулю при $z\to\infty$, будет эквивалентно решению следующего интегрального уравнения

$$W(z)=\int_{\infty}^{z} sin(z-s)\left(\frac{i\gamma}{s^3}e^{-is}-\frac{\alpha}{s^2}W(s)\right)ds\,.$$

В этом уравнении снова сделаем следующее преобразование

$$W(z)=e^{-iz}\,m(z).$$

Тогда

$$m(z)=g(z)+\alpha\int_{\infty}^{z}\frac{sin(z-s)}{s^2}e^{iz-is}\,m(s)ds:=T[m]\,, \tag{13}$$

где

$$g(z)=i\gamma\int_{\infty}^{z}\frac{sin(z-s)}{s^3}e^{iz-is}ds\,.$$

Здесь по пути интегрирования мы берем луч, идущий от точки $\infty e^{i\varphi}$ до точки $z=|z|\,e^{i\varphi}$ $\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}-\delta,\ \delta>0\right)$ фиксирована.

Тогда

$$g(z)=g(x+iy)=i\gamma\int_{x}^{\infty}e^{i(z-u-iy)}\left(u+iy\right)^{-3}sin\left(z-(u+iy)\right)du.$$

Оценивая этот интеграл, получаем:

$$|g(z)|\le\gamma\int_{x}^{\infty}\left(u^2+y^2\right)^{-3/2}du\le\gamma x^{-2}\le\gamma\left(|z|\,sin\delta\right)^{-2}.$$

Отсюда имеем: $|g(z)|\le\gamma\left(|z|\,sin\delta\right)^{-2},\ z\to\infty,\ z\in D.$

Обозначим через S множество функций, удовлетворяющих условий

$$|m(z)|\le 2\gamma\left(|z|\,sin\delta\right)^{-2},\ z\to\infty,\ z\in D \text{ и } \frac{|\alpha|}{|z|\,sin\delta}\le\lambda<\frac{1}{2}.$$

Очевидно, оператор T отображает множество S в себя. Докажем, что оператор T сжимающий в S. Имеем из уравнения (13):

$$|T[m_1]-T[m_2]|\le\|m_1-m_2\|\frac{|\alpha|}{|z|\,sin\delta}$$

Тогда оператор является сжимающим оператором. Теорема доказана.

Заключение по главе 4

В данной главе уравнение Бесселя при больших значениях аргумента исследовано двумя способами:

1) сведением уравнения Бесселя к уравнению Риккати;

2) прямым методом асимптотического разложения по малому параметру для действительного и комплексного аргумента.

Построена асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента действительной и комплексной областях без использования контурного представления его решения

Разработан новый метод для построения асимптотического разложения решения уравнения Бесселя при больших значениях действительного и комплексного аргумента, который является обобщением метода Пуанкаре-Линдстета в теории нелинейных колебаний. Здесь в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента, которое при больших его значениях является малым.

Глава 5. Асимптотика решения сингулярно возмущенных задач, когда невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку

В данной главе строятся полные асимптотические разложения решений краевых задач, когда соответствующие невозмущенные уравнения имеют нерегулярные особые точки.

§ 5.1. Первая краевая задача, случай отрицательного коэффициента перед производной первого порядка

Рассмотрим первую краевую задачу для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной:

$$\varepsilon y''(x) - x^2 p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y(0) = a,\ y(1) = b, \tag{2}$$

где $p(x), q(x) > 0$: $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, $a, b - const$.

Так как функция $q(x)$ положительна на отрезке $x \in [0,1]$, поэтому решение задачи (1)-(2) существует и единственна. Нас интересует равномерное асимптотическое разложение решения $y(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$.

В уравнении (1) при $\varepsilon=0$ получаем невозмущенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x^2 p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x), \tag{3}$$

которое имеет нерегулярную особую точку при $x=0$.

Если для дифференциального уравнения (3) вставить условие $y_0(1)=b$, то решение имеет вид:

$$y_0(x)=y_0(1)e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{s^2p(s)}ds}-\int_1^x \frac{f(\tau)}{\tau^2 p(\tau)}e^{\int_x^\tau \frac{q(s)}{s^2p(s)}ds}d\tau\,.$$

Асимптотика этого решения имеет вид:

$$y_0(x)=O\left(e^{1/x}\right),\ x\to 0\,,$$

заметим, что решение $y_0(x)$ экспоненциально растет, когда $x\to 0$.

Поэтому дифференциальное уравнение (3) интегрируем так чтобы решение $y_0(x)$ было бесконечно дифференцируемым на отрезке [0,1], т.е. $y_0\in C^\infty[0,1]$. В таком случае, решение $y_0(x)$ представляется в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x \frac{q(t)}{t^2p(t)}dt.$

Заметим, что это решение $y_0(x)$ не удовлетворяет краевым условиям $y(0)=a$ и $y(1)=b$.

Для решения этой проблемы решение первой краевой задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$y(x)=V(x)+\Pi(t)+Z(\tau) \tag{4}$$

здесь $V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x),\ \Pi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),\ \ t=x/\mu,\ Z(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$\tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon}.$

Тогда

$$y'(x)=V'(x)+\frac{1}{\mu}\Pi'(t)-\frac{1}{\varepsilon}Z'(\tau),\quad y''(x)=V''(x)+\frac{1}{\mu^2}\Pi''(t)+\frac{1}{\varepsilon^2}Z''(\tau), \tag{5}$$

Подставляя соотношения (4)-(5) в дифференциальное уравнение (1), для $V(x)$ получаем:

$$\varepsilon V''(x)-x^2p(x)V'(x)-q(x)V(x)=f(x), \tag{6}$$

Для пограничной функции $\Pi(t)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\Pi''(t)-\mu t^2 p(\mu t)\Pi'(t)-q(\mu t)\Pi(t)=0, \qquad (7)$$

будем требовать, чтобы пограничные функций $\pi_k(t)$ удовлетворяли следующим краевым условиям:

$$\pi_0(0)=a-v_0(0), \pi_{2k-1}(0)=0,\ \pi_{2k}(0)=-v_k(0), \lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t)=0, k\in N.$$

А для второй пограничной функции $Z(\tau)$ имеем дифференциальное уравнение

$$Z''(\tau)+(1-\varepsilon\tau)^2 p(1-\varepsilon\tau)Z'(\tau)-\varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z(\tau)=0, \qquad (8)$$

пограничные функции $z_k(t)$ должны удовлетворять следующим краевым условиям:

$$z_0(0)=b-v_0(1),\ z_k(0)=-v_k(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z_k(\tau)=0.$$

Учитывая $V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)$, из соотношения (6) получаем:

$$x^2 p(x)v'_0(x)+q(x)v_0(x)=-f(x),$$

$$x^2 p(x)v'_k(x)+q(x)v_k(x)=v''_{k-1}(x),\ k\in N.$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения первого порядка, так чтобы $v_k\in C^\infty[0,1]$, имеем

$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds, \qquad v_0\in C^\infty[0,1];$$

$$v_k(x)=\frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds, \qquad v_k\in C^\infty[0,1], k\in N;$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^2p(t)}dt.$

Перейдем теперь к задаче (7). Учитывая $\Pi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),$ где $t=x/\mu$. Из соотношения (7) имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k''(t)-\mu t^2\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{j=0}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j}(t)-\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\sum_{j=0}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t)=0,$$

где $p(x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jx^j,\ p_j=\frac{1}{j!}p^{(j)}(0),\ q(x)=\sum_{j=0}^{\infty}q_jx^j,\ q_j=\frac{1}{j!}q^{(j)}(0).$

Здесь, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, имеем

$$\pi_k''(t)-t^2\sum_{j=0}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j-1}(t)-\sum_{j=0}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t)=0,\ k=0,1,...,\ \pi_{-1}(t)\equiv 0$$

или

$$\pi_0''(t)-q(0)\pi_0(t)=0,\ t\in(0,\infty), \tag{9}$$

$$\pi_0(0)=a-v_0(0),\ \lim_{t\to\infty}\pi_0(t)=0; \tag{10}$$

$$\pi_k''(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}),\ t\in(0,\infty), \tag{11}$$

$$\pi_k(0)=0,\ при\ k=2n-1,\ \pi_k(0)=-v_n(0),\ при\ k=2n,\ \lim_{t\to\infty}\pi_k(t)=0,\ k,n\in N, \tag{12}$$

где $\pi_{-1}(t)\equiv 0$, правые части, т.е. функции

$$G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})=t^2\sum_{j=0}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j-1}(t)+\sum_{j=1}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t),\ k\in N,$$

Из классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что решения задач (9)-(10), (11)-(12) существуют и единственны:

$$\pi_0(t)=(a-v_0(0))e^{-\sqrt{q(0)}t},\ \pi_{2k}(t)=-v_k(0)e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t),$$

$$\pi_{2k-1}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t),\ k\in N.$$

где $H_k(t)$ – полиномы, степени k.

Нетрудно заметить, что пограничные функции экспоненциально убывают вне пограничного слоя, также бесконечно дифференцируемы, т.е. $\pi_k(t)\in C^{\infty}[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Из соотношения (8), получаем

$$z_0''(\tau)+p(1)z'_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \tag{13}$$

$$z_0(0)=b-v_0(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z_0(\tau)=0\ ; \tag{14}$$

$$z_k''(\tau)+p(1)z'_k(\tau)=\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,...,z_{k-1},z'_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty), \tag{15}$$

$$z_k(0) = -v_k(1), \quad \lim_{\tau\to\infty} z_k(\tau) = 0, k \in N. \tag{16}$$

где правые части, т.е. функции

$$\tilde{G}_k(\tau, z_0, z'_0, ..., z_{k-1}, z'_{k-1}) = -\sum_{j=1}^{k} \tau^j \tilde{p}_j z'_{k-j} + 2\tau \sum_{j=0}^{k-1} \tau^j \tilde{p}_j z'_{k-j-1} -$$

$$-\tau^2 \sum_{j=0}^{k-2} \tau^j \tilde{p}_j z'_{k-j-2} + \sum_{j=0}^{k} t^j \tilde{q}_j z_{k-j-1}$$

$$\tilde{p}_j = \frac{(-1)^j}{j} p^{(j)}(1), \quad \tilde{q}_j = \frac{(-1)^j}{j} q^{(j)}(1), j = 0,1,...$$

В частности, если k=1, то

$$\tilde{G}_1(\tau, z_0, z'_0) = \tau \tilde{p}_1 z'_0 + \tilde{q}_0 z_0,$$

а при k=2,

$$\tilde{G}_2(\tau, z_0, z'_0, z_1, z'_1) = -\tau \tilde{p}_1 z'_1 - \tau^2 \tilde{p}_2 z'_0 + 2\tau \tilde{p}_0 z'_1 + 2\tau^2 \tilde{p}_1 z'_0 - \tau^2 \tilde{p}_0 z'_0 + \tilde{q}_0 z_1 + t\tilde{q}_1 z_0.$$

Решения задач (13)-(14), (15)-(16) существуют и единственны:

$$z_0(\tau) = \left(b - v_0(1)\right) e^{-p(1)\tau},$$

$$z_k(\tau) = -v_k(1) e^{-p(1)\tau} + \tau e^{-p(1)\tau} \tilde{H}_k(\tau), k \in N,$$

где $\tilde{H}_k(\tau)$ – полиномы степени k.

Здесь тоже пограничные функции в окрестности точки x=1 экспоненциально убывают вне погранслоя, и бесконечно дифференцируемы, т.е. $z_k(\tau) \in C^\infty[0,\infty)$, $k \in \boldsymbol{N}_0$.

Оценим теперь остаточный член асимптотического решения. Пусть

$$y(x) = V_n(x) + \Pi_{2n}(t) + Z_n(\tau) + R_n(x),$$

где $V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x), \Pi_{2n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t), \quad Z_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_k(\tau),$

$R_n(x)$ – остаточная член (остаточная функция).

Тогда для остаточной функции получим краевую задачу:

$$\varepsilon R''_n(x) - x^2 p(x) R'_n(x) - q(x) R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}), \varepsilon \to 0, \ 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

$$R_n(0) = O\left(e^{-1/\varepsilon}\right), R_n(1) = O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right), \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Для решения задачи (17)-(18) применяя принцип максимума, имеем:

$$R_n(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Следовательно, справедлива

Теорема. Для решения первой краевой задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$ на отрезке $x\in[0,1]$ справедливо асимптотическое разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau)+O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right),$$

где $t=x/\mu,\ \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon}.$

Пример. Пусть $p(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 1$, $f(x)\equiv 1$, a=1, b=4. Тогда

$$\varepsilon y''(x)-x^2y'(x)-y(x)=1,\ 0\le x\le 1,$$

$$y_0(x)=-1$$

$v_0(x)$=–1, $v_k(x)\equiv 0$, $k\in\boldsymbol{N}$ и

$$y(x)=-1+2^{-t}+\sqrt{\varepsilon}e^{-t}t\left(c_2t^2+c_1t+c_0\right)+5e^{-\tau}+\varepsilon c_3\tau e^{-\tau}\left(\tau-1\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\varepsilon\to 0,$$

где $t=x/\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(1-x)/\varepsilon,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ c_j-const,\ j=0,1,2,3.$

§ 5.2. Первая краевая задача, случай положительного коэффициента перед производной первого порядка

Исследуем теперь случай, когда знак перед производной первого порядка, неотрицательна, т.е. рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y''(x)+x^2 p(x)y'(x)-q(x)y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=a,\ y(1)=b, \tag{2}$$

где $p(x), q(x)>0$: $x\in[0,1]$; $p,q,f\in C^{\infty}[0,1]$, $a,b-const$.

Решение задачи (1)-(2) существует, единственно. Нас интересует асимптотическое решение $y\,(x)$ на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t), \tag{3}$$

где $\mu=\sqrt{\varepsilon},\ x=\mu t$.

Подставляя выражение (3) в уравнение (1) получаем

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\varepsilon y_k''(x)+x^2p(x)y'_k(x)-q(x)y_k(x)\right)+\\ +\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\pi_k''(t)+\mu t^2p(\mu t)\pi'_k(t)-q(\mu t)\pi_k(t)\right)=f(x).\end{gathered} \tag{4}$$

Относительно $y_k(x)$ получаем дифференциальные уравнения:

$$x^2p(x)y'_0(x)-q(x)y_0(x)=f(x),\ y_0(1)=b,$$

$$x^2p(x)y'_k(x)-q(x)y_k(x)=-y''_{k-1}(x),\quad y_k(1)=0,\ k\in N.$$

Интегрируя, дифференциальные уравнения первого порядка с соответствующими условиями имеем:

$$y_0(x)=be^{Q(x)}-e^{Q(x)}\int_1^x\frac{f(s)}{s^2p(s)}e^{-Q(s)}ds,$$

$$y_k(x)=e^{Q(x)}\int_1^x\frac{y''_{k-1}(s)}{s^2p(s)}e^{-Q(s)}ds,\ k\in N,$$

где $Q(x)=\int_1^x \frac{q(t)}{t^2 p(t)}dt.$

Для функции $y_k(x)$ при $x\to 0$ имеем

$$y_k(x)=O(x^{\alpha}e^{-c/x}),\ k\in\mathbf{N},$$

где $0<c=q(0)/p(0)$, α – const.

