Национальная академия наук Кыргызской Республики
Институт математики
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.19.598

На правах рукописи
УДК 517.9

Бугубаева Жумгалбүбү Тукеновна

Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2021

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева

Научный руководитель: **Каракеев Таалайбек Тултемирович,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий и программирования Кыргызского национального университета имени Ж. Баласагына

Официальные оппоненты: **Каденова Зууракан Ажимаматовна**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующая лабораторией теории обратных задач Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики

Токтосунов Мирбек Бердибекович, кандидат физико-математических наук, и.о. доцента Кыргызско-Турецкого университета «Манас».

Ведущая организация: кафедра информационных систем и программирования Ошского государственного университета, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.

Защита состоится 21 января 2022 г. в 14.00 ч. на заседании диссертационного совета Д 01.19.598 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – https://vc.vak.kg/b/d_0-rfx-t49-bvj

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265а и Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына, 720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547, а также на сайте Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики: www.math.kg.

Автореферат разослан 20 декабря 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н., доцент Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Интегральные уравнения Вольтерра широко применяются в задачах астрономии, биологии и экологии, электродинамики и механики. Возникают все новые области, в которых основные процессы модулируются интегральными уравнениями Вольтерра первого, второго и третьего рода.

Интегральные уравнения Вольтерра третьего рода возникают при исследовании широкого класса обратных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют важные приложения в математической биологии, теплофизике, теории упругости и влагопереноса.

В теории интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода одними из эффективных методами исследования являются методы регуляризации, основы которых были заложены в работах А. Н. Тихонова (1986), М. М. Лаврентьева (1980).

Условия разрешимости и методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра третьего рода исследованы в работах Л. И. Панова (1967), Я. Янно (1987), Н. А. Магницкого (1979), А. М. Нахушева (1974), P. T. Sato (1953), S. S. Allaei, Z. W. Yang, H. Brunner (2015), P. Grandits (2008), А. Асанова (1994), С. Искандарова (1998), К. Алымкулова (1992), А. Б. Байзакова (2017), К. Б. Бараталиева (2004), Т. Д. Омурова (2003), Т. Т. Каракеева (2003), М. В. Булатова (2002) и др. Методы численного решения изучены в работах P. Jami, E. Hashemizadeh (2021), Т. Т. Каракеева (2004).

Однако, следует отметить, интегральные уравнения Вольтерра третьего рода не исследованы полностью, методы их численного решения не развиты. Отсутствуют методы регуляризации и численного решения в случае, когда известная функция при искомой функции вне интеграла обращается в нуль во внутренних точках отрезка.

Настоящая диссертация посвящена исследованию вопросов регуляризации и единственности решений интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и систем таких уравнений в случае вырождения во внутренних точках отрезка известной функции при искомой функции вне интеграла. Изучается численный метод приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Исследование по теме диссертации проводилось в рамках утвержденной тематики “Приближенные методы решения интегральных уравнений” кафедры прикладной информатики КГУ имени И. Арабаева.

Цель и задачи исследования. Целью является исследование вопросов регуляризации и численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и их систем в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

Для достижения цели определены следующие **задачи:**

– изучение регуляризируемости линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– установление условий единственности решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– исследование регуляризируемости систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– численное решение линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

Научная новизна работы

– доказана регуляризируемость линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– установлены достаточные условия единственности решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– доказана сходимость регуляризированных решений систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода к точному решению в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– получено численное решение линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– составлен пакет программ на языке Delphi для реализации численного решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и проведен численный эксперимент.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть применены при регуляризации и численном решении нелокальных краевых задач и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. доказательство регуляризируемости линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на гладкую невозрастающую функцию;
2. установление условий регуляризируемости линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию;
3. доказательство сходимости регуляризированных решений линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода к точному решению, в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;
4. доказательство регуляризируемости систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;
5. доказательство сходимости численного решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода к точному решению в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредственном участии научного руководителя. Результаты исследований диссертации получены автором.

Апробации результатов исследований. Результаты исследований докладывались и обсуждались на:

– научно - практической конференции молодых ученых НАН КР «Старт в большую науку». Бишкек, 2013 г.;

– X mezinárodní vědecko - praktická Konference, Praha, 2013/2014;

– V Congress of the TURKIC WORLD MATHEMATICIANS, Kyrgyzstan, “Issyk-Kul Aurora”, 2014;

– научно - практической конференции «Наука XXI века: новый подход». Бишкек, 2014г.;

– 1st European-Middle Asian Conference on Computer Modelling, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, 2015;

– международной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию Института математики НАН КР, Бишкек, 2019г.;

– международной научной конференции «Проблемы современной математики и ее приложения», посвященной 70-летию академика А. А. Борубаева, Бишкек, 2021г.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях.