Из соотношения (4) для погранфункций $\pi_k(t)$ получим:

$$\pi_0''(t)-q(0)\pi_0(t)=0,\ t\in(0,\infty), \tag{5}$$

$$\pi_0(0)=a,\ \lim_{t\to\infty}\pi_0(t)=0; \tag{6}$$

$$\pi_k''(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,\ldots,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}),\ t\in(0,\infty), \tag{7}$$

$$\pi_k(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}\pi_k(t)=0,\ \ k\in N, \tag{8}$$

где

$$G_k(t,\pi_0,\pi'_0,\ldots,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})=-t^2\sum_{j=0}^{k}t^j p_j\pi'_{k-j-1}(t)+\sum_{j=1}^{k}t^j q_j\pi_{k-j}(t),\ \ k\in N,\ \ \pi_{-1}(t)\equiv 0.$$

Решения задач (5)-(6), (7)-(8) существуют, единственны:

$$\pi_0(t)=ae^{-\sqrt{q(0)}t},\ \pi_k(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}P_{2k}(t).$$

где $P_{2k}(t)$ – полиномы степени $2k$, $P_{2k}(0)=0$, $k\in\mathbf{N}$.

Нами определены все члены асимптотики (3). Перейдем теперь к оценке остаточного члена.

Пусть

$$R_n(x)=y(x)-y_n(x),$$

где $y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k y_k(x)+\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t).$

Тогда, для $R_n(x)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon R_n''(x)+x^2p(x)R'_n(x)-q(x)R_n(x)=\Phi(t,x,\varepsilon),\ 0\le x\le 1, \tag{9}$$

$$R_n(0)=0,\quad R_n(1)=O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ \varepsilon\to 0, \tag{10}$$

где $\Phi(t,x,\varepsilon)=-\varepsilon^{n+1}u''_n(x)-\varepsilon^{n+1/2}\pi'_{2n}(t).$

Нетрудно заметить, что когда $\varepsilon \to 0$, $t \in [0, \varepsilon^{-1/2}]$, $x \in [0,1]$ справедлива оценка $\Phi(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1/2})$.

Применяя теорему о принципе максимума, имеем

$$R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}), \ \ \varepsilon \to 0, \ x \in [0,1].$$

Следовательно, справедлива

Теорема. Для решения краевой задачи (1)-(2) справедлива асимптотика (3), т.е.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k y_k(x) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t) + O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right), \ \varepsilon \to 0, \ x \in [0,1], \ t = x/\mu..$$

§ 5.3. Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью порядка три

Рассмотрим вторую краевую задачу

$$\varepsilon y''(x) - x^3 p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y'(0) = a,\ \ y'(1) = b, \tag{2}$$

где $p(x), q(x) > 0$: $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, $a, b - const.$

Решение задачи (1)-(2) существует и единственно. Нас интересует асимптотическое разложение решения $y(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Если в уравнении (1) формально считать, что $\varepsilon=0$, то получим соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение:

$$x^3 p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x),$$

которое имеет нерегулярную особую точку $x=0$.

Если для этого уравнения вставить краевое условие $y'(1)=b$, то решение полученной задачи при $x \to 0$ имеет асимптотику

$$y_0(x) = O\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right).$$

Поэтому, интегрируем так чтобы $y_0 \in C^\infty[0,1]$. В таком случае, решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде:

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)} ds,$$

где $Q(x) = \int_1^x \frac{q(t)}{t^3 p(t)} dt.$

Заметим, что это решение $y_0(x)$ не удовлетворяет краевым условиям $y'(0) = a,\ \ y'(1) = b$.

Поэтому решение задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$y(x) = V(x) + \Pi(t) + Z(\tau) \tag{3}$$

где $V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x), v_k\in C^{\infty}[0,1]$, $\Pi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)$ и $Z(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau)$ – классические погранфункций, $t=x/\mu$ $\tau=(1-x)/\varepsilon, \mu=\sqrt{\varepsilon}$.

Вычислим производные первого и второго порядков:

$$y'(x)=V'(x)+\frac{1}{\mu}\Pi'(t)-\frac{1}{\varepsilon}Z'(\tau), \tag{4}$$

$$y''(x)=V''(x)+\frac{1}{\mu^2}\Pi''(t)+\frac{1}{\varepsilon^2}Z''(\tau), \tag{5}$$

Подставляя соотношения (3), (4) и (5) в уравнение (1) получаем: для $V(x)$:

$$\varepsilon V''-x^3p(x)V'(x)-q(x)V(x)=f(x), \tag{6}$$

потребуем, чтобы $v_k(x)\in C^{\infty}[0,1]$.

Для $\Pi(t)$:

$$\Pi''(t)-\mu^2t^3p(\mu t)\Pi'(t)-q(\mu t)\Pi(t)=0, \tag{7}$$

потребуем, чтобы функции $\pi_k(t)$ удовлетворяли краевым условиям:
$\pi'_{2k}(0)=0, \pi'_1(0)=a-v'_0(0), \quad \pi'_{2k+3}(0)=-v'_{k+1}(0), \lim_{t\to\infty}\pi'_k(t)=0, k\in N_0.$

И для Z(τ):

$$Z''(\tau)+(1-\varepsilon\tau)^3p(1-\varepsilon\tau)Z'(\tau)-\varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z(\tau)=0, \tag{8}$$

вставим условия в виде

$$z'_0(0)=0, z'_1(0)=v'_0(1)-b, z'_{k+2}(0)=v'_{k+1}(1), \lim_{\tau\to\infty}z'_k(\tau)=0, k\in N_0.$$

Из уравнения (6) имеем:

$$x^3p(x)v'_0(x)+q(x)v_0(x)=-f(x),$$

$$x^3p(x)v'_k(x)+q(x)v_k(x)=v''_{k-1}(x),\ k\in N.$$

Интегрируя получаем:

$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds, \qquad v_0\in C^{\infty}[0,1];$$

$$v_k(x)=\frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds, \qquad v_k\in C^{\infty}[0,1], k\in N;$$

где $Q(x)=\int_1^x \frac{q(t)}{t^3 p(t)}dt.$

Перейдем теперь к задаче (7). Имеем:

$$\pi_0''(t)-q(0)\pi_0(t)=0,\ t\in(0,\infty), \tag{9}$$

$$\pi'_0(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}\pi'_0(t)=0; \tag{10}$$

$$\pi_1''(t)-q(0)\pi_1(t)=0,\ t\in(0,\infty), \tag{11}$$

$$\pi'_1(0)=a-v'_0(0),\ \lim_{t\to\infty}\pi'_1(t)=0; \tag{12}$$

$$\pi_k''(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}),\ t\in(0,\infty), \tag{13}$$

$$\pi'_{2k}(0)=0,\quad \pi'_{2k+1}(0)=-v'_k(0),\ \lim_{t\to\infty}\pi'_{k+1}(t)=0,\ k\in N. \tag{14}$$

где правые части $G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})$ линейно зависят от $\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}$ и полиномиально зависят от *t*.

Решения задач (9)-(10), (11)-(12), (13)-(14), соответственно, имеют вид:

$$\pi_0(t)\equiv 0,$$

$$\pi_1(t)=-\frac{a-v'_0(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t},$$

$$\pi_{2k}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t),$$

$$\pi_{2k+1}(t)=\frac{v'_k(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t),\ k\in N.$$

где $H_k(t)$ – полиномы степени k, $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Из соотношения (8), получаем

$$z_0''(\tau)+p(1)z'_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \tag{15}$$

$$z'_0(0)=0,\ \lim_{\tau\to\infty}z'_0(\tau)=0\ ; \tag{16}$$

$$z_1''(\tau)+p(1)z'_1(\tau)=q(1)z_0(\tau)+(3-p'(1))\tau z'_0(\tau),\ \tau\in(0,\infty), \tag{17}$$

$$z'_1(0)=v'_0(1)-b,\ \lim_{\tau\to\infty}z'_1(\tau)=0\ ; \tag{18}$$

$$z_k''(\tau)+p(1)z'_k(\tau)=\tilde G_k(\tau,z_0,z'_0,...,z_{k-1},z'_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty), \tag{19}$$

$$z'_{k+1}(0)=v'_k(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z'_{k+1}(\tau)=0,\ k\in N. \tag{20}$$

где правые части $\tilde{G}_k(\tau, z_0, z'_0, ..., z_{k-1}, z'_{k-1})$ линейно зависят от $z_0, z'_0, ..., z_{k-1}, z'_{k-1}$, и полиномиально зависят от τ.

Решения задач (15)-(16), (17)-(18) и (19)-(20) можно записать в виде:

$$z_0(\tau) \equiv 0,\ z_1(\tau) = -\frac{v'_0(1) - b}{p(1)} e^{-p(1)\tau},$$

$$z_{k+1}(\tau) = -\frac{v'_k(1)}{p(1)} e^{-p(1)\tau} + \tau e^{-p(1)\tau} \tilde{H}_k(\tau),\ k \in N,$$

где $\tilde{H}_k(\tau)$ – полиномы степени k, $z_k(\tau) \in C^\infty[0,\infty)$, $k \in \boldsymbol{N}_0$.

Оценим остаточный член, пусть

$$y(x) = V_n(x) + \Pi_{2n}(t) + Z_n(\tau) + R_n(x),$$

где

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x),\ \Pi_{2n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t),\quad Z_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_k(\tau),$$

$R_n(x)$ – остаточный член (остаточная функция).

Тогда относительно $R_n(x)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon R''_n(x) - x^3 p(x) R'_n(x) - q(x) R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \varepsilon \to 0,\ 0 \le x \le 1, \tag{21}$$

$$R'_n(0) = O\left(e^{-1/\varepsilon}\right),\ R'_n(1) = O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ \varepsilon \to 0. \tag{22}$$

Из принципа максимума следует, что для решения задачи (21)-(22) справедлива асимптотическая оценка:

$$R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \ \varepsilon \to 0,\ x \in [0,1].$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема. При достаточно малых ε задача (1)-(2) имеет единственное решение $y(x)$, причем ряд

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau),$$

является асимптотическим рядом для решения $y(x)$ при $\varepsilon \to 0$ на всем отрезке $0 \le x \le 1$, т.е.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_k(\tau) + O(\varepsilon^{n+1})$$

где $v_k \in C^\infty[0,1]$, $|\pi_0(t)| \le c e^{-\sqrt{q(0)}t},\ 0 < c - const$, $|z_0(\tau)| \le c_1 e^{-p(1)\tau},\ 0 < c_1 - const$, $t = x/\mu,\ \tau = (1-x)/\varepsilon,\ \mu = \sqrt{\varepsilon},\ \pi_k,\ z_k \in C^\infty[0,\infty)$, $k = 0,1,2,...$

§ 5.4. Асимптотика решения третьей краевой задачи в случае иррегулярной особенности произвольного порядка

Рассмотрим третью краевую задачу

$$\varepsilon y''(x) - x^n p(x) y'(x) - q(x) y(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y(0) - h_1 y'(0) = a, \quad y(1) + h_2 y'(1) = b, \tag{2}$$

где $p(x), q(x) > 0$, $x \in [0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, a, b – const, $0<h_1$, $0<h_2$, n – фиксированное натуральное число больше единицы.

Задача (1)-(2) имеет единственное решение, от нас требуется построить асимптотическое решение $y(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$, когда $\varepsilon \to 0$.

Нетрудно заметить, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$x^n p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x),$$

имеет нерегулярную особую точку $x=0$.

Следовательно, решение этого невозмущенного уравнения в точке $x=0$ имеет особенность. Поэтому, как и в предыдущих параграфах интегрируем так, чтобы $y_0 \in C^\infty[0,1]$. При этом, решение соответствующего невозмущенного уравнения примет вид:

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{q(x)} + e^{-Q(x)} \int_0^x \left(\frac{f(s)}{q(s)} \right)' e^{Q(s)} ds,$$

где $Q(x) = \int_1^x \frac{q(t)}{t^n p(t)} dt.$

Заметим, что это решение $y_0(x)$ не удовлетворяет краевым условиям (2).

Для устранения этой невязки вводим погранфункций, т.е. решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y(x) = V(x) + \Pi(t) + Z(\tau) \tag{3}$$

где $V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x),\ \Pi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t), \quad t = x/\mu,\ Z(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau),$

$\tau = (1-x)/\varepsilon,\ \mu = \sqrt{\varepsilon}.$

Вычисляя производные первого и второго порядков имеем:

$$y'(x) = V'(x) + \frac{1}{\mu}\Pi'(t) - \frac{1}{\varepsilon}Z'(\tau), \tag{4}$$

$$y''(x) = V''(x) + \frac{1}{\mu^2}\Pi''(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}Z''(\tau), \tag{5}$$

Подставляя соотношения (3), (4) и (5) в дифференциальное уравнение (1) получаем:

для $V(x)$:

$$\varepsilon V'' - x^n p(x)V'(x) - q(x)V(x) = f(x), \tag{6}$$

потребуем чтобы $v_k(x) \in C^\infty[0,1]$.

Для $\Pi_\mu(t)$:

$$\Pi''(t) - \mu^{n-1}t^n p(\mu t)\Pi'(t) - q(\mu t)\Pi(t) = 0, \tag{7}$$

потребуем, чтобы функции $\pi_k(t)$ удовлетворяли краевым условиям:

$$\pi'_0(0) = 0, \qquad \pi'_1(0) = \frac{1}{h_1}\big(v_0(0) + \pi_0(0) - a\big) - v'_0(0),$$

$$\pi'_{2k}(0) = \frac{1}{h_1}\pi'_{2k-1}(0), \qquad \pi'_{2k+1}(0) = \frac{1}{h_1}\big(v_k(0) + \pi_{2k}(0) - v'_k(0)\big),$$

$$\lim_{t\to\infty}\pi'_0(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty}\pi'_k(t) = -\frac{1}{h_2}\lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t),\ k \in N.$$

А для $Z(\tau)$:

$$Z''(\tau) + (1-\varepsilon\tau)^n p(1-\varepsilon\tau)Z'(\tau) - \varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z(\tau) = 0, \tag{8}$$

вставим краевые условия в виде

$$z'_0(0) = 0, \qquad z'_1(0) = \frac{1}{h_2}\big(v_0(1) + z_0(0) - b\big) + v'_0(1),$$

$$z'_{k+1}(0) = \frac{1}{h_2}\big(v_k(1) + z_k(0)\big) + v'_k(1),$$

$$\lim_{\tau\to\infty} z'_0(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau\to\infty} z'_k(\tau) = -\frac{1}{h_1}\lim_{\tau\to\infty} z_{k-1}(\tau),\ k \in N.$$

Из равенства (6), учитывая соотношение $V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)$, имеем:

$$x^n p(x)v'_0(x)+q(x)v_0(x)=-f(x),$$

$$x^n p(x)v'_k(x)+q(x)v_k(x)=v''_{k-1}(x),\ k\in N.$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения, получаем:

$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,\qquad v_0\in C^{\infty}[0,1];$$

$$v_k(x)=\frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)'e^{Q(s)}ds,\qquad v_k\in C^{\infty}[0,1],k\in N;$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^n p(t)}dt.$

Перейдем теперь к задаче (7). Учитывая, что $\Pi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)$, имеем:

$$\pi''_0(t)-q(0)\pi_0(t)=0,\ t\in(0,\infty), \tag{9}$$

$$\pi'_0(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}\pi'_0(t)=0; \tag{10}$$

$$\pi''_1(t)-q(0)\pi_1(t)=\pi_0(t)tq_1,\quad t\in(0,\infty), \tag{11}$$

$$\pi'_1(0)=\frac{1}{h_1}\big(v_0(0)+\pi_0(0)-a\big)-v'_0(0),\qquad \lim_{t\to\infty}\pi'_1(t)=-\frac{1}{h_2}\lim_{t\to\infty}\pi_0(t),\ k\in N. \tag{12}$$

$$\pi''_k(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}),\ t\in(0,\infty), \tag{13}$$

$$\pi'_{2k}(0)=\frac{1}{h_1}\pi'_{2k-1}(0),\qquad \pi'_{2k+1}(0)=\frac{1}{h_1}\big(v_k(0)+\pi_{2k}(0)-v'_k(0)\big),$$

$$\lim_{t\to\infty}\pi'_k(t)=-\frac{1}{h_2}\lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t),\ k\in N. \tag{14}$$

где

$$G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})=\begin{cases}\sum_{j=0}^{m-1}\pi_j(t)t^{m-j}q_{m-j},\ 1\le m<n-1\\ \sum_{j=0}^{m-1}\pi_j(t)t^{m-j}q_{m-j}+t^n\sum_{j=n-1}^{m}\pi'_{j-n+1}(t)t^{m-j}q_{m-j},\ n-1\le m\end{cases}$$

Решения задач (9)-(10), (11)-(12), (13)-(14) представимы в виде

$$\pi_0(t)\equiv 0,\ \pi_1(t)=-\frac{a-v'_0(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t},\ \pi_{2k}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t),$$

$$\pi_{2k+1}(t)=\frac{v'_k(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t),\ k\in N.$$

где $H_k(t)$ – полиномы, $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Учитывая соотношение $Z(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$ из равенства (8) получаем

$$z''_0(\tau)+p(1)z'_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty), \tag{15}$$

$$z'_0(0)=0,\ \lim_{\tau\to\infty}z'_0(\tau)=0\ ; \tag{16}$$

$$z''_1(\tau)+p(1)z'_1(\tau)=q(1)z_0(\tau)+(n-p'(1))\tau z'_0(\tau),\ \tau\in(0,\infty), \tag{17}$$

$$z'_1(0)=\frac{1}{h_2}\left(v_0(1)+z_0(0)-b\right)+v'_0(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z'_1(\tau)=-\frac{1}{h_1}\lim_{\tau\to\infty}z_0(\tau), \tag{18}$$

$$z''_k(\tau)+p(1)z'_k(\tau)=\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty), \tag{19}$$

$$z'_{k+1}(0)=\frac{1}{h_2}\left(v_k(1)+z_k(0)\right)+v'_k(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z'_k(\tau)=-\frac{1}{h_1}\lim_{\tau\to\infty}z_{k-1}(\tau),\ k\in N. \tag{20}$$

где правые части $\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1})$ линейно зависят от $z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1}$, и полиномиально зависят от τ.

Решения задач (15)-(16), (17)-(18) и (19)-(20) представимы в виде

$$z_0(\tau)\equiv 0,\ z_1(\tau)=-\frac{v'_0(1)-b}{p(1)}e^{-p(1)\tau},$$

$$z_{k+1}(\tau)=-\frac{v'_k(1)}{p(1)}e^{-p(1)\tau}+\tau e^{-p(1)\tau}\tilde{H}_k(\tau),\ k\in N,$$

где $\tilde{H}_k(\tau)$ – полиномы, $z_k(\tau)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Оценим остаточный член, пусть

$$y(x)=V_n(x)+\Pi_{2n}(t)+Z_n(\tau)+R_n(x),$$

где $V_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x),\ \Pi_{2n}(t)=\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t),\quad Z_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$R_n(x)$ – остаточная функция.

Тогда относительно $R_n(x)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon R_n''(x) - x^n p(x) R'_n(x) - q(x) R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \varepsilon \to 0,\ 0 \le x \le 1, \tag{21}$$

$$R_n(0) - h_1 R'_n(0) = O\left(e^{-1/\varepsilon}\right),\ \ R_n(1) + h_2 R'_n(1) = O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ \varepsilon \to 0. \tag{22}$$

Из принципа максимума следует, что для решения задачи (21)-(22) справедлива асимптотическая оценка:

$$R_n(x) = O(\varepsilon^{n+1/2}),\ \ \varepsilon \to 0,\ x \in [0,1].$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема. При достаточно малых ε задача (1)-(2) имеет единственное решение $y(x)$, причем ряд

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau),$$

является асимптотическим рядом для решения $y(x)$ при $\varepsilon \to 0$ на всем отрезке $0 \le x \le 1$, т.е.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k v_k(x) + \sum_{k=0}^{2n} \mu^k \pi_k(t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_k(\tau) + O(\varepsilon^{n+1})$$

где $v_k \in C^\infty[0,1]$, $|\pi_0(t)| \le c e^{-\sqrt{q(0)}t},\ 0 < c - const$, $|z_0(\tau)| \le c_1 e^{-p(1)\tau},\ 0 < c_1 - const$, $t = x/\mu,\ \tau = (1-x)/\varepsilon,\ \mu = \sqrt{\varepsilon},$ π_k, $z_k \in C^\infty[0,\infty)$, $k=0,1,2,\ldots$

§ 5.5. Задача Коши с негладким коэффициентом

Исследуем задачу

$$\varepsilon y'(x)+\sqrt{x}q(x)y(x)=f(x),\ 0<x\le T, \tag{1}$$

$$y(0)=y^0, \tag{2}$$

где $q(x)>0\, x\in[0,1],\ q,f\in C^{\infty}[0,\mathrm{T}]$, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, x\to 0$, $f_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$,

$f(0)\ne 0, T, y^0-const.$

Построим явное решение задачи (1)-(2). Для этого преобразуем уравнение (1):

$$y'(x)+\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}q(x)y(x)=\frac{f(x)}{\varepsilon},$$

Умножаем равенство на интегрирующий множитель $e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds}$:

$$y'(x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds}+\frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}q(x)y(x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds}=\frac{f(x)}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds},$$

Отсюда имеем:

$$\left(y(x)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds}\right)'=\frac{f(x)}{\varepsilon}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds},$$

Интегрируя последнее равенство, получаем явное решение:

$$y(x)=y^0\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \sqrt{s}q(s)ds}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(\tau)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\tau \sqrt{s}q(s)ds}\,d\tau. \tag{3}$$

Нас интересует асимптотическое решение $y(x)$, когда $\varepsilon\to 0$ на отрезке $x\in[0,T]$. В уравнении (1) при ε=0 получаем невозмущенное уравнение $\sqrt{x}q(x)y(x)=f(x)$, решение которого:

$$y_0(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}q(x)},$$

не удовлетворяет условию Коши, также не является гладкой функцией на отрезке $[0,T]$.

Обычно ряд

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(x) \tag{4}$$

называют внешним асимптотическим решением задачи (1)-(2).

Подставляя ряд (4) в дифференциальное уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем:

$$\sqrt{x}q(x)y_0(x)=f(x),$$
$$y'_{k-1}(x)+\sqrt{x}q(x)y_k(x)=0,\ k\in N.$$

Отсюда определяем $y_k(x)$:

$$y_0(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}q(x)},$$
$$y_k(x)=-\frac{y'_{k-1}(x)}{\sqrt{x}q(x)},\ k\in N.$$

Нетрудно заметить, что:

$$y_0(x)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ x\to 0;$$
$$y_1(x)=-\frac{y'_0(x)}{\sqrt{x}q(x)}=O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to 0;$$
$$y_2(x)=-\frac{y'_1(x)}{\sqrt{x}q(x)}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x^7}}\right),\ x\to 0;$$

$$\ldots$$

$$y_k(x)=-\frac{y'_{k-1}(x)}{\sqrt{x}q(x)}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x^{3k+1}}}\right),\ x\to 0,\ k\in N_0=\{0,1,2,\ldots\}.$$

Поэтому ряд (4) можно записать в виде

$$Y(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\tilde{y}_0(x)+\frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\tilde{y}_1(x)+\left(\frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\right)^2\tilde{y}_2(x)+\ldots+\left(\frac{\varepsilon}{x^{3/2}}\right)^k\tilde{y}_k(x)+\ldots\right),$$

где $\tilde{y}(x)\in C^{\infty}[0,T]$.

Следовательно, разложение (4) является асимптотическим только, когда $x\in\left(\sqrt[3]{\varepsilon^2},T\right]$ и теряет характер асимптотичности на отрезке $x\in\left[0,\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right]$. Здесь точка $x=\sqrt[3]{\varepsilon^2}$ является сингулярной точкой.

Поэтому рассматриваемая наша задача (1)-(2) является бисингулярной.

С помощью обобщенного метода погранфункций с модификацией построим асимптотику решения задачи Коши (1)-(2).

Решение задачи (1)-(2) ищеем в виде:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k\pi_k(t), \tag{5}$$

где $t=x/\mu^2$, $\mu^3=\varepsilon$.

Дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$\varepsilon y'(x)+\sqrt{x}q(x)y(x)=f(x)-h(x)+h(x),\quad 0<x\le T, \tag{6}$$

здесь $h(x)=h_0+\varepsilon\frac{h_1}{\sqrt{x}}+\ldots+\varepsilon^{2n}h_{2n}+\varepsilon^{2n+1}\frac{h_{2n+1}}{\sqrt{x}}+\ldots,$

и h_k –пока неизвестные постоянные.

Подставляя ряд (5) в дифференциальное уравнение (6) получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(v'_{k-1}(x)+\sqrt{x}q(x)v_k(x))+\sqrt{x}q(x)v_0(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\pi'_{k-1}(t)+\sqrt{t}q(\mu^2 t)\pi_{k-1}(t))=$$

$$=f(x)-h(x)+h(x).$$

Разделяем на два уравнения:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(v'_{k-1}(x)+\sqrt{x}q(x)v_k(x))+\sqrt{x}q(x)v_0(x)=$$

$$=f(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}h_{2k}-\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k+1}h_{2k+1} \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(\pi'_{k-1}(t)+\sqrt{t}q(t\mu^2)\pi_{k-1}(t))=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{6k}h_{2k}+\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{6k+2}h_{2k+1}\,. \tag{8}$$

Из первого уравнения, т.е. из (7) имеем:

$$v_0(x)=\frac{1}{q(x)\sqrt{x}}\left(f_0(x)-h_0\right),$$

$$v_1(x)=-\frac{1}{q(x)\sqrt{x}}\left(v'_0(x)+\frac{h_1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$v_{2n}(x)=-\frac{1}{q(x)\sqrt{x}}\left(v'_{2n-1}(x)+h_{2n}\right),$$

$$v_{2n+1}(x)=-\frac{1}{q(x)\sqrt{x}}\left(v'_{2n}(x)+\frac{h_{2n+1}}{\sqrt{x}}\right),\ n\in N.$$

И здесь мы определяем неизвестные коэффициенты h_k. Их выбираем так, чтобы

$$v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\ \tilde{v}_{2k}\in C^{\infty}\left[0,T\right],\ v_{2k+1}\in C^{\infty}\left[0,T\right],\ k\in N_0.$$

Пусть

$$h_0=f_0, h_{2n}=-v'_{2n-1}(0),\ h_{2n-1}=-\lim_{x\to 0}\sqrt{x}v'_{2n-2}(x),\ n\in N,$$

тогда, получаем:

$$v_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{f}_{k+1}x^{k+1/2},\ v_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{3}{2}\right)\tilde{f}_{k+2}x^k,\ x\to 0,$$

$$v_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_{2n,k}x^{k+1/2},\ v_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_{2n+1,k}x^k,\ x\to 0,$$

Нетрудно заметить, что $v_{2n}(0)=0$, $n\in N_0$.

Нами определены все $v_k(x)$ и h_k.

Из дифференциального уравнения (8), учитывая условие Коши (2) и $v_{2n}(0)=0$, $n\in N_0$, имеем:

$$l\pi_{6k-1} \equiv \pi'_{6k-1}(t)+\sqrt{t}q(t\mu^2)\pi_{6k-1}(t)=h_{2k},\ \pi_{6k-1}(0)=0,\ k\in N_0; \tag{9}$$

$$l\pi_{6k+1}=\frac{h_{2k+1}}{\sqrt{t}},\ \pi_{6k+1}(0)=0,\ k\in N_0; \tag{10}$$

$$\begin{gathered} l\pi_{6k+j}=0,\ j=0,2,3,4,\ \pi_0(0)=y^0,\ \pi_{6m}(0)=0,\ m\in N, \\ \pi_{6k+s}(0)=0,\ s=2,4,\ \pi_{6k+3}(0)=-v_{2k+1}(0),\ k\in N_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Решения задач (9)-(11) можно записать в виде:

$$\pi_{6k-1}(t)=h_{2k}e^{-\tilde{q}(t)}\int_0^t e^{\tilde{q}(s)}ds,\quad \pi_0(t)=y^0e^{-\tilde{q}(t)},$$

$$\pi_{6m}(t)\equiv 0, m\in N,\ \pi_{6k+1}(t)=h_{2k+1}e^{-\tilde{q}(t)}\int_0^t e^{\tilde{q}(s)}s^{-1/2}ds,$$

$$\pi_{6k+2}(t)\equiv 0,\ \pi_{6k+3}(t)=-v_{2k+1}(0)e^{-\tilde{q}(t)},\ \pi_{6k+4}(t)\equiv 0,\ k\in N_0.$$

где $\tilde{q}(t)=\int\limits_0^t \sqrt{s}q(\mu^2 s)ds$

Для погранфункций $\pi_{6k-1}(t)$, $\pi_{6k+1}(t)$ справедливы асимптотики:

$$\pi_{6k-1}(t)=\frac{h_{2k}}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{c_1}{t^{3/2}}+\ldots+\frac{c_n}{t^{3n/2}}+\ldots\right),\ t\to\infty,$$

$$\pi_{6k+1}(t)=\frac{h_{2k+1}}{t}\left(1+\frac{\tilde{c}_1}{t^{3/2}}+\ldots+\frac{\tilde{c}_n}{t^{3n/2}}+\ldots\right),\ t\to\infty.$$

Таким образом, определены все члены ряда (5). Осталось оценить остаточный член этого ряда.