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных статьях [1]-[13], приведенных в списке опубликованных работ. Статья [5] входит в базу данных Scopus, статьи [6] - [13] входят в базу данных РИНЦ. В совместных работах постановка задач принадлежит научному руководителю, полученные основные результаты и оценки - соискателю. В [3, 5, 13] постановка задач принадлежит научному руководителю, доказательство утверждений в случае невозрастающей коэффициентной функции интегральных уравнений Вольтерра третьего рода - соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников из 72 наименований. Нумерация разделов – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер параграфа, третья – на порядковый номер в параграфе. Объем текста 150 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» приводится обзор известных результатов других авторов по интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода, а также обзор результатов исследований нелокальных краевых задач и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, которые имеют важные прикладные значения и могут быть приведены к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

Вторая глава «РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА» посвящена вопросам регуляризируемости и единственности решения в классе непрерывных функций линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на гладкую невозрастающую функцию и с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию; линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции (коэффициентной функции) при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

В § 2.1 рассматривается линейное уравнение

$$p(x)u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=g(x),\quad x\in[0,b],\qquad (1)$$

в предположении, что его решение принадлежит пространству $C[0,b]$ и при следующих условиях заданы функции $p(x)$, $g(x)$, $K(x,t)$:

а) $g(x)\in C\,[0,b],\ K(x,t)\in C(D),\ K(x,x)\geq 0,\ D=\{(x,t)/0\leq t\leq x\leq b\}$;

б) $p(x)\in C^1[0,b],\quad p(b)=0,\ p(x)>0,\ \forall x\in[0,b)$;

$p(x)$ - невозрастающая функция,

в) $G(x)\geq d_1, G(x)=C_0p^2(x)+\big(1+C_1g(x)\big)K(x,x),\ 0<C_0,C_1,d_1=const$;

г) $\theta_1 G(x)+p'(x)\geq 0,\quad 0<\theta_1<1.$

Преобразуем уравнение (1), действуя оператором $I+C_0J+C_1T$, где I - единичный оператор, J и T – операторы Вольтерра вида

$$(Jv)(x)=\int_0^x p(t)v(t)dt,\qquad (Tv)(x)=\int_0^x K(t,t)u(t)v(t)dt.$$

Тогда получим уравнение

$$p(x)u(x)+\int_0^x G(t)u(t)dt=\int_0^x L(x,t)u(t)dt+$$

$$+C_1\int_0^x p_0(t)u^2(t)dt+C_1\int_0^x u(t)dt\int_t^x K_0(s,t)u(s)ds+f(x),\quad x\in[0,b],\quad (2)$$

где $L(x,t)=K(t,t)-K(x,t)-C_0\int_t^x p(s)K(s,t)ds,\quad p_0(x)=p(x)K(x,x),$

$$K_0(x,t)=K(x,x)K(x,t),\qquad f(x)=g(x)+C_0\int_0^x p(t)g(t)dt.$$

Наряду с уравнением (2) рассматривается уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon+p(x)\big)u_\varepsilon(x)+\int_0^x G(t)\,u_\varepsilon(t)dt=\int_0^x L(x,t)\,u_\varepsilon(t)dt+C_1\int_0^x p_0(t)\,u_\varepsilon^2(t)dt+$$

$$+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,u_\varepsilon(s)ds+\varepsilon u(0)+f(x),\quad x\in[0,b],$$

которое с помощью резольвенты ядра $\Big(-G(t)/\big(\varepsilon+p(x)\big)\Big)$, представим в виде

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon + p(t)}\left\{\int_0^t [L(t,s)\, u_\varepsilon(s)ds - \right.$$

$$-\int_0^x L(x,s)u_\varepsilon(s)ds - C_1\int_t^x p_0(s)u_\varepsilon^2(s)ds + C_1\int_0^t u_\varepsilon(s)ds\int_s^t K_0(\nu,s)u_\varepsilon(\nu)d\nu -$$

$$\left.-C_1\int_0^x u_\varepsilon(s)ds\int_s^x K_0(\nu,s)\, u_\varepsilon(\nu)d\nu + f(t) - f(x)\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon + p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s)}{\varepsilon + p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t)\, u_\varepsilon(t)dt + C_1\int_0^x p_0(t)u_\varepsilon^2(t)dt + \right.$$

$$\left.+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\, u_\varepsilon(s)ds + \varepsilon u(0) + f(x)\right\}. \qquad (3)$$

Введем обозначение

$\Omega[0,b] = \{u(x) \in C[0,b]\colon |u(x) - u_0| \le r_0, \quad 0 < u_0,\ r_0 = const\}$;

$q = 2\big(L_k b d_1^{-1} + C_1 r(L_k b^2 + 2M_0)\big)\theta_2^{-2} + 2M_0\big((C_1 r + C_0 b) + L_k C_0 b^3\big) \times$
$\times\, (1 + \theta_2^{-1}) + \big(L_k b(C_1 br + (1 + C_0 P_1 b/2)d_1^{-1}) + C_0 P_1 b + 2C_1 r(P_1 + M_0)\big) \times$
$\times\, (\theta_2 e)^{-1}$, $0 < \theta_2 < 1$, $\qquad P_1 = \max_{x\in[0,b]}|p(x)|$,

$$M_0 = \max_{x\in[0,b]}\left|\int_0^x |K(t,t)|dt\right|, \qquad r = u_0, + r_0,$$

$0 < L_K -$ коэффициент Липшица ядра $K(x,t)$ по аргументу x.

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются условия *а) - в),* $q < 1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x) \in C[0,b]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C[0,b]} \le \Big(\big(3\varepsilon + 4d_3\varepsilon^{1-\beta}\big)\|u(x)\|_{C[0,b]} + d_4\omega_u\big(\varepsilon^\beta\big)\Big)/(1-q).$$

Следствие 2.1.1. При выполнении условий теоремы 2.1.1 решение уравнения (1) единственно в $\Omega[0,b]$.

Если $G(x) = C_0 p^2(x) + K(x,x) \ge d_1$, то положив $C_1 = 0$ в (2) и (3) получим оценку

$$|u_\varepsilon(x)| \le M_1\int_0^x |u_\varepsilon(t)|\, dt + \varepsilon|u(0)| + M_0, \qquad 0 <\ M_0, M_1 = const.$$

Из данной оценки следует регуляризируемость уравнения (1) при выполнении условий *а), б)* и единственность решения в пространстве $C[0,b]$.