Пусть

$$R_{2m+1}(x)=y(x)-y_{2m+1}(x),$$

где

$$y_{2m+1}(x)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{6m+3}\mu^k\pi_k(t),\ 0<m.$$

Тогда, для остаточного члена $R_{2m+1}(x)$ получим задачу Коши:

$$\varepsilon R'_{2m+1}(x)+\sqrt{x}q(x)R_{2m+1}(x)=-\varepsilon^{2m+2}v'_{2m+1}(x),\ 0<x\le T, \tag{12}$$

$$R_{2m+1}(0)=0 \tag{13}$$

Решение задачи (12)-(13) имеет вид

$$R_{2m+1}(x)=-\varepsilon^{2m+1}e^{-\frac{1}{\varepsilon}Q(x)}\int_0^x e^{\frac{1}{\varepsilon}Q(s)}v'_{2m+1}(s)ds,$$

где $Q(x)=\int\limits_0^x \sqrt{s}q(s)ds$,

и для этого решения справедлива асимптотика

$$R_{2m+1}(x)=O\left(\varepsilon^{2m+1}\right),\ \varepsilon\to 0,\ 0\le x\le T.$$

Мы доказали теорему:

Теорема. Асимптотическое решение задачи Коши (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le$ T можно записать в виде (5), т.е.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{2m}\mu^k\pi_k(t)+O\left(\varepsilon^{2m+1}\right).$$

§ 5.6. Точка поворота дробного порядка

Исследуем двухточечную краевую задачу с дробной точкой поворота

$$\varepsilon y''(x) - \sqrt{x}y(x) = f(x),\ x \in [0,1], \tag{1}$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0\,, \tag{2}$$

где $f \in C^{\infty}[0,1],\ f(0) \neq 0.$

Как нам известно, неоднородные граничные условия $y(0)=a$, $y(1)=b$ с помощью линейного преобразования $y(x)=a+(b-a)x+z(x)$ всегда можно привести к однородным граничным условиям $z(0)=0$, $z(1)=0$. Поэтому, не нарушая общности, здесь рассматриваем однородные граничные условия.

Предельное уравнения (ε=0) имеет решение:

$$-\sqrt{x}y_0(x) = f(x)$$

$$y_0(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$$

которое не удовлетворяет краевым условиям $y(0)=0$, $y(1)=0$ и не является гладкой функцией на отрезке [0,1]. По определению М.В. Федорюка точку x=0 называют дробной точкой поворота. Поэтому, задача (1)-(2) является бисингулярной.

Рассмотрим внешнее решение задачи (1)-(2):

$$Y(x)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots+\varepsilon^n y_n(x)+\ldots \tag{3}$$

Подставляя ряд (3) в дифференциальное уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$-\sqrt{x}y_0(x) = f(x),$$

$$y''_{k-1}(x) - \sqrt{x}y_k(x) = 0,\ k \in N.$$

Отсюда находим $y_k(x)$:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{\sqrt{x}},$$

$$y_k(x)=\frac{y''_{k-1}(x)}{\sqrt{x}},\ k\in N.$$

Функции $y_k(x)$ имеют сингулярности вида:

$$y_k(x)=O(x^{-(5k+1)/2}),\ x\to 0,\ k\in N_0,$$

с ростом номера k растет и сингулярность в точке x=0.

Поэтому разложение (3) не является асимптотическим на отрезке $0\le x\le \sqrt[5]{\varepsilon^2}$, а только на промежутке $\sqrt[5]{\varepsilon^2}<x\le 1$ является асимптотическим.

Решение ищем в виде:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_k(\tau), \tag{4}$$

где $t=x/\mu^2$, $\mu^5=\varepsilon$, $\lambda^2=\lambda$, $\tau=(1-x)/\lambda$.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon y''(x)-\sqrt{x}y(x)=f(x)-h(x)+h(x),\ x\in(0,1),$$

здесь

$$h(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\varepsilon^{2k}h_{2k}(x)+\varepsilon^{2k+1}\left(\frac{h_{2k+1,1}}{\sqrt{x}}+\frac{h_{2k+1,3}}{\sqrt{x^3}}\right)\right),$$

h_k, $h_{k,j}$ – пока неизвестные постоянные.

Подставляя ряд (4) в дифференциальное уравнение (1), имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(v''_{k-1}(x)-\sqrt{x}v_k(x)\right)-\sqrt{x}v_0(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi''_{k-1}(t)-\sqrt{t}\pi_k(t)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w''_k(\tau)-\sqrt{1-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_k(\tau)=f(x)-h(x)+h(t\mu^2).$$

Расщепляя, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(v''_{k-1}(x)-\sqrt{x}v_k(x)\right)-\sqrt{x}v_0(x)=f(x)-h(x); \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi''_{k-1}(t)-\sqrt{t}\pi_k(t)\right)=h(t\mu^2) \tag{6}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w''_k(\tau)-\sqrt{1-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k w_k(\tau)=0. \qquad (7)$$

Из соотношения (5) имеем:

$$v_0(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}\big(f(x)-h_0\big),\;\; v_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(v''_0(x)+\frac{h_{1,1}}{\sqrt{x}}+\frac{h_{1,3}}{\sqrt{x^3}}\right),$$

$$v_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\big(v''_{2n-1}(x)+h_{2n}\big),$$

$$v_{2n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(v''_{2n}(x)+\frac{h_{2n+1,1}}{\sqrt{x}}+\frac{h_{2n+1,3}}{\sqrt{x^3}}\right), n\in N$$

И здесь определяем неизвестные h_k, h_{kj}. Их выберем так, чтобы

$$v_{2k}(x)=\sqrt{x}\tilde{v}_{2k}(x),\;\; \tilde{v}_{2k}\in C^{\infty}[0,1],\, v_{2k+1}\in C^{\infty}[0,1],\, k\in N_0.$$

Допустим, что

$$h_0=f_0,\, h_{2n}=-v''_{2n-1}(0),\, h_{2n-1,3}=-\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3}v''_{2n-2}(x),$$

$$h_{2n-1,1}=-\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\left(v''_{2n-2}(x)+\frac{h_{2n-1,3}}{\sqrt{x^3}}\right),\, n\in N,$$

тогда

$$v_0(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}f_{k+1}x^{k+1/2},\;\; v_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+3/2)(k+5/2)f_{k+3}x^k,...,$$

$$v_{2n}(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}v_{2n,k}x^{k+1/2},\;\; v_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}v_{2n+1,k}x^k,...$$

Нетрудно заметим, что $v_{2n}(0)=0$, $n\in N_0$.

Мы нашли все $v_k(x)$ и неизвестные h_k, h_{kj}.

Из соотношения (6) имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\pi''_{k-1}(t)-\sqrt{t}\pi_k(t)\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{10k}\left(h_{2k}+\frac{1}{\sqrt{t}}\mu^4 h_{2k+1,1}+\frac{1}{\sqrt{t^3}}\mu^2 h_{2k+1,3}\right).$$

Учитывая краевое условие $y(0)=0$, и $v_{2n}(0)=0$, $n\in N_0$, получаем краевые задачи:

$$L\pi_{10k-1}\equiv\pi''_{10k-1}(t)-\sqrt{t}\pi_{10k-1}(t)=h_{2k},t\in(0,\infty),\pi_{10k-1}(0)=0,k\in N_0; \quad (8)$$

$$L\pi_{10k+2j}=0,\ t\in(0,\infty),\pi_{10k+2j}(0)=0,\ j=0,1,2,3,4,\quad k\in N_0; \tag{9}$$

$$L\pi_{10k+1}=\frac{h_{2k+1,3}}{\sqrt{t^3}},\quad t\in(0,\infty),\quad \pi_{10k+1}(0)=0,\quad k\in N_0; \tag{10}$$

$$L\pi_{10k+3}=\frac{h_{2k+1,1}}{\sqrt{t}},\quad t\in(0,\infty),\quad \pi_{10k+3}(0)=0,\quad k\in N_0; \tag{11}$$

$$L\pi_{10k+5}=0,\quad t\in(0,\infty),\quad \pi_{10k+5}(0)=-v_{2k+1}(0),\quad k\in N_0; \tag{12}$$

$$L\pi_{10k+7}=0,\quad t\in(0,\infty),\quad \pi_{10k+7}(0)=0,\quad k\in N_0; \tag{13}$$

Потребуем, чтобы погранфункций удовлетворяли условию:

$$\lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t)=0,\ k\in N_0. \tag{14}$$

Справедлива

Лемма. Задача

$$z''(t)-\sqrt{t}z(t)=\frac{c}{\sqrt{t^k}},\ t\in(0,\infty),\ k=0,1,3,\ z(0)=z^0,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0$$

имеет единственное решение (здесь c, z^0 – const).

Доказательство. Однородное уравнение

$$\tilde{z}''(t)-\sqrt{t}\tilde{z}(t)=0$$

имеет два независимых решения:

$$z_1(t)=\sqrt{t}I_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\right),\quad z_2(t)=\sqrt{t}K_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\right),$$

где $I_{2/5}(s)$, $K_{2/5}(s)$ – модифицированные функции Бесселя.

Перечислим необходимые свойства:

$$z_1(t)=O\left(t^{-\frac{1}{8}}e^{\frac{4}{5}t^{5/4}}\right),\ z_2(t)=O\left(t^{-\frac{1}{8}}e^{-\frac{4}{5}t^{5/4}}\right),\ t\to\infty,$$

$$z_1(0)=0,\ z_2(0)\neq 0,\ W(z_1(t),z_2(t))=1/c_1,\ 0\neq c_1 - \text{const}.$$

Учитывая экспоненциальное убывание функции $z_2(t)$ при $t\to\infty$, можем ее использовать для построения решения неоднородного уравнения с соответствующим краевым условием. Поэтому, имеем:

$$z(t)=\frac{z^0 z_2(t)}{z_2(0)}+cc_1\left(z_2(t)\int_0^t s^{-k/2}z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^\infty s^{-k/2}z_2(s)ds\right).$$

Из асимптотического поведения функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ имеем:

$$z(t)=O(t^{-(k+1)/2}),\ \text{при}\ t\to\infty,\ k=0,1,3;$$

$$z(t)=O(t^{2-k/2}),\ t\to 0,\ k=0,1,3.$$

Лемма доказана.

В силу леммы, задачи (9), (13) с условием (14) имеют тривиальные решения. А решения задач (8), (10)-(12) удовлетворяющие условию (14) представимы в виде:

$$\pi_{10k-1}(t)=h_{2k}\,c_2\left(z_2(t)\int_0^t z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^\infty z_2(s)ds\right),$$

$$\pi_{10k+1}(t)=h_{2k+1,3}\,c_2\left(z_2(t)\int_0^t s^{-3/2}z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^\infty s^{-3/2}z_2(s)ds\right),$$

$$\pi_{10k+3}(t)=h_{2k+1,1}\,c_2\left(z_2(t)\int_0^t s^{-1/2}z_1(s)ds+z_1(t)\int_t^\infty s^{-1/2}z_2(s)ds\right),$$

$$\pi_{10k+5}(t)=-v_{2k+1}(0)\frac{z_2(t)}{z_2(0)},\ k\in N,$$

и справедливы асимптотики

$$\pi_{10k-1}(t)=O(1/t^{1/2}),\qquad \pi_{10k+1}(t)=O(1/t^2),\qquad \pi_{10k+3}(t)=O(1/t),\ t\to\infty.$$

$$\pi_{10k-1}(t)=O(t^2),\qquad \pi_{10k+1}(t)=O(t^{1/2}),\qquad \pi_{10k+3}(t)=O(t^{1/3}),\ t\to 0.$$

А также

$$\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)=\left\|t=x/\mu^2\right\|=\sum_{k=-1}^{\infty}\mu^k\pi_k\left(\frac{x}{\mu^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{\pi}_k\left(x,\varepsilon\right) \tag{15}$$

Определим теперь члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k w_k(\tau)$. Из равенства (7) имеем

$$w''_0(\tau)-w_0(\tau)=0,\ w''_k(\tau)-w_k(\tau)=g_k(\tau,w_0,...,w_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty) \tag{16}$$

где правые части $g_k(\tau,w_0,...,w_{k-1})$ линейно зависят от $w_0,...,w_{k-1}$ и полиномиальною зависят от τ.

Учитывая граничное условие $y(1)=0$ и (15) имеем

$$w_{2k}(0)=-v_k(1)-\tilde{\pi}_k(1),\ w_{2k+1}(0)=0,\ k\in N_0. \tag{17}$$

Как нам известно, задачи (16)-(17) имеют единственные решения и экспоненциально убывают, при $\tau\to\infty$, т.е.

$$w_k(\tau)=O(e^{-\tau}),\ \tau\to\infty.$$

Нами определены все члены формального асимптотического решения (4). Осталось оценить остаточный член этого ряда.

Оценим остаточный член

$$R_{2m+1}(x)=y(x)-y_{2m+1}(x),$$

где

$$y_{2m+1}(x)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=-1}^{10m+5}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{4m+2}\lambda^k w_k(\tau),\ 0<m.$$

Для $R_{2m+1}(x)$ получим задачу:

$$\varepsilon R''_{2m+1}(x)-\sqrt{x}R_{2m+1}(x)=O\left(\varepsilon^{2m+2}\right),\ \varepsilon\to 0,\ 0<x<1, \tag{18}$$

$$R_{2m+1}(0)=O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ R_{2m+1}(1)=O\left(\varepsilon^{2m+2}\right), \varepsilon\to 0, \tag{19}$$

Пусть

$$R_{2m+1}(x)=(2-x^2)r_{2m+1}(x),$$

тогда задача (18)-(19) примет вид

$$\varepsilon r''_{2m+1}(x)-\frac{4\varepsilon x}{2-x^2}r'_{2m+1}(x)-\left(\frac{2\varepsilon}{2-x^2}+\sqrt{x}\right)r_{2m+1}(x)=O\left(\varepsilon^{2m+2}\right),\ \varepsilon\to 0,$$

$$r_{2m+1}(0)=O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ r_{2m+1}(1)=O\left(\varepsilon^{2m+2}\right), \varepsilon\to 0,$$

Для этой задачи, применяя принцип максимума, получаем

$$r_{2m+1}(x)=O(\varepsilon^{2m+1}).$$

Отсюда, следует, что

$$R_{2m+1}(x)=O(\varepsilon^{2m+1}),\ \varepsilon\to 0,\ x\in[0,1].$$

Следовательно, справедлива

Теорема. Асимптотическое решение задачи Дирихле (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$, представимо в виде (4) или

$$|\,y(x)-y_{2m+1}(x)|\le c\,\varepsilon^{2m+1}.$$

Замечание. Аналогично можно построить равномерное асимптотическое разложение решения краевой задачи

$$\varepsilon y''(x) - x^{\alpha} p(x) y(x) = f(x),\ 0 < x < 1,\ \ y(0) = y^0, y(1) = y^1,$$

где α – рациональное число, $p, f \in C^{\infty}[0,T]$, $0<p(x)$, $x \in [0,T]$, $f_0 \neq 0$, y^0, y^1 – const.