В §2.2 рассматривается регуляризация для линейных интегральных уравнений Вольтерра (1) с оператором умножения на непрерывную неубывающую функцию, где для заданных функций $g(x)$, $K(x,t)$ выполняются условия *а)* и *в)* из § 2.1, а для известной функции $p(x)$ выполняется условие:

д) $p(x) \in C[0,b], \quad p(0) = g(0) = 0, \ p(x) > 0, \quad \forall x \in (0,b],$
$p(x)$ - неубывающая функция.

Установлены условия, при которых решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1) с выводом оценки

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C[0,b]} \le \left(4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x)\|_{C[0,b]} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\right)/(1-q),$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}|u(x) - u(t)|, \qquad 0 < \beta, \quad q < 1.$

В §2.3 исследуется метод регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка.

Пусть известные функции $p(x)$, $K(x,t)$, $g(x)$ подчиняются условиям: для функции $K(x,t)$ выполняется условие *а)* из §2.1 и

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in [0,b_1], \\ p_2(x), & x \in [b_1,b], \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in [0,b_1], \\ g_2(x), & x \in [b_1,b], \end{cases}$$

е) $g_1(x) \in C[0,b_1], \quad g_2(x) \in C[b_1,b], \ g_1(b_1) = g_2(b_1);$

ж) $p_1(x) \in C^1[0,b_1], p_1(b_1) = 0, \ p_1(x) > 0, \ \forall x \in [0,b_1),$
$p_2(b_1) = 0, \ p_2(x) > 0, \ \forall x \in (b_1,b],$
$p_1(x)$-невозрастающая функция, $\quad p_2(x)$ $-$ неубывающая функция;

з) $G_1(x) \ge d_1, \ G_2(x) \ge d_2, \quad G_1(x) = C_0 {p_1}^2(x) + \left(1 + C_1 g_1(x)\right)K(x,x),$
$G_2(x) = C_2 {p_2}^2(x) + \left(1 + C_3 g_2(x)\right)K(x,x), \ 0 < C_j, d_1 d_2 = const, j = 0..3.$

Пусть $x \in [0,b_1]$. Тогда из уравнения (1) получим

$$p_1(x)z(x) + \int_0^x K(x,t)z(t)dt = g_1(x), \quad x \in [0,b_1]. \tag{4}$$

Если $x \in [b_1,b]$, то уравнение (1) переходит к уравнению вида

$$p_2(x)y(x) + \int_{b_1}^x K(x,t)y(t)dt = g_2(x) - \int_0^{b_1} K(x,t)z(t)dt\,, x \in [b_1,b]. \tag{5}$$

Учитывая условие $g_1(b_1) = g_2(b_1)$ при $x = b_1$ из (5), получим $g_2(b_1) - \int_0^{b_1} K(b_1,t)y(t)dt = 0$. Допустим, что выполняется условие $z(b_1) = y(b_1)$.

На уравнение (4) действуем оператором $I + C_0 J + C_1 T$. Тогда получим уравнение

$$p_1(x)z(x)+\int_0^x G_1(t)z(t)dt=\int_0^x L(x,t)z(t)dt+C_1\int_0^x p_0(t)z^2(t)dt\ +$$

$$+C_1\int_0^x z(t)dt\int_t^x K_0(s,t)z(s)ds+F_1(x),\quad x\in[0,b_1],\qquad(6)$$

где $p_0(x)=p_1(x)K(x,x)$, $L(x,t)=K(t,t)-K(x,t)-C_0\int_t^x p_1(s)K(s,t)ds$,

$K_0(x,t)=K(t,t)K(x,t)$, $F_1(x)=g_1(x)+C_0\int_0^x p_1(t)g_1(t)dt$.

Преобразуем, аналогично, уравнение (5) и получим эквивалентное уравнение

$$p_2(x)y(x)+\int_{b_1}^x G_2(t)y(t)dt=\int_{b_1}^x L_2(x,t)y(t)dt+C_3\int_{b_1}^x p_4(t)y^2(t)dt+$$

$$+C_3\int_{b_1}^x y(t)dt\int_t^x K_0(s,t)y(s)ds+C_3\int_{b_1}^x B(t)y(t)dt+F_2(x),x\in[b_1,b],\quad(7)$$

$p_4(x)=p_2(x)K(x,x), L_2(x,t)=K(t,t)-K(x,t)-C_2\int_t^x p_2(s)K(s,t)ds$,
$F_2(x)=g_2(x)+C_2\int_{b_1}^x p_2(t)g_2(t)dt-\int_0^{b_1}K(x,t)z(t)dt-C_2\int_{b_1}^x\int_0^x p_2(t)\times$
$\times K(t,s)z(s)dsdt$, $K_0(x,t)=K(x,x)K(x,t)$, $B(x)=\int_0^{b_1}K_0(x,t)z(t)dt$.

Рассмотрим для (6) уравнение с малым параметром из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon+p_1(x)\big)z_\varepsilon(x)+\int_0^x G_1(t)\,z_\varepsilon(t)dt=\int_0^x L(x,t)\,z_\varepsilon(t)dt+C_1\int_0^x p_0(t)z_\varepsilon^2(t)dt\ +$$

$$+C_1\int_0^x z_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)z_\varepsilon(s)ds+\varepsilon z(0)+\ F_1(x),\quad x\in[0,b_1]\qquad(8)$$

и для (7) введем уравнение с малым параметром $\varepsilon\in(0,1)$ по следующему правилу

$$\big(\varepsilon+p_2(x)\big)y_\varepsilon(x)+\int_{b_1}^x G_2(t)y_\varepsilon(t)dt=\int_{b_1}^x L_2(x,t)y_\varepsilon(t)dt+C_3\int_{b_1}^x p_4(t)\,y_\varepsilon^2(t)dt+$$

$$+C_3\int_{b_1}^x y_\varepsilon(t)dt\int_t^x K_0(s,t)\,y_\varepsilon(s)ds+C_3\int_{b_1}^x B(t)y_\varepsilon(t)dt+\varepsilon y_\varepsilon(b_1)+F_2(x).\quad(9)$$

Для решения $u(x)$ уравнения (1), определяемого в данной постановке

$$u(x)=\begin{cases}z(x), & x\in[0,b_1],\\ y(x), & x\in[b_1,b],\qquad z(b_1)=y(b_1),\end{cases}\qquad(10)$$

где $z(x)$ - решение уравнения (4), $y(x)$ - решение уравнения (5), регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$ строится по правилу

$$u_\varepsilon(x)=\begin{cases} z_\varepsilon(x), & x\in[0,b_1],\\ y_\varepsilon(x), & x\in[b_1,b], \qquad z_\varepsilon(b_1)=y_\varepsilon(b_1), \end{cases} \tag{11}$$

здесь $z_\varepsilon(x)$ - решение уравнения (8), $y_\varepsilon(x)$ - решение уравнения (9).

Теорема 2.3.1. Пусть выполняются условия *в), е) - з)*, $q=max(q_1,q_2)<1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x)\in C[0,b]$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$, определенное по правилу (11) равномерно сходится к решению уравнения (1) - функции $u(x)$, определяемой согласно (10).

Постоянные q_1, q_2 - вычисляются через известные функции.

Следствие 2.3.1. При выполнении условий теоремы 2.3.1 решение уравнения (1) единственно в $\Omega[0,b]$.

Пример 2.3.1. Пусть известные функции заданы следующим образом:

$p_1(x)=\frac{1}{3}cos\pi x, x\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right], p_2(x)=(4x^2-1)^2, x\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right], p_1\left(\frac{1}{2}\right)=p_2\left(\frac{1}{2}\right)=0;$

$g_1(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}+x^2\right)cos\pi x+\frac{15x}{4}-\frac{147x^2}{80}+\frac{5x^3}{3}-\frac{149x^4}{120}, \qquad x\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right];$

$g_2(x)=(4x^2-1)^2 sin\pi x+\frac{5(x-1)}{\pi}cos\pi x-\frac{51}{10\pi^2}sin\pi x+\frac{51}{10\pi^2}+\frac{x}{24}+\frac{2929}{1920},$

$x\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right],\ g_1\left(\frac{1}{2}\right)=g_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2969}{1920};\ K(x,t)=\frac{x-t}{10}+5(1-t),\quad 0\le t\le x\le 1.$

Если $x\in\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$, то $z(x)=\frac{3}{4}+x^2$ точное решение уравнения;

при $C_0=0.1, C_1=0.004$ имеем $q_1=0.942$,

$G_1(x)=0{,}1\left(\frac{1}{3}cos\pi x\right)^2+5(1-x)\big(1+0{,}004g_1(x)\big)\ge d_1=2.515.$

При $x\in[\frac{1}{2};\ 1]$ точное решение уравнения $y(x)=sin\pi x$.

Если $C_2=0.02,\quad C_3=0.008$, то $q_2=0.997$,

$G_2(x)=0.02(4x^2-1)^4+5\big(1+0.008g_2(x)\big)(1-x)\ge d_2=1.026$

В §2.4 рассматривается регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка

$$p(x)u(x)+\int_0^x N_0\big(x,t,u(t)\big)dt\ =g(x), \tag{12}$$

где $N_0\big(x,t,u(t)\big)=K(x,t)u(t)+N\big(x,t,u(t)\big)$.

Для известных функций $p(x),\ K(x,t),\ g(x)$ требуется выполнение условий *а) - г)* (см. §2.3), для заданной функции $N\big(x,t,u(t)\big)$ выполняется условие:

д) $N(x,t,u)\in C(D_2),\quad D_2=D\times R^1,\ D=\{x,t/0\le t\le x\le b\},$

$|N(x,s,u)-N(x,s,\omega)-N(t,s,u)+N(t,s,\omega)|\le L_N(x-t)|u-\omega|,$

$N(x,x,u)=0,\quad 0<L_N=const.$

Обобщены результаты предыдущего параграфа на нелинейный случай уравнения. Показано применимость регуляризации, рассматриваемой в § 2.3 для нелинейного уравнения (12). Доказана теорема о равномерной сходимости регуляризованного решения к точному решению, установлены условия единственности решения в $\Omega[0,b]$.

В третьей главе «РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА» исследуются системы интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на гладкую невозрастающую функцию и с оператором умножения на неубывающую функцию.

Установлены достаточные условия регуляризируемости и единственности решения систем интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в классе непрерывных функций в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка.