§ 5.7. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с кратной точкой поворота

Рассмотрим задачу Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с n-кратной точкой поворота

$$\varepsilon y''(x)+x^n y(x)=f(x), \quad 0<x\le T, \tag{1}$$

$$y(0)=a, \quad y'(0)=b, \tag{2}$$

где n – фиксированное натуральное число, T,a,b – const, $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x),\ f_k\in C^\infty[0,T], f_0(0)\ne 0.$

Решение задачи (1),(2) существует и единственно, требуется построить асимптотическое разложение решения этой бисингулярной задачи при $\varepsilon\to 0$.

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(x)=\sum_{k=-n}^{-1}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k(v_k(x)+\pi_k(t)), \tag{3}$$

где $\mu=\sqrt[n+2]{\varepsilon},\ x=\mu t,\ \pi_k(t)$ – пограничные функций зависящие от μ, $\pi_k\in C^\infty[0,T/\mu]$, $v_k(x)\in C^\infty[0,T]$.

Подставляя (3) в (1) и (2) имеем

$$\begin{gathered}\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)+x^n v_0(x)+\mu(\pi''_{-n+1}(t)+t^n\pi_{-n+1}(t)+x^n v_1(x))+\ldots\\ +\mu^{n+2}(\pi''_2(t)+t^n\pi_2(t)+x^n v_{n+2}(x)+v''_0(x))+\mu^{n+3}(\pi''_3(t)+t^n\pi_3(t)+x^n v_{n+3}(x)+v''_1(x))+\\ \ldots=f_0(x)+\mu^{n+2}f_1(x)+\ldots+\mu^{k(n+2)}f_k(x)+\ldots;\end{gathered} \tag{4}$$

$$\pi_k(0)=0,\ k<0,\ \pi_0(0)=a-v_0(0),\ \pi_k(0)=-v_k(0),\ k\in N; \tag{5}$$

$$\pi'_k(0)=0,\ k<0,\ \pi'_0(0)=\mu(b-v'_0(0)),\ \pi'_k(0)=-\mu v'_k(0),\ k\in N. \tag{6}$$

Из соотношения (4) имеем:

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)+x^n v_0(x)=f_0(x), \tag{7}$$

и здесь мы определим функцию $v_0(x)$ так чтобы она была бесконечно дифференцируемой на отрезке $[0,T]$, т.е. $v_0(x)\in C^\infty[0;T]$.

Равенство (7) можно записать в виде

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)+x^n v_0(x)=f_0(x)-\tilde{f}_0(x)+\tilde{f}_0(x),$$

где $\tilde{f}_0(x)=\sum_{j=0}^{n-1}x^j f_{0,j}$, $f_{0,j}=f_0^{(j)}(0)/j!$.

Отсюда имеем:

$$x^n v_0(x)=f_0(x)-\tilde{f}_0(x)\Rightarrow v_0(x)=\frac{f_0(x)-\tilde{f}_0(x)}{x^n};$$

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)=\tilde{f}_0(\mu t).$$

Справедлива

Лемма. Задача

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)=\tilde{f}_0(\mu t),\ \ 0<t\le T/\mu,\ \pi_{-n}(0)=0,\ \pi'_{-n}(0)=0$$

имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение в классе функций убывающих степенным ростом, когда $t\to T/\mu,\ \mu\to 0$.

Доказательство. Однородное уравнение

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)=0$$

имеет двух линейно независимых решений:

$$z_1(t)=\sqrt{t}J_{1/2q}\left(t^q/q\right),\ z_2(t)=\sqrt{t}Y_{1/2q}\left(t^q/q\right),\ q=(n+2)/2,$$

где $J_i(s), Y_i(s)$ – функции Бесселя.

Заметим, что $0<i<1/2$. Учитывая свойство функции Бесселя:

$$J_i(s)=Y_i(s)=O(s^{-1/2}),\ s\to\infty;\ J_i(s)=O(s^i), Y_i(s)=O(s^{-i}),\ s\to 0;$$

$$W(J_i(s),Y_i(s))=\frac{2}{\pi s},$$

получаем

$$z_{1,2}(t)=O(t^{1/2}t^{-q/2})=O(t^{-n/4}),\ t\to\infty;$$

$$z_1(0)=0,\ z'_1(0)\ne 0,\quad z_2(0)\ne 0,\ z'_2(0)=0$$

$$W(z_1(t),z_2(t))=c_w,\ c_w=\frac{n+2}{\pi}\ne 0.$$

С помощью функции $z_{1,2}(t)$ записываем явное решение задачи:

$$\pi_{-n}(t)=z_2(t)c_w\int_0^t z_1(t)\tilde{f}_0(\mu\tau)d\tau-z_1(t)c_w\int_0^t z_2(t)\tilde{f}_0(\mu\tau)d\tau.$$

Действительно, эта функция удовлетворяет уравнению, так как

$$\pi'_{-n}(t)=z'_2(t)c_w\int_0^t z_1(t)\tilde{f}_0(\mu\tau)d\tau-z'_1(t)c_w\int_0^t z_2(t)\tilde{f}_0(\mu\tau)d\tau;$$

$$\pi''_{-n}(t)=z''_2(t)c_w\int_0^t z_1(t)\tilde{f}_0(\mu\tau)d\tau-z''_1(t)c_w\int_0^t z_2(t)\tilde{f}_0(\mu\tau)d\tau+\tilde{f}_0(\mu t);$$

поэтому

$$\pi''_{-n}(t)+t^n\pi_{-n}(t)\equiv\tilde{f}_0(\mu t),$$

заметим, что $\pi_{-n}(0)=0,\ \pi'_{-n}(0)=0$. А также, если $\tilde{f}_0(\mu t)\equiv 0$, то $\pi_{-n}(t)\equiv 0$, т.е. однородное уравнение с однородными начальными условиями имеет нулевое решение. Отсюда следует единственность $\pi_{-n}(t)$.

Функцию $\pi_{-n}(t)$ при $t\to T/\mu$, $\mu\to 0$ интегрируя по частям (учитывая свойства функции Бесселя), получаем:

$$\pi_{-n}(t)=O(t^{-n}\,\tilde{f}_0(\mu t))=O(\mu^n),t\to T/\mu,\,\mu\to 0.$$

Лемма доказана.

Из соотношения (4) имеем:

$$\pi''_{j-n}(t)+t^n\pi_{j-n}(t)+x^n v_j(x)=0,\ j\in N,\ j\neq k(n+2),\ k\in N.$$

Пусть $v_j(x)\equiv 0$, $j\in N, j\neq k(n+2), k\in N$ тогда

$$\pi''_{-n+j}(t)+t^n\pi_{-n+j}(t)=0,\ j\in N, j\neq k(n+2),\ k\in N.$$

А начальные условия примут вид:

$$\pi_j(0)=0,\ \pi'_j(0)=0,\ j\in N, j\neq k(n+2),\ k\in N.$$

$$\pi_0(0)=a-v_0(0),\ \ \pi'_0(0)=\mu(b-v'_0(0)),$$

$$\pi_{k(n+2)}(0)=-v_{k(n+2)}(0),\ \ \pi'_{k(n+2)}(0)=-\mu v'_{k(n+2)}(0).$$

Также из (4) получаем

$$\pi''_{-n+k(n+2)}(t)+t^n\pi_{-n+k(n+2)}(t)+x^n v_{k(n+2)}(x)+v''_{(k-1)(n+2)}(x)=f_k(x),\ k\in N, \quad (9)$$

и здесь мы определим функции $v_k(x)$ так чтобы $v_k(x)\in C^\infty[0,T]$.

Равенства (9) запишем в виде

$$\pi''_{-n+k(n+2)}(t)+t^n\pi_{-n+k(n+2)}(t)+x^n v_{k(n+2)}(x)=g_k(x)-\tilde{g}_k(x)+\tilde{g}_k(x),\ k\in N,$$

где $g(x)=f_k(x)-v''_{(k-1)(n+2)}(x)$, $\tilde{g}_k(x)=\sum_{j=0}^{n-1} x^j g_{k,j}$, $g_{k,j}=g_k^{(j)}(0)/j!$.

Отсюда имеем

$$x^n v_{k(n+2)}(x)=g_k(x)-\tilde{g}_k(x) \Rightarrow v_{k(n+2)}(x)=\frac{g_k(x)-\tilde{g}_k(x)}{x^n};$$

$$\pi''_{-n+k(n+2)}(t)+t^n\pi_{-n+k(n+2)}(t)=\tilde{g}_k(\mu t).$$

Значит

$$v_j(x)\equiv 0,\ j\in N,\ j\neq k(n+2),\ v_{k(n+2)}(x)=\frac{g_k(x)-\tilde{g}_k(x)}{x^n},\ g_0(x)=f_0(x),\ k=0,1,...$$

$$\pi_{-n+j}(t)\equiv 0,\ j=1,2,...,n-1;\ \pi_0(t)=\frac{z_2(t)}{z_2(0)}(a-v_0(0))+\mu\frac{z_1(t)}{z'_1(0)}(b-v'_0(0)),$$

$$\pi_{k(n+2)}(t)=-\frac{z_2(t)}{z_2(0)}v_{k(n+2)}(0)-\mu\frac{z_1(t)}{z'_1(0)}v'_{k(n+2)}(0),$$

$$\pi_{-n+k(n+2)}(t)=z_2(t)c_w\int_0^t z_1(\tau)\tilde{g}_k(\mu\tau)d\tau-z_1(t)c_w\int_0^t z_2(\tau)\tilde{g}_k(\mu\tau)d\tau.$$

Таким образом, мы определили все члены асимптотического разложения (3). Теперь, оценим остаточный член этого асимптотического разложения.

Оценка остаточного члена. Пусть $y(x)=y_m(x)+R_m(x)$,

где $y_m(x)=\sum_{k=-n}^{-1}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{m(n+2)}\mu^k\left(v_k(x)+\pi_k(t)\right).$

Тогда для остаточной функции $R_m(x)$ получаем задачу

$$\varepsilon R''_m(x)+x^nR_m(x)=-\varepsilon^{m+1}v''_{m(n+2)}(x),\quad 0<x<T,$$

$$R_m(0)=0,\ R'_m(0)=0,$$

Пусть $x=\mu t$, $\varepsilon=\mu^{n+2}$ тогда

$$R''_m(x)+t^nR_m(x)=-\mu^{(m+1)(n+2)-n}v''_{m(n+2)}(\mu t),\quad 0<t<T/\mu,$$

$$R_m(0)=0,\ R'_m(0)=0,$$

Учитывая лемму имеем:

$$R_m(t)=\mu^{m(n+2)+2}c_w\left(z_1(t)\int_0^t z_2(\tau)v''_{m(n+2)}(\mu\tau)\,d\tau-z_2(t)\int_0^t z_1(\tau)v''_{m(n+2)}(\mu\tau)\,d\tau\right)$$

Отсюда получаем $R_m(x)=O(\varepsilon^{m+2/(n+2)})$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,T]$.

Следовательно, справедлива

Теорема. Для решения задачи Коши (1), (2) при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение (3).

Заключение по главе 5

В данной главе исследованы обыкновенные дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной первого и второго порядков с условиями Коши, Дирихле, Неймана и Робена в случае, когда соответствующие невозмущенные уравнения имеют негладкие решения.

Модифицированным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет иррегулярную особую точку;

Обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота дробного и целого порядков.

Глава 6. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ОСОБЕННОСТЯМИ

§ 6.1. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши с квадратичным ростом особенности по времени

В данном параграфе строится асимптотика решения бисингулярной задачи Коши для линейного неоднородного параболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Асимптотическое приближение явного решения построено обобщенным методом пограничных функций. Здесь рассматривается случай, когда решение соответствующего «вырожденного» уравнения имеет квадратичный рост сингулярности по времени. Получена оценка для остаточного члена.

Исследуем бисингулярную задачу Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty, \tag{2}$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in\widetilde{C}^{\infty}(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $p(x,t)>0$ $(x,t)\in\bar{D}$, $\varphi\in\widetilde{C}^{\infty}(R)$, $\widetilde{C}^{\infty}(D)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно $x, u(x,t)$ – неизвестная функция.

Решение задачи Коши (1)-(2) существует и единственно [42].

Задача (1)-(2) является бисингулярной, так как соответствующее невозмущенное уравнение имеет не гладкое решение:

$$u_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{t^2 p(x,t)}.$$

Нас интересует асимптотика решения задачи (1)-(2), когда $\varepsilon\to 0$ и $(x,t)\in\overline{D}$.

Асимптотику решения задачи Коши (1)-(2) строим, модифицируя обобщенный метод погранфункций. Для этого решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,\tau), \tag{3}$$

где $V(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x,t)$, $W(x,\tau)=\sum\limits_{k=-2}^{\infty}\mu^k w_k(x,\tau), \varepsilon=\mu^3, \tau=t/\mu$.

Как обычно нашу уравнению (1) запишем в виде

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)u(x,t)=f(x,t)-h(x,t)+h(x,\mu\tau), \tag{4}$$

как заметили, мы здесь ввели, пока неизвестный, асимптотический ряд $h(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h_k(x,t)$.

После подстановки соотношения (3) в уравнение (4) относительно $V(x,t)$ и $W(x,\tau)$ получим дифференциальные уравнения:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)V(x,t)=f(x,t)-h(x,t), \tag{5}$$

$$\mu^2\left(\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial \tau}-\mu\frac{\partial^2 W(x,\tau)}{\partial x^2}\right)+\mu^2\tau^2 p(x,\mu\tau)W(x,\tau)=h(x,\mu\tau). \tag{6}$$

Для пограничной функции $W(x,\tau)$ вставим начальное условие:

$$W(x,0)=\varphi(x)-V(x,0). \tag{7}$$

Из дифференциального уравнения (5), учитывая $V(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x,t)$, для коэффициентов малого параметра имеем:

$$v_0(x,t)=\frac{f(x,t)-h_0(x,t)}{t^2 p(x,t)},$$

$$v_k(x,t)=\frac{g_k(x,t)-h_k(x,t)}{t^2 p(x,t)},\ k\in N.$$

где $g_k(x,t)=\dfrac{\partial^2 v_{k-1}(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial v_{k-1}(x,t)}{\partial t}$.