В §3.1 рассматривается регуляризация системы линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=g(x),\quad x\in[0,b]. \tag{13}$$

3.1.1. Предполагается, что искомая вектор - функция $u(x)\in C_n[0,b]$, а для заданных вектор - функции $g(x)$, $n\times n$ - матричной функции $K(x,t)$ и скалярной функции $p(x)$ выполняются условия:

А) $g(x)\in C_n[0,b],\quad g(x)=colon\big(g_1(x),\dots,g_n(x)\big)$;

Б) $K_{i,j}(x,t)\in C(D),\quad D=\{(x,t)/\ 0\le t\le x\le b\},\ i,j=\overline{1,n}$;

В) $p(x)\in C^2[0,b],\ p^{(i)}(b)=0,\quad i=0,1,\quad p(x)>0,\forall x\in[0,b)$, $p(x)$- невозрастающая скалярная функция;

Г) $G(x)-\ n\times n-$ матричная функция,

$$G_{ij}(x)=\begin{cases}K_{i,j}(x,x), & j\ne i,\\ C_0p^2(x)+\big(1+C_1g_i(x)\big)K_{i,i}(x,x), & i=j,\quad i,j=\overline{1,n};\end{cases}$$

$\|G(x)\|\le C_4\lambda(x),\quad \lambda(x)\ge d_1$,

$\theta_1\lambda(x)+C_0p(x)\ge 0,\ 0<\theta_1<1,\ 0<d_1, C_j=const,\ j=0,1,2$;

$\lambda(x)=\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)(i=\overline{1,n})$–собственные значения матрицы $[G(x)+G^*(x)]/2$, $G^*(x)$ – матрица, сопряженная к матрице $G(x)$.

На систему (13) действуем оператором $I+C_0J+C_1T$. Тогда получим

$$p(x)u(x)+\int_0^x G(t)u(t)dt=\int_0^x L(x,t)u(t)dt+$$

$$+C_1\int_0^x P_0(t)u^2(t)dt+C_1\int_0^x\int_t^x (Bu)(s,t)u(t)dsdt+F_1(x), x\in[0,b], \tag{14}$$

$u^2(x)=colon[u_1^2(x),\dots,u_n^2(x)], P_0(x)=p(x)diag\big(K_{11}(x,x),\dots,K_{nn}(x,x)\big)$,

$F_1(x) = g(x) + C_0 \int_0^x p(t)g(t)dt, \quad (Bu)(x,t) = \left(K_{ii}(x,x)K_{ij}(x,t)u_i(x)\right),$
$i,j = \overline{1,n}, \qquad L(x,t) = K(t,t) - K(x,t) - C_0 \int_t^x p(s)K(s,t)ds.$

Рассмотрим систему уравнений с малым параметром $\varepsilon \in (0,1)$

$$\left(\varepsilon + p(x)\right)u_\varepsilon(x) + \int_0^x G(t)u_\varepsilon(t)dt = \int_0^x L(x,t)u_\varepsilon(t)dt + C_1 \int_0^x P_0(t) \times$$

$$\times u_\varepsilon^2(t)dt + C_1 \int_0^x \int_t^x (Bu_\varepsilon)(s,t)u_\varepsilon(t)dsdt + \varepsilon u(0) + F_1(x), x \in [0,b]. \qquad (15)$$

Теорема 3.1.1. Пусть выполняются условия *А) - Г),* $q < 1$ и система уравнений (13) имеет решение $u(x) \in C_n[0,b]$. Тогда решение системы (15) равномерно сходится к решению системы (13). При этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x) - u(x)\|_{C_n[0,b]} \le N_3 \left(\left(N_1\varepsilon + N_2\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x)\|_{C_n[0,b]} + d_2 C_4 \sqrt{n}\,\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

где $N_1 = (2 + M_1)\sqrt{n}$, $N_2 = 2N_1C_4/(\theta_2^2 d_1 e), d_2 = 1 + \theta_2^{-1}, \theta_2 = 1 - \theta_1$,
$\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right) = \sup\limits_{|x-t| \le \varepsilon^\beta} \|u(x) - u(t)\|_{C_n[0,b]}$, $1/2 \le \beta < 1$, $M_1 = \max\limits_{[0,1]} |p''(x)|$,
$0 < N_3 = const.$

Следствие 3.1.1. Если выполняются условия теоремы 3.1.1, то решение системы уравнений (13) единственно в $\Omega_n[0,b]$.

В пункте 3.1.2 данного параграфа, при сохранении условий *А), Б), Г)* и выполнении условия:

Д) $p(x) \in C[0,b]$, $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $\forall x \in (0,b]$, $p(x)$- скалярная неубывающая функция,

доказана равномерная сходимость решения системы уравнений (15) к решению системы уравнения (13).

В § 3.2 рассматриваются системы линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка.

Пусть заданные вектор - функция $g(x)$, $n \times n$ - матричная функция $K(x,t)$ и скалярная функция $p(x)$ подчиняются условиям:

Е) $g(x) = \begin{cases} \mu(x), & x \in [0,b_1], \\ \varphi(x), & x \in [b_1,b], \end{cases}$ $\mu(b_1) = \varphi(b_1)$,

$\mu(x) \in C_n[0,b_1], \varphi(x) \in C_n[b_1,b]$;

Ж) $p(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in [0,b_1], \\ p_2(x), & x \in [b_1,b], \end{cases}$ $p_1(x) \in C^1[0,b_1]$, $p_2(x) \in C[b_1,b]$,

$p_1{}^{(i)}(b_1) = 0, i = 0,1, p_1(x) > 0$, $\forall x \in [0,b_1)$,

$p_2(x) > 0$, $\forall x \in (b_1,b]$, $p_2(b_1) = 0$,

$p_1(x)$ - скалярная невозрастающая функция,

$p_2(x)$ - скалярная неубывающая функция;

3) $G(x) - n\times n -$ матричная функция, $G(x) = \begin{cases} G_1(x), & x \in [0, b_1], \\ G_2(x), & x \in [b_1, b], \end{cases}$

$$G_{ij}^{(1)}(x) = \begin{cases} K_{i,j}(x,x), & j \neq i, \\ C_0 p_1^2(x) + \big(I_n + C_1 \mu_i(x)\big) K_{i,i}(x,x), & i = j, \quad i,j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$\|G_1(x)\| \le C_4 \lambda(x)$, $\lambda(x) \ge d_1$, $0 < d_1$, C_0, C_1, $C_4 = const$,

$\lambda(x) = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы $[G_1(x) + {G_1}^*(x)]/2$, ${G_1}^*(x)$ - сопряженная матрица к матрице $G_1(x)$,

$$G_{ij}^{(2)}(x) = \begin{cases} K_{i,j}(x,x), & j \neq i, \\ C_2 p_2^2(x) + \big(I_n + C_3 g_i(x)\big) K_{i,i}(x,x), & i = j, \quad i,j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$\|G_2(x)\| \le C_5 \lambda_0(x)$, $\lambda_0(x) \ge d_2$, $0 < d_2, C_5 = const$,

$\lambda_0(x) = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_{0i}(x)$, ${\lambda_0}_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ - собственные значения матрицы $[G_2(x) + {G_2}^*(x)]/2$, ${G_2}^*(x)$ - сопряженная матрица к матрице $G_2(x)$.

Пусть $x \in [0, b_1]$. Тогда из системы уравнений (13) получим

$$p_1(x) z(x) + \int_0^x K(x,t) z(t) dt = \mu(x), \quad x \in [0, b_1]. \tag{16}$$

Регуляризованная система для (16) имеет вид

$$\big(\varepsilon + p_1(x)\big) z_\varepsilon(x) + \int_0^x G_1(t)\, z_\varepsilon(t) dt = \int_0^x L_1(x,t)\, z_\varepsilon(t) dt \; +$$
$$+ C_1 \int_0^x Q_1(t) z_\varepsilon^2(t) dt + C_1 \int_0^x \int_t^x (B_1 z_\varepsilon)(s,t) z_\varepsilon(t) ds dt + \varepsilon z(0) + F_1(x), \tag{17}$$

где $L_1(x,t) = K(t,t) - K(x,t) - C_0 \int_t^x p_1(s) K(s,t) ds$, $Q_1(x) = p_1(x) \times \times\, diag\big(K_{ii}(x,x)\big)$, $(Bz)(x,t) = \big(K_{ii}(x,x) K_{ij}(x,t) z_i(x)\big)$, $i,j = \overline{1,n}$, $z^2(x) = colon[z_1^2(x),\ z_2^2(x), \dots, z_n^2(x)]$, $F_1(x) = \mu(x) + C_0 \int_0^x p_1(t) \mu(t) dt$.

Пусть теперь $x \in [b_1, b]$. Тогда система (13) переходит к системе уравнений

$$p_2(x) y(x) + \int_{b_1}^x K(x,t) y(t) dt = \varphi(x) - \int_0^{b_1} K(x,t) z(t) dt, x \in [b_1, b]. \tag{18}$$

Для (18) введем систему уравнений с малым параметром $\varepsilon \in (0,1)$

$$\big(\varepsilon + p_2(x)\big) y_\varepsilon(x) + \int_{b_1}^x G_2(t) y_\varepsilon(t) dt = \int_{b_1}^x L_2(x,t) y_\varepsilon(t) dt + C_3 \int_{b_1}^x Q_2(t)\, y_\varepsilon^2(t) dt \; +$$
$$+ C_3 \int_{b_1}^x \int_{b_1}^x (B_2 y_\varepsilon)(s,t)\, y_\varepsilon(t) ds dt + C_3 \int_{b_1}^x B_0(t) y_\varepsilon(t) dt + \varepsilon y_\varepsilon(b_1) + F_2(x), \tag{19}$$

где $Q_2(x) = C_3 p_2(x) \Big(diag\big(K_{ii}(x,x)\big)\Big)$, $K_0(x,t) = \Big(K_{ii}(x,x) K_{ij}(x,t)\Big)$, $(B_2 y)(x,t) = \big(K_{ii}(x,x) K_{ij}(x,t) y_i(x)\big), i,j = \overline{1,n}, B_3(x) = \int_0^{b_1} K_0(x,t) z(t) dt,$

$F_2(x) = \varphi(x) + C_2 \int_{b_1}^{x} p_2(t)\varphi(t)dt - \int_0^{b_1} K(x,t)z(t)dt - C_2 \int_{b_1}^{x}\int_0^{b_1} p_2(t) \times$
$\times K(t,s)z(s)dsdt.$

Решение $u(x)$ системы уравнений (13), определяется по правилу:

$$u(x) = \begin{cases} z(x), & x \in [0, b_1], \\ y(x), & x \in [b_1, b], \quad z(b_1) = y(b_1), \end{cases} \tag{20}$$

где $z(x)$ - решение системы уравнений (16), $y(x)$ – решение системы уравнений (18).

Регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$ строится по правилу

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} z_\varepsilon(x), & x \in [0, b_1], \\ y_\varepsilon(x), & x \in [b_1, b], \quad z_\varepsilon(b_1) = y_\varepsilon(b_1), \end{cases} \tag{21}$$

$z_\varepsilon(x)$- решение системы уравнений (17), $y_\varepsilon(x)$- решение системы (19).