Здесь мы должны определить неизвестные функции $h_k(x,t),\ k\in N_0$ так чтобы $v_k(x,t),\ k\in N_0$ были достаточно гладкими (бесконечно дифференцируемыми в области D) и пограничные функции устраняя невязку на границе убывали ("исчезали").

Пусть

$$h_k(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}(x)t^j\ ,$$

где $h_{0,0}(x)=f(x,0)$, $h_{0,1}(x)=\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial t}$, $h_{k,0}(x)=g_k(x,0)$, $h_{k,1}(x)=\dfrac{\partial g_k(x,0)}{\partial t}$.

Тогда $v_k(x,t)\in C^{\infty}(D),\ k=0,1,...$ Остальные функций $h_{k,j}(x)$ подберем так, чтобы выполнялись условия

$$w_k(x,\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

Перейдем к определению пограничной функции, т.е. членов ряда $\sum_{k=-2}^{\infty}\mu^k w_k(x,\tau)$. Дифференциальное уравнение (6) можно записать в виде:

$$\mu^2\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial\tau}-\mu^3\frac{\partial^2 W(x,\tau)}{\partial x^2}+\mu^2\tau^2\sum_{j=0}^{\infty}(\mu\tau)^j p_j(x)W(x,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{3k}\sum_{j=0}^{\infty}h_{k,j}(x)(\mu\tau)^j .$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, имеем:

$$Lw_{-2}\equiv\frac{\partial w_{-2}(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^2 p_0(x)w_{-2}(x,\tau)=h_{0,0}(x),\ (x,\tau)\in D_1, \tag{8}$$

$$Lw_{-1}=\frac{\partial^2 w_{-2}(x,\tau)}{\partial x^2}-\tau^3 p_1(x)w_{-2}(x,\tau)+h_{0,1}(x)\tau,\ (x,\tau)\in D_1, \tag{9}$$

$$Lw_{3k-2+i}=\frac{\partial^2 w_{3k+i-3}(x,\tau)}{\partial x^2}-\sum_{j=1}^{3k+i}\tau^{j+2}p_j(x)w_{3k-2+i-j}(x,\tau)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k}h_{k-s,3s+i}(x)\tau^{3s+i},k\in N,\ i=0,1,2,\ (x,\tau)\in D_1, \tag{10}$$

где $D_1=\{(x,\tau)|\ -\infty<x<+\infty,\ 0<\tau<+\infty\}$.

Из начального условия (7), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, имеем:

$$w_0(x,0)=\varphi(x)-v_0(x,0),\ w_{3k}(x,0)=-v_k(x,0),\ w_m(x,0)=0,\ m\neq 3k\ \ k\in N. \qquad (11)$$

Докажем вспомогательные теоремы.

Теорема 1. Пусть $F(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$, $z^0(x)\in C^{\infty}(R)$, $a(x)>0$. Тогда задача Коши

$$\frac{\partial z(x,\tau)}{\partial \tau}+\tau^2 a(x)z(x,\tau)=F(x,\tau),\ (x,\tau)\in D_1,\ z(x,0)=z^0(x), \qquad (12)$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$.

Доказательство. Интегрируя дифференциальное уравнение (12) с начальным условием, получаем явное решение задачи Коши:

$$z(x,\tau)=z^0(x)e^{-\tau^3 a(x)/3}+\int_0^{\tau} e^{(\alpha^3-\tau^3)a(x)/3}F(x,\alpha)d\alpha .$$

Если $F(x,\tau)=O(\tau^n)$, $\tau\to+\infty$, n – const, то $z(x,\tau)=O(\tau^{n-2})$, $\tau\to+\infty$. Из теоремы 6.1 следует существование и единственность решений задач (8)-(11).

Теорема 2. Пусть $0<a(x)\in C^{\infty}(R)$ и $F_j(x,\tau)\in C^{\infty}(\overline{D}_1)$, $j=0,1,2$ разлагаются в ряды

$$F_j(x,\tau)=\tau\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2, \qquad \tau\to+\infty,\ -\infty<x<+\infty.$$

Тогда в области D_1, существуют решения уравнений

$$\frac{\partial z_j(x,\tau)}{\partial \tau}+\tau^2 a(x)z_j(x,\tau)=F_j(x,\tau),\ \ j=0,1,2,\ \tau\to+\infty, \qquad (13)$$

которые разлагаются в ряды, соответственно

$$z_j(x,\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_{j,3k+j}(x)}{\tau^{3k+j}},\ j=0,1,2,\ \ \tau\to+\infty . \qquad (14)$$

Доказательство. Дифференцируемость рядов (14) вытекает непосредственно из (13). Разложение ищем в виде (14), где $z_{j,3k+j}(x)$ – пока неизвестные функций. Подставляя (14) в (13) получаем простые рекуррентные системы уравнений относительно $z_{j,3k+j}(x)$. Отсюда последовательно определяются все члены (14). Далее, с помощью теоремы 6.1 оцениваем остаточные члены рядов (14).

Теорема 3. Пусть для $h_{k,j}(x)$ справедливы разложения

$$h_{k,j}(x)=\sum_{s=1}^{3k+2}p_{j+s-2}(x)w_{3k-s,s}(x),\ k=0,1,\ldots,j=2,3,\ldots$$

Тогда, при $\tau\to+\infty$, справедливы разложения

$$w_{3(k-1)+s}(x,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{3(k-1)+s,3j-s}(x)}{\tau^{3j-s}},\ s=0,1,2,\quad k=0,1,...$$

Доказательство. Последовательно применяя теорему 6.2 для уравнений (8) и (9), получаем

$$w_{-2}(x,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{-2,3j-1}(x)}{\tau^{3j-1}},\ w_{-1}(x,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{-1,3j-2}(x)}{\tau^{3j-2}},\ \tau\to+\infty, \qquad (15)$$

где $w_{-2,2}(x)=\dfrac{h_{0,0}(x)}{p_0(x)}$, $w_{-2,3k+2}(x)=\dfrac{(3k-1)w_{-2,3k-1}(x)}{p_0(x)}$, $k\in N$.

Теперь в (10) неизвестную функцию $h_{k,j}(x)$ надо выбрать так, чтобы максимальная степень разложения по τ правых частей равенств (10) не превышало двойки, когда $\tau\to+\infty$.

Из (10) при k=0 и i=2 имеем:

$$Lw_0=\frac{\partial^2 w_{-1}(x,\tau)}{\partial x^2}-\sum_{j=1}^{2}\tau^{j+2}p_j(x)w_{-j}(x,\tau)+\sum_{s=0}^{k}h_{0,2}(x)\tau^2, \qquad (16)$$

Если $h_{0,2}(x)=p_1(x)w_{-1,1}(x)+p_2(x)w_{-2,2}(x)$, то применяя асимптотику (15) и теорему 6.2 для уравнения (16), получаем:

$$w_0(x,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w_{0,3j}(x)}{\tau^{3j}},\ \tau\to+\infty.$$

Аналогично доказываются и остальные случаи.

Таким образом, мы определили все члены решения (3). Осталось оценить остаточный член.

Пусть

$$u(x,t)=u_m(x,t)+R_m(x,t),$$

где $u_m(x,t)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x,t)+\sum_{k=-2}^{3m}\mu^k w_k(x,\tau)$.

Тогда относительно $R_m(x,t)$ получим задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R_m(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 R_m(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^2 p(x,t)R_m(x,t)=O(\varepsilon^{m+1}),\quad (x,t)\in D, \quad (17)$$

$$R_m(x,0)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right),\ x\in R,\ \varepsilon\to 0. \quad (18)$$

Для начала к задаче (17)-(18) применяем преобразование $R_m(x,t)=(1+t)r_m(x,t)$, где $r_m(x,t)$ – новая неизвестная функция.

Тогда относительно $r_m(x,t)$ получаем задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial r_m(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 r_m(x,t)}{\partial x^2}\right)+\left(t^2 p(x,t)+\frac{\varepsilon}{1+t}\right)r_m(x,t)=O(\varepsilon^{m+1}),\quad (x,t)\in D,$$

$$r_m(x,0)=O\left(\varepsilon^{m+1}\right),\ x\in R,\ \varepsilon\to 0.$$

К этой задаче применяя принцип максимума, получаем оценки:

$$r_m(x,t)=O\left(\varepsilon^m\right),\ \varepsilon\to 0,(x,t)\in\bar{D}.$$

Отсюда следует, что $R_m(x,t)=O\left(\varepsilon^m\right),\ \varepsilon\to 0,(x,t)\in\bar{D}.$

Нами доказана

Теорема 4. Для решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$, $(x,t)\in\bar{D}$ справедливо асимптотическое разложение (3), т.е.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k v_k(x,t)+\sum_{k=-2}^{3m}\mu^k w_k(x,\tau)+O(\varepsilon^m),$$

где, $\varepsilon=\mu^3,\tau=t/\mu$.

§ 6.2. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши с особенностью по времени

Рассмотрим бисингулярную задачу Коши

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m u(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in R, \tag{2}$$

где $D=\{(x,t)|\ x\in R,\ 0\le t\le 1\}$, $f\in \widetilde{C}^\infty(D)$, $f(x,0)\neq 0$, $\varphi\in \widetilde{C}^\infty(R)$, m – фиксированное натуральное число, $\widetilde{C}^\infty(D)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, и ограниченных в R относительно x, $u(x,t)$ – неизвестная функция.

Задача (1)-(2) является бисингулярной, так как предельное (соответствующее невозмущенное, ε=0) уравнение:

$$t^m u^0(x,t)=f(x,t),$$

имеет не гладкое решение:

$$u^0(x,t)=\frac{f(x,t)}{t^m},$$

т.е. решение в точке t=0 имеет полюс m-го порядка.

Если решение задачи (1)-(2) искать классическим методом пограничных функций, т.е. в виде:

$$u(x,t)=u^{(0)}(x,t)+\varepsilon u^{(1)}(x,t)+\ldots+\varepsilon^k u^{(k)}(x,t)+\ldots \tag{3}$$

то для неизвестных функций $u_k(t,x)$, k=0,1,2,… получим следующее:

$$t^m u^{(0)}(x,t)=f(x,t),$$

$$t^m u^{(1)}(x,t)=\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t},$$

$$t^m u^{(\mathrm{k})}(x,t)=\frac{\partial^2 u^{(k-1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial t},\ k\in N.$$

Отсюда

$$u^{(0)}(x,t)\sim\frac{f(x,0)}{t^m},\ t\to 0;$$

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2}-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}\sim\frac{m}{t^{m+1}}f(x,0)\Rightarrow\quad u^{(1)}(x,t)\sim\frac{m}{t^{2m+1}}f(x,0),\quad t\to 0;$$

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}\sim\frac{m(2m+1)}{t^{2m+2}}f(x,0)\quad\Rightarrow u^{(2)}(x,t)\sim\frac{m(2m+1)}{t^{3m+2}}f(x,0),\;\; t\to 0\;.$$

Аналогично, для $u^{(m)}(x,t)$ имеем

$$u^{(k)}(x,t)\sim\frac{m(2m+1)(3m+2)...(km+k-1)}{t^{m+(m+1)k}}f(x,0),\;\; t\to 0\,,\forall k\in N\,.$$

Поэтому соотношение (3) можно записать в виде

$$u(x,t)\sim\frac{1}{t^m}f(x,0)\left(1+m\frac{\varepsilon}{t^{m+1}}+...+m(2m+1)...(km+k-1)\left(\frac{\varepsilon}{t^{m+1}}\right)^k+...\right),\quad t\to 0.$$

Однако, этот ряд является асимптотическим только при $t\in(\mu,1]$, где $\mu=\sqrt[m+1]{\varepsilon}$, и не может удовлетворить начальному условию (2). Для построения полного равномерного асимптотического разложения решения задачи (1)-(2) применяем обобщенный метод погранфункций.

Асимптотическое решение задачи (1)-(2) ищем в виде

$$u(x,t)=Z(x,t)+W(x,\tau), \tag{4}$$

где $Z(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z^{(k)}(x,t),\;\; W(x,\tau)=\sum_{k=-m}^{\infty}\mu^k w^{(k)}(x,\tau),\;\; \varepsilon=\mu^{m+1},\;\; \tau=t/\mu$,

и функции

$$z^{(k)}(x,t)\in\tilde{C}^{\infty}(D),\;\; W(x,\tau)\in\tilde{C}^{\infty}(D_1),\;\; D_1=\{(x,\tau)\,|\,x\in\mathrm{R},\;0<\tau<\infty\}.$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m u(x,t)=f(x,t)-h(x,t)+h(x,\mu\tau)\,, \tag{5}$$

где $h(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k h^{(k)}(x,t)$ – пока неизвестный асимптотический ряд и коэффициенты этого ряда выбираются при построении регулярного внешнего решения $z^{(k)}(x,t)$ в области *D*.

Подставляя соотношение (4) в уравнение (5), мы получим следующие уравнения:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m Z(x,t)=f(x,t)-h(x,t)\,, \tag{6}$$

$$\mu^m\left(\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial \tau}-\mu\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}\right)+\mu^m\tau^m W(x,\tau)=h(x,\mu\tau)\,. \tag{7}$$

Начальное условие для $W(x,\tau)$ примет вид

$$W(x,0)=\varphi(x)-V(x,0). \tag{8}$$

Из (6), имеем

$$t^m z^{(0)}(x,t)=f(x,t)-h^{(0)}(x,t)\,,$$

$$t^m z^{(k)}(x,t)=g^{(k)}(x,t)-h^{(k)}(x,t),\quad k\in N\,,$$

где $g^{(k)}(x,t)=\left(\frac{\partial^2 z^{(k-1)}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial z^{(k-1)}(x,t)}{\partial t}\right)$.

Если функцию $h^{(0)}(x,t)$ выбрать следующим образом

$$h^{(0)}(x,t)=h^{(0,0)}(x)+h^{(0,1)}(x)t+\ldots+h^{(0,\mathrm{m}-1)}(x)t^{m-1},$$

где $h^{(0,k)}(x)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k}$,

то,

$$z^{(0)}(x,t)=\frac{f(x,t)-h^{(0)}(x,t)}{t^m}\in\tilde{C}^\infty(D)\,.$$

Для $z_k(x,t)$ имеем:

$$z_k(x,t)=\frac{g^{(k)}(x,t)-h^{(k)}(x,t)}{t^m},\ k\in N\,.$$

Аналогично, как и выше, выбираем функции $h^{(k)}(x,t)(k=1,2,\ldots)$.