При выполнении наложенных условий доказана равномерная сходимость, при $\varepsilon \to 0$, регуляризованного решения $u_\varepsilon(x)$, определенное по правилу (21) к решению $u(x)$ системы уравнения (20).

Следствие 3.2.1. При выполнении условий теоремы 3.2.1 решение системы уравнений (13) единственно в $\Omega_n[0,b]$.

В §3.3 рассматриваются системы уравнений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода (15), в которой коэффициентная функция вырождается во внутренних точках отрезка.

Построен регуляризирующий оператор, доказана теорема о равномерной сходимости при $\varepsilon \to 0$, регуляризованного решения системы $u_\varepsilon(x)$ к решению исходной системы уравнений.

В четвертой главе «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА» изучаются вопросы численного решения рассматриваемых линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

В §4.1 рассматривается численное решение функций. Для построения численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода (1) с коэффициентной невозрастающей функцией, рассмотрим регуляризованное уравнение (3), при условий *а) - г)* из § 2.1.

Пусть n - натуральное число, $\omega_h^{(1)}$ - равномерная сетка на отрезке $[0,b]$

$$\omega_h^{(1)} = \{x_i = ih, \quad i = 0..n, \quad b = nh\},$$

C_h - пространство сеточных функций $u_i = u(x_i)$ с нормой $\|u_i\|_{C_h} = \max_{0 \le i \le n} |u_i|$.

Положим $x = x_i$, $i = 1..n$ в (3) и применим квадратурную формулу правых прямоугольников для интегралов в уравнении (3). Тогда получим следующую систему алгебраических уравнений

$$u_{\varepsilon,i}=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i-1}exp\left(-h\sum_{k=j+1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left\{h\sum_{k=1}^{j}L_{j,k}u_{\varepsilon,k}-h\sum_{k=1}^{i}L_{i,k}u_{\varepsilon,k}-\right.$$

$$-C_1h\sum_{k=j+1}^{i}K_{k,k}p_ku_{\varepsilon,k}^2-C_1h\sum_{k=1}^{j}u_{\varepsilon,k}\,h\sum_{m=k+1}^{j}K_{m,m}\,K_{m,k}u_{\varepsilon,m}-C_1h\sum_{k=1}^{i}u_{\varepsilon,k}\times$$

$$\times h\textstyle\sum_{m=k+1}^{i}K_{m,m}\,K_{m,k}u_{\varepsilon,m}+f_j-f_i\Big\}+\frac{1}{\varepsilon+p_0}exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k+p_k'}{\varepsilon+p_k}\right)\Big\{h\sum_{j=1}^{i}L_{i,j}u_{\varepsilon,j}+$$

$$\left.+C_1h\sum_{j=1}^{i}K_{j,j}p_ju_{\varepsilon,j}^2+C_1h\sum_{j=1}^{i}u_{\varepsilon,j}h\sum_{k=j+1}^{i}K_{k,k}K_{k,j}u_{\varepsilon,k}+\varepsilon u_0+f_i\right\},\ \ i=1..n,\ (22)$$

$u_0=f_0/p_0$, $u_{\varepsilon,i}=u_\varepsilon(x_i)$, $p_i=p(x_i)$, $K_{ij}=K(x_i,x_j)$, $G_i=G(x_i)$,
$L_{i,j}=K(x_j,x_j)-K(x_i,x_j)-C_0h\sum_{k=j+1}^{i}K(x_k,x_j)p(x_k)$, $f_i=f(x_i)$,
$f(x_i)=g(x_i)+C_0h\sum_{j=1}^{i}p(x_j)g(x_j)$, $x_j=jh$, $j=1..i$, $i=1..n$.

Теорема 4.1.1. Если выполняются условия *а) - г)*, $q<1$ и $\varepsilon=O(h^\alpha)$ для всех $0<\alpha<1/2$, то решение уравнения (22) при $h\to 0$ равномерно сходится к u_i - точному решению уравнения (1), причем

$$\|u_{\varepsilon,i}-u_i\|\le(N_1h^\alpha+N_2h^{1-\alpha}+N_3h)/(1-q),$$
$$0<N_i=const,\ \ i=1,2,3,$$

где $q_1=b(L_k+C_0M+C_1Mr)(T_0d_2d_1^{-1}h^{1-\alpha}+bp_0^{-1})$.

В §4.2 рассматриваются численные решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода (1) в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка в постановке задачи §2.3.

Численное решение уравнения (1) строится по методу

$$z_{\varepsilon,i}=h\{K_{i,i}p_iz_{\varepsilon,i}^2+K_\varepsilon[z_{\varepsilon,i-1}]z_{\varepsilon,i}\}E_{\varepsilon,i}+F_\varepsilon[z_{\varepsilon,i-1}],\quad z_0=g_1(0)/p_1(0),\qquad (23)$$

$x_i\in\omega_h^{(1)}=\{x_i=ih,\ \ i=0..n,\ \ b_1=nh\}$, n - натуральное число,

$$y_{\varepsilon,i}=h\{K_{i,i}p_iy_{\varepsilon,i}^2+(hB_i+K_\varepsilon[y_{\varepsilon,i-1}])y_{\varepsilon,i}\}E_{\varepsilon,i}[q_i]+\Pi_\varepsilon[y_{\varepsilon,i-1}],y_{\varepsilon,0}=z_{\varepsilon,n},\ (24)$$