Пусть

$$h^{(k)}(x,t)=\sum_{j=0}^{m-1}g^{(k,j)}(x)t^j\,,\text{ где }\ g^{(k,j)}(x)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j g^{(k)}(x,0)}{\partial t^j}, j=1,\ldots,m-1.$$

Тогда $z^{(k)}(x,t)\in\tilde{C}^\infty(D),\ k=1,2,\ldots$

Таким образом, мы определили все $z_k(x,t)$ и $h^{(k)}(x,t)\ \ (k=1,2,...)$. Теперь перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k=-m}^{\infty}\mu^k w^{(k)}(x,\tau)$.

Равенство (7) запишем в виде:

$$\mu^m\,\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial\tau}-\mu^{m+1}\,\frac{\partial^2 W(x,\tau)}{\partial x^2}+\mu^m\tau^m W(x,\tau)=h(x,\mu\tau)\ .$$

Отсюда

$$Lw^{(-m)}:=\frac{\partial w^{(-m)}(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^m w^{(-m)}(x,\tau)=h^{(0,0)}(x),w^{(-m)}(x,0)=0, \tag{9}$$

$$Lw^{(i-m)}=\frac{\partial^2 w^{(i-m-1)}(x,\tau)}{\partial x^2}+h^{(0,i)}(x)\tau^i,\ w^{(i-m)}(x,0)=0\ \ ,i=1,...,m-1,(x,\tau)\in D_1 \tag{10}$$

$$\begin{gathered}Lw^{((m+1)k)}=\frac{\partial^2 w^{((m+1)k-1)}(x,\tau)}{\partial x^2},\\ w^{(0)}(x,0)=\varphi(x)-z^{(0)}(x,0),\ \ w^{((m+1)k)}(x,0)=-z^{(k)}(x,0),\quad k=0,1,...\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}Lw^{((m+1)k+i+1)}=\frac{\partial^2 w^{((m+1)k+i)}(x,\tau)}{\partial x^2}+g^{(k,i)}(x)\tau^i,\\ w^{((m+1)k+i+1)}(x,0)=0\ \ ,\ i=0,1,...,m-1,\ \ k\in N,\ \ (x,\tau)\in D_1\end{gathered} \ . \tag{12}$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть $r(x,\tau)\in\tilde C^\infty(\bar D_1),\ \ a(x)\in\tilde C^\infty(R)$. Тогда задача

$$\frac{\partial z(x,\tau)}{\partial\tau}+\tau^m z(x,\tau)=r(x,\tau),\quad z(x,0)=a(x), \tag{13}$$

имеет единственное решение $z(x,\tau)\in\tilde C^\infty(D_1)$.

Доказательство. После интегрирование дифференциального уравнения с начальным условием, имеем:

$$z(x,\tau)=a(x)e^{-\tau^{m+1}/(m+1)}+\int_0^\tau e^{(s^{m+1}-\tau^{m+1})/(m+1)}r(x,s)ds\,,$$

и эта функция является единственным решением задачи (13).

Нетрудно заметить, что если

$$F(x,\tau)=O(\tau^k),\ \tau\to+\infty,\ k-\text{const, то } z(x,\tau)=O(\tau^{k-m}),\ \tau\to+\infty.$$

Из этой леммы следует существование и единственность решения задач (9)-(12).

Оценим остаточный член асимптотического разложения (4). Пусть

$$R^{(n)}(x,t)=u(x,t)-u^{(n)}(x,t),$$

где $u^{(n)}(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z^{(k)}(x,t)+\sum_{k=-m}^{(m+1)n}\mu^k w^{(k)}(x,\tau)$.

Тогда для остаточной функции $R_n(x,t)$, получим задачу:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial R^{(n)}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 R^{(n)}(x,t)}{\partial x^2}\right)+t^m R^{(n)}(x,t)=O(\varepsilon^{n+1}),\quad R^{(n)}(x,0)=0,\ x\in R\ . \tag{14}$$

С помощью преобразования

$$R^{(n)}(x,t)=e^{-t^{m+1}/(m+1)\varepsilon}r(x,t)$$

задачу (14) запишем в виде:

$$\frac{\partial r\ (x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 r\ (x,t)}{\partial x^2}=O(\varepsilon^n e^{t^{m+1}/(m+1)\varepsilon}),\ r(x,0)=0.$$

Решение этой задачи существует, единственно и представимо в виде [42, с. 254]:

$$r(x,t)=O\left(\varepsilon^n\right)\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau^{m+1}/(m+1)\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}d\xi d\tau\,.$$

Отсюда получаем

$$r(x,t)=O\left(\varepsilon^n e^{t^{m+1}/(m+1)\varepsilon}\right),\ \varepsilon\to0$$

или

$$R_n(x,t)=O(\varepsilon^n),\ \varepsilon\to0,\ (x,t)\in\overline{D}\,.$$

Следовательно, справедлива

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to0$ справедливо асимптотическое разложение (4).

Пример. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)+tu(x,t)=\frac{1}{1+x^2},\quad (x,t)\in D,\qquad u(x,0)=1.$$

Для решения этой задачи справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,t)=\mu^{-1}w^{(-1)}(x,\tau)+w^{(0)}(x,\tau)+\mu w^{(1)}(x,\tau)+\mu^2 w^{(2)}(x,\tau)+O(\varepsilon),$$

$$\varepsilon\to 0,\ (x,t)\in\bar{D},$$

где

$$w^{(-1)}(x,\tau)=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^3}+O\left(\frac{1}{\tau^5}\right)\right),\ \tau\to+\infty,\ x\in R,$$

$$w^{(0)}(x,\tau)=c^{(0)}(x)\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau^4}+O\left(\frac{1}{\tau^6}\right)\right),\ \ c^{(0)}(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'',\ \tau\to+\infty,\ x\in R,$$

$$w^{(j)}(x,\tau)=c^{(j)}(x)O\left(\frac{1}{\tau^{2+j}}\right),\ c^{(j)}(x)=\left(c^{(j-1)}(x)\right)'',\ j=1,2,\ \ \tau\to+\infty,\ x\in R.$$

§ 6.3. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ (x,t)\in D, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x)=f(x),\ \ x\in R, \tag{2}$$

где $D=\{(t,x): 0<t<\infty,\ x\in R\}$, $f(x)$ – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Решение задачи существует и единственно. Требуется построить полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру в области $\overline{D}$.

Действительно, при 0<ε явное решение задачи (1)-(2) можно построить методом Фурье, т.е. методом разделения переменных. Решение ищем в виде:

$$u(t,x)=Q(t)R(x),$$

тогда

$$u_t(t,x)=Q'(t)R(x),\ u_{xx}(t,x)=Q(t)R''(x).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), имеем:

$$\frac{1}{\varepsilon}Q'(t)R(x)=Q(t)R''(x)\ \Rightarrow \frac{Q'(t)}{\varepsilon Q(t)}=\frac{R''(x)}{R(x)}=-\lambda^2,\ \lambda-const.$$

Отсюда находим $Q(t)$ и $R(x)$:

$$\frac{Q'(t)}{\varepsilon Q(t)}=-\lambda^2\ \Rightarrow Q(t)=c_1e^{-\varepsilon\lambda^2 t},$$

$$\frac{R''(x)}{R(x)}=-\lambda^2\Rightarrow\ R''(x)+\lambda^2R(x)=0\Rightarrow R(x)=c_2\,e^{\pm i\lambda x}.$$

Следовательно,

$$u_\lambda(t,x)=C(\lambda)e^{-\lambda^2\varepsilon t\pm i\lambda x},$$

здесь $\lambda\in$R, поэтому берем знак плюс:

$$u_\lambda(t,x) = C(\lambda)e^{-\lambda^2\varepsilon t + i\lambda x}.$$

Отсюда имеем:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(t,x)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{-\lambda^2\varepsilon t + i\lambda x}d\lambda. \tag{3}$$

где $C(\lambda)$определяется условием (2).

Учитывая начальное условие (2), имеем:

$$u(0,x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,$$

применяя преобразование Фурье, имеем:

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)d\xi.$$

Подставляя последнее выражение в (3), получаем:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi)d\xi e^{-\lambda^2\varepsilon t + i\lambda x}d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования, и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\varepsilon t + i\lambda(x-\xi)}d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}}$$

получаем

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}} f(\xi)d\xi. \tag{4}$$

Если асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) искать методом малого параметра:

$$u(t,x) = u_0(t,x) + \varepsilon u_1(t,x) + \varepsilon^2 u_2(t,x) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t,x) + \ldots \tag{5}$$

то имеем:

$$\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} = 0, \quad u_0(0,x) = f(x);$$

$$\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_{k-1}(t,x)}{\partial x^2}, \quad u_k(0,x) = 0,\ k \in N.$$

Отсюда после интегрирования с учетом начальных условий имеем:

$$u_0(t,x) = f(x),$$

$$u_1(t,x) = tf''(x)$$

$$u_k(t,x) = \frac{t^k}{k!} f^{(2k)}(x),\ k \in \mathbf{N}.$$

Ряд (5) примет вид:

$$u(t,x) = f(x) + \varepsilon t f^{(2)}(x) + (\varepsilon t)^2 f^{(4)}(x) + \ldots + (\varepsilon t)^n f^{(2n)}(x) + \ldots$$

этот ряд является асимптотическим при $0 \le t < 1/\varepsilon$, $x \in R$ и теряет свойство асимптотичности при $1/\varepsilon \le t$, $x \in R$.

Нетрудно заметить, что если начальная задача (1)-(2) рассматривается на конечном отрезке времени, т.е. $0 \le t \le T$ – *const*, то задача (1)-(2) регулярно возмущенная, в противном случае, т.е. в нашем случае она сингулярно возмущенная, точнее бисингулярно возмущенная.

Чтобы получить равномерное разложение решения задачи (1)-(2) мы преобразуем точное решение (4):

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{1+\varepsilon t}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon t}\,\xi}{\sqrt{4\varepsilon t}} - \frac{\sqrt{1+\varepsilon t}\,x}{\sqrt{4\varepsilon t}}\right)^2} f(\xi)d\xi = \left| \begin{array}{l} s = \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon t}{4\varepsilon t}}(\xi - x) \\ \xi = \sqrt{\dfrac{4\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} s + x \\ d\xi = \sqrt{\dfrac{4\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} ds \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}} f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} s + x\right) ds$$

или

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}} f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}} s + x\right) ds.$$

Пусть $t=\frac{1}{\varepsilon\eta}-1$, тогда

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}}f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}}s+x\right)ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds=$$

$$=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds.$$

Учитывая разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}}}=1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots$$

получаем

$$u(\eta,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots\right) \quad (6)$$

где $0\le\eta\le 1/\varepsilon$.

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) в области D при $\varepsilon\to 0$ справедливо асимптотическое разложение (6).

Пример. Рассмотрим пример, пусть $f(x)=e^{-x^2}$.

Построим явное решение:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}}f(\xi)d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}}e^{-\xi^2}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2+4\varepsilon t\xi^2}{4\varepsilon t}}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2-2x\xi+\xi^2+4\varepsilon t\xi^2}{4\varepsilon t}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(1+4\varepsilon t)\left(\xi^2-2\frac{x}{1+4\varepsilon t}\xi+\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}\right)^2-\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}\right)^2+\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}\right)}{4\varepsilon t}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(1+4\varepsilon t)\left(\xi-\frac{x}{1+4\varepsilon t}\right)^2}{4\varepsilon t}}d\xi=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{1+4\varepsilon t}{4\varepsilon t}}\xi=s\\ d\xi=\sqrt{\frac{4\varepsilon t}{1+4\varepsilon t}}ds\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\left(1+4\varepsilon t\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(s-\frac{x}{\sqrt{(1+4\varepsilon t)4\varepsilon t}}\right)^2}ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1+4\varepsilon t\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}$$

т.е. $u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1+4\varepsilon t\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}$.

Проверим, начальное условие: $u(0,x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1+0\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+0}}=e^{-x^2}$.

Проверим уравнению:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=-\frac{2\varepsilon}{\sqrt{(1+4\varepsilon t)^3}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}+\frac{4x^2\varepsilon}{\sqrt{(1+4\varepsilon t)^5}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=-\frac{2}{\sqrt{(1+4\varepsilon t)^3}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}+\frac{4x^2}{\sqrt{(1+4\varepsilon t)^5}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}$$

отсюда $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$.

Решение $u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1+4\varepsilon t\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+4\varepsilon t}}$ разложим в ряд по малому параметру:

$$1)\, t=\frac{1}{\tau}-1 : u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1+4\frac{\varepsilon}{\tau}-4\varepsilon\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+4\frac{\varepsilon}{\tau}-4\varepsilon}}$$

$$2)\, \tau=4\varepsilon\eta : u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\eta}-4\varepsilon\right)}}e^{-\frac{x^2}{1+1/\eta-4\varepsilon}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}}}=1+\frac{1}{2}\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}+\frac{3}{8}\left(\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\ldots$$

Получим:

$$u(t,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{(\eta+1-4\varepsilon)}}e^{-\frac{x^2}{1+1/\eta-4\varepsilon}}=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{1+\eta}\sqrt{1-\frac{4\varepsilon}{1+\eta}}}e^{-\frac{x^2}{1+\frac{1}{\eta}-4\varepsilon}}$$

$$=e^{-\frac{x^2}{1+1/\eta-4\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1+\eta}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}+\frac{3}{8}\left(\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{4\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\ldots\right)$$

Заключение по главе 6

В данной главе исследованы задачи Коши на бесконечной прямой для бисингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений параболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными. Методом преобразований (редукция) и обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений. Получены оценки для остаточных членов разложений, т.е. асимптотические разложения строго обоснованы.

ВЫВОДЫ

В диссертации построены асимптотики решений линейных и нелинейных бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

Впервые в диссертационной работе:

- методом униформизации и методом преобразований построена асимптотика решения модельного уравнения Рейса и определена точка, в которой начинается скачок; Построено явное решение этого уравнения с помощью специальной функции Ламберта.

- построена асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью (со скачком).

- Предложен новый метод для построения асимптотики решения для химической реакции вблизи особой точки, где асимптотическое разложение решения имеет двойную особую точку. Также использована экспоненциально малая поправка в асимптотическом разложении, без которой нельзя построить правильную асимптотику решения; предложенный метод является обобщением метода Пуанкаре-Лайтхилла-Го.

- разработан новый метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значених аргумента(действительного или комплексного), который обобщает метод малого параметра Пуанкаре-Линдстета в теории нелинейных колебаний, и в качестве малого параметра выступает обратное значение аргумента при больших значениях аргумента.

- методом погранфункций построены асимптотические разложения решений первой, второй и третьей краевых задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет нерегулярную особую точку;

- обобщенным методом погранфункций построены асимптотические разложения решений начальной и первой краевой задач для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с точкой поворота;

- обобщенным методом погранфункций построена асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа;

- методом преобразований построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности и предложен новый метод построения асимптотики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abrahamsson, L. A priori estimates for solutions of singular perturbations with a turning point [Text] / L. Abrahamsson // Stud.Appl.Math. 56 (1977). P. 51–69.
2. Ackerberg, R. C. Boundary layer problems exhibiting resonance [Text] / R. C. Ackerberg, R. E. Jr. O'Malley // Studies in Appl. Math. 49 (1970). P. 277-295.
3. Alymkulov, K. A Method for Constructing Asymptotic Expansions of Bisingularly Perturbed Problems [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Russian Mathematics, 2016, Vol. 60, No. 12. P. 1-8.
4. Alymkulov, K. Perturbed Differential Equations with Singular Points. In book "Recent Studies in Perturbation Theory" [Text] / K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov. Publisher InTech. (2017). P.1-43.
5. Ashwani, K. Kapila Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems (Applicable mathematics series) [Text] / K. Kapila Ashwani // UK Addison-Wesley Longman Ltd. 1983.
6. Asymptotic Methods in Fluid Mechanics: Survey and Recent Advances, Steinrück, Herbert (Ed.), Springer, 2010.
7. Beals, R. Special functions: A graduate text [Text] / R. Beals, R. Wong // Cambridge University Press, 2010, 449 p.
8. Cannon, J.R. The one-dimensional heat equations [Text] / J.R. Cannon // Addison-Wesley Publ. Co., Menlo Park, California, 1984.
9. Carrier, C.F. Boundary lave problems in applied mathematics [Text] / C.F. Carrier //Comm. Appl. Math. – 1954. – V.7. – P.11-17.
10. Cousteix, J. Asymptotic Analysis and Boundary Layers [Text] / J. Cousteix, J. Mauss // Springer, 2007.
11. Dauylbaev, M.K.Boundary-value problems with initial jumps for singularly perturbed integrodifferential equations [Text] / M.K. Dauylbaev,

A.E. Mirzakulova // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 222. No 3. – P. 214-225.

12. Eckhaus, W., Boundary layers in linear elliptic singular perturbation problems [Text]/ W. Eckhaus // SIAM Rev. 14. (1972). – P. 225–270.
13. Fruchard, A. Composite Asymptotic Expansions [Text] / A. Fruchard, R. Schafke // Lect. Notes in Math., № 2066, Springer, 2013.
14. Geng, F. A numerical method for singularly perturbed turning point problems with an interior layer [Text] / F. Geng, S.P. Qian, S. Li // J. Comput. Appl. Math. 255 (2014). P. 97–105.
15. Geng, F. Reproducing kernel method for singularly perturbed turning point problems having twin boundary layers [Text] / F. Geng, S.P. Qian // Appl. Math. Lett. 26 (2013). P. 998–1004.
16. Gie, G.M. Singular perturbations and boundary layers [Text] / G. M. Gie, M.Homuda, Ch.Jung, R.Temam // Springer, 2018.
17. Grasman, J. On the birth of boundary layers [Text] / J. Grasman // Doctoral thesis, Delft University of Technology, 1971; to be published as Mathematical Centre Tract No. 36.
18. Hastings, S.P. Classical methods in ordinary differential equations, with applications to boundary value problems [Text] / S.P. Hastings, J.B. Mcleod // AMS, 2012.
19. Kassoy, R. A note on asymptotic methods for jump phenomena [Text] / R. Kassoy// SIAM J. Apll. Math., 1982. Vol. 42. № 3. – P. 926-932.
20. Kozhobekov, K.G. Asymptotics of the Solution to the Boundary-value Problems when Limited Equation Has Singular Point [Text] / K.G. Kozhobekov, D.A. Tursunov // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 41. No. 1 (2020). –P. 96–101.
21. Kozhobekov, K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov, D.A. Tursunov // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017 Pushpa Publ. House, Allahabad, India. Vol. 102. № 2. –P. 329-336.

22. Kozhobekov, K.G. A new approach to constructing the asymptotic of the solution of the Bessel equation for large values of the complex argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // International Journal of Professional Science. – 2019. – № 9. – P. 6-10.
23. Kozhobekov, K.G. Asymptotics of the solution of Bessel equation at large values of the argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // Norwegian Journal of development of the International Science. 2019. No 27. P. 58-62.
24. Kozhobekov, K.G. A new approach to constructing the asymptotic of the solution of the Bessel equation for large values of the argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // III Borubaev's readings, Bishkek, may 24, 2019. – P. 20.
25. Kozhobekov, K.G. Asymptotics of the solution of the Bessel equation for the large values of the argument [Text] / K.G. Kozhobekov, K. Alymkulov // Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8 Bishkek - Cholpon-Ata, Kyrgyzstan, June 17-23, 2018. – C.17–23.
26. Lebedev, N.N. Special functions and their applications [Text] / N.N. Lebedev // Dover pub., 1972, 336 p.
27. Nayfeh, Ali H. Perturbation Methods [Text] / Ali H. Nayfeh // John Wiley & Sons. 2008.
28. Olver, F. Asymptotic and special functions [Text] / F. Olver // Academic Press, New York, 1974. 572 p.
29. Poincare, H. Acta Math. [Text] / H. Poincare. 8 1886. – P. 295-344.
30. Prandtl, L. Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung [Text] / L. Prandtl // Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904. – P. 484-491.
31. Reiss, S.L. New asymptotic methods for jump phenomens [Text] / S.L. Reiss // SIAM J.Appl. Math.,1980. V.39. № 3. P.440-455.
32. Shagi-di Shih Asymptotic analysis of a singular perturbation problem [Text] / Shagi-di Shih, r. Bruce Кellogg // SIAM J. Math. Anal. Vol. 18, No. 5, (Sept 1987). – P. 1467-1511.

33. Shagi-di Shih Internal layers of parabolic singularly perturbed problems [Text] / Shagi-di Shih // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 87, No. 11 – 12, 831 – 844 (2007).
34. Sharma, K.K. A review on singularly perturbed differential equations with turning points and interior layers [Text] / K.K. Sharma, P. Rai, K. C. Patidar // Appl. Math. Comput. 219.22 (2013) 10575-10609.
35. Skinner L.A. Singular Perturbation Theory [Text] / L.A. Skinner // Springer, 2011.
36. Tarik Atay, M. SCEM Approach for singularly perturbed linear turning mid-point problems with an interior layer [Text] / M. Tarik Atay, C. Suleyman and E Aytekin // NTMSCI 4, No. 1, 115-124 (2016).
37. Temme N.M. Asymptotic methods for integrals [Text] / N.M. Temme // World Scientific, New Jersey, London, 2014. 628 p.
38. Tursunov, D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem [Text] / D.A. Tursunov // Lobachevskii J. Math. 38(3) (2017), 542-546.
39. Tursunov, D.A., Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer [Text] / D.A. Tursunov // Russian Mathematics 62(3) (2018), 60-67.
40. Valluri, S.R. Some applications of the Lambert W function to physics [Text] / S.R. Valluri, D.J. Jeffrey, R.M. Corless // Canadian J. Physics, 2000. Vol. 78. p. 823-831.
41. Verhulst, F. Methods and applications of singular perturbations.Boundary layers and multiple timescale dynamics [Text] / F. Verhulst // Springer,2005.
42. Zauderer, E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics [Text] / E. Zauderer // John Willey & Sons, INC., 1989.
43. Абдувалиев, А. О. Асимптотическое решение краевых задач для некоторых сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат . наук: 01.01.02 / А.О. Абдувалиев – Москва, МГУ, 1983.

44. Абдувалиев, А.О. Асимптотические представления решений некоторых сингулярно возмущенных задач [Текст] / А.О. Абдувалиев, Н.Х. Розов, В.Г. Сушко // ДАН СССР. – 1989. – Т. 304. – № 4. – С. 777-780.
45. Алымкулов, К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач [Текст] / К. Алымкулов. – Бишкек: Илим, 1992. – 108 с.
46. Алымкулов, К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла [Текст] / К. Алымкулов // Известия АН Кирг ССР. – 1981. – № 1. – С. 35-38.
47. Алымкулов, К. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / К. Алымкулов, Т.Д. Асылбеков, С.Ф. Долбеева // Матем. Заметки. – 2013. – Т. 94. - Вып. 4. – С. 484–487.
48. Алымкулов, К. Обобщенный метод погранфункций для эллиптического уравнения, случай внешнего касания особой характеристики с границей области [Текст] / К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: вторая межд. науч. конф., посвящ. 20-летию образования КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова. – Бишкек. – 2013. –Т. 1. – С. 92-97.
49. Алымкулов, К. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой [Текст] / К. Алымкулов, А.А. Халматов // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. - Вып. 6. – С. 819–824.
50. Бутузов, В.Ф. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений [Текст] /В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова // ЖВМиМФ. – 2013. –Т. 53. – № 9. – С. 1427–1447.
51. Бутузов, В.Ф. Угловой пограничный слой в нелинейных эллиптических задачах, содержащих производные первого порядка [Текст] /

В.Ф. Бутузов, И.В. Денисов // Моделирование и анализ информационных систем. – 2014. –Т. 21. – № 1. – С. 7–31.

52. Васильева, А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений [Текст] / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
53. Вишик, М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. – 1957. – Т. 12. – № 4. – С. 3-122.
54. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе [Текст] / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.
55. Иманалиев, М.И. Явление удаляющегося пограничного слоя в теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М.И. Иманалиев, П.С. Панков // Докл. РАН. – 1993. – Т.333. – № 5. – С. 575-577.
56. Касымов, К. А. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / К. А. Касымов, М. К. Дауылбаев // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 6. – С. 822–830.
57. Касымов, К.А. О краевых задачах с начальными скачками [Текст] / К. А. Касымов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21ю. № 10. – С. 1701–1706.
58. Кодингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.А. Кодингтон, Н. Левинсон. – М.: Ил, 1958.
59. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов. – Ош: Билим, 2019. – 154 с.
60. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2019. – Т. 29. – Вып 3. – С.1-9.

61. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика». – 2017. – Т. 21. – С. 108–121.
62. Кожобеков, К.Г. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, Д.А. Турсунов // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН. – М. – 2018. – Т. 156. – С. 84–88.
63. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенного неоднородного уравнения типа Эйри [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Турсунов Д.А. // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2017. – № 5. – С. 56–59.
64. Кожобеков, К.Г. Обобщенный метод пограничных функций для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Турсунов Д.А. // Известия КГТУ им. И. Раззакова. – 2016. – Т. 39. – № 1. – С. 13–16.
65. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 3 (42). – С. 3-6.
66. Кожобеков, К.Г. Об асимптотике решения задачи Рейса для явления прыжка [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник ЖАГУ. – 2019. – №2(41). – С. 3-6.
67. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с малым коэффициентом температуропроводности [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 4 (43). – С. 3-7.
68. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши на бесконечной прямой для уравнения теплопроводности [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ЖАГУ. – 2019. – № 4 (43). – С. 8-13.
69. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Робена с иррегулярной особенностью [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3

(43). – С. 19-23.
70. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения второй краевой задачи с иррегулярной особенностью [Текст] / К.Г. Кожобеков // Вестник ОшГУ. – 2019. – № 3 (43). – С. 14-19.
71. Кожобеков, К.Г. Прямой метод построения асимптотики решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Постулат. – 2019. – № 2(40). – С. 30.
72. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения уравнения бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Международный студенческий научный вестник. – 2019. – № 1. – С 104.
73. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2018. – № 1 (36). – С. 5-8.
74. Кожобеков, К.Г. Обобщенный метод пограничных функций для бисингулярной задачи на бесконечной прямой [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов, Д.А. Турсунов // Приволжский научный вестник. – 2016. – № 8 (60). – С. 8-12.
75. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения бисингулярной задачи на бесконечной прямой с квадратичной особенностью по времени [Текст] / К.Г. Кожобеков // Молодой ученый. – 2016. – № 18 (122). – С. 1-5.
76. Кожобеков, К.Г. Новый подход к построению асимптотики решения уравнения Бесселя для больших значений комплексного аргумента [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Сб. тезисов межд. конф «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры», посвящ. 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ. 16-19 окт.2019 г. Нур-Султан. – С. 75-76.
77. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Дирихле с иррегулярной особой точкой [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Борубаевские чтения. – 2018. – С. 14.

78. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения задачи Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», международная конференция, посвященная 70-летию профессора А. Керимбекова. г. Чолпон-Ата, 2017 г. – С. 56.
79. Кожобеков, К.Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота [Текст] / К.Г. Кожобеков, К. Алымкулов // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых Ташкент, Узбекистан, 15–17 декабря, 2017 год. – С. 123-124.
80. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости [Текст] / Дж. Коул. – М.: Мир, 1972. – 276 с.
81. Кузнецов, Д.С. Специальные функции [Текст] / Д.С. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1962. – 248 с.
82. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений [Текст] / С.А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
83. Нефедов, Н.Н. Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур [Текст] / Н.Н. Нефедов // Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6. – № 1. – С. 181-186.
84. Никифоров, А.Ф. Специальные функции математической физики [Текст] / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. – М.: Мир, 1974. – 344 с.
85. Ольвер, Ф. Асимптотика и специальные функции [Текст] / Ф. Ольвер. – М.: Наука, 1990.
86. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач [Текст]: – дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.С. Омуралиев – Бишкек, 2007. – 209 с.
87. Понтрягин, Л.С. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром [Текст] / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко // Тр. МИАН. – 1985. – Т. 169. – С. 99-188.

88. Розов, Н. Х. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной [Текст] / Н.Х. Розов, В.Г. Сушко, Д. И. Чудова // Фундамент. и прикл. матем. – 1998. – Т 4. - Вып. 3. – С. 1063–1095.
89. Полянин, А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д. Полянин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
90. Тихонов, А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. – 1948. – Т. 22 (64). – С. 193-204.
91. Тихонов, А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных [Текст] / А.Н. Тихонов // Математический сборник. – 1952. – Т. 31(73). – № 3. – С. 575-586.
92. Тихонов, А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
93. Треногин, В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика [Текст] / В.А. Треногин // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. - Вып. 4. – С. 123–156.
94. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений [Текст]: – дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Д.А. Турсунов – Ош, 2014. – 192 с.
95. Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.