где $x_i\in\omega_h^{(2)}=\{x_i=b_1+ih,i=0..n_0,b-b_1=n_0h\}$, n_0–натуральное,

$E_{\varepsilon,i}[p_i]=\frac{C_1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i-1}exp\left(-h\sum_{k=j+1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}+\frac{C_1}{\varepsilon+p_0}exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k+p_k'}{\varepsilon+p_k}\right)$,

$F_\varepsilon[z_{\varepsilon,i-1}]=\frac{h}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}exp\left(-h\sum_{k=j+1}^{i}\frac{G_k}{\varepsilon+p_k}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\{h\sum_{k=1}^{j-1}[L_{i,k}-L_{j,k}]z_{\varepsilon,k}+$
$+h\sum_{k=j+1}^{i-1}L_{i,k}z_{\varepsilon,k}+C_1h\sum_{k=j+1}^{i-1}K_{k,k}p_kz_{\varepsilon,k}^2+C_1h\sum_{k=1}^{j-1}z_{\varepsilon,k}\,h\sum_{m=j+1}^{i-1}K_{m,m}\times$
$\times K_{m,k}z_{\varepsilon,m}+C_1h\sum_{k=j+1}^{i-1}z_{\varepsilon,k}\,h\sum_{m=k+1}^{i-1}K_{m,m}K_{m,k}z_{\varepsilon,m}+F_i-F_j\}+\frac{1}{\varepsilon+p_0}\times$
$\times exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k+p_k'}{\varepsilon+p_k}\right)\{h\sum_{j=1}^{i-1}L_{i,j}z_{\varepsilon,j}+C_1h\sum_{j=1}^{i-1}K_{j,j}p_jz_{\varepsilon,j}^2+$
$\times exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{G_k+p_k'}{\varepsilon+p_k}\right)\{h\sum_{j=1}^{i-1}L_{i,j}z_{\varepsilon,j}+C_1h\sum_{j=1}^{i-1}K_{j,j}p_jz_{\varepsilon,j}^2+C_1h\sum_{j=1}^{i-1}z_{\varepsilon,j}\,h\times$

$\times \sum_{k=j+1}^{i-1} K_{k,k} K_{k,j} z_{\varepsilon,k} + \varepsilon z_0 + F_i\}, K_\varepsilon[z_{\varepsilon,i-1}] = h\sum_{k=1}^{i-1} K_{i,i} K_{i,k} z_{\varepsilon,k}, p_i = p_1(x_i),$

$\Pi_\varepsilon[y_{\varepsilon,i-1}] = \frac{h}{\varepsilon+q_i}\sum_{j=1}^{i-1} exp\left(-h\sum_{k=j+1}^{i}\frac{W_k}{\varepsilon+q_k}\right)\frac{W_j}{\varepsilon+q_j}\{h\sum_{k=1}^{j-1}[L_{i,k}-L_{j,k}]y_{\varepsilon,k} +$

$+h\sum_{k=j+1}^{i-1} L_{i,k} y_{\varepsilon,k} + C_3 h\sum_{k=j+1}^{i-1} K_{k,k} q_k y_{\varepsilon,k}^2 + C_3 h\sum_{k=1}^{j-1} y_{\varepsilon,k}\, h\sum_{m=j+1}^{i-1} K_{m,m} \times$

$\times K_{m,k} y_{\varepsilon,m} + C_3 h\sum_{k=j+1}^{i-1} y_{\varepsilon,k}\, h\sum_{m=k+1}^{i-1} K_{m,m} K_{m,k} y_{\varepsilon,m} + C_3 h\sum_{k=j+1}^{i-1} B_k y_{\varepsilon,k} +$

$+F_i - F_j\} + \frac{1}{\varepsilon+q_i} exp\left(-h\sum_{k=1}^{i}\frac{W_k}{\varepsilon+q_k}\right)\{h\sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} y_{\varepsilon,j} + C_3 h\sum_{j=1}^{i-1} K_{j,j} q_j y_{\varepsilon,j}^2 +$

$+C_3 h\sum_{j=1}^{i-1} y_{\varepsilon,j}\, h\sum_{k=j+1}^{i-1} K_{k,k} K_{k,j} y_{\varepsilon,k} + C_3 h\sum_{j=1}^{i-1} B_j\, y_{\varepsilon,j} + \varepsilon y_0 + F_i\}, \quad q_i = p_2(x_i),$

$B_k = h\sum_{\sigma=1}^{n} K_{k,k} K_{k,\sigma} z_{\varepsilon,\sigma}, \qquad W_i = G_2(x_i)$

$F_i = F_2(x_i) = g_2(x_i) + C_2 h\sum_{j=1}^{i} p_2(x_j) g_2(x_j) - h\sum_{\sigma=1}^{n} K(x_i, x_\sigma) z(x_\sigma)$

$-C_2 h\sum_{j=1}^{n} h\sum_{\sigma=1}^{n} p_2(x_j) K(x_j, x_\sigma) z(x_\sigma).$

Численное решение $u_{\varepsilon,i}$ уравнения (1) строится по правилу

$$u_{\varepsilon,i} = \begin{cases} z_{\varepsilon,i}, & x_i \in \omega_h^{(1)}, \\ y_{\varepsilon,i}, & x_i \in \omega_h^{(2)}, \end{cases} \qquad z_{\varepsilon,n} = y_{\varepsilon,0}, \tag{25}$$

$z_{\varepsilon,i}$ - решение уравнения (23), $y_{\varepsilon,i}$ - решение уравнения (24).

Теорема 4.2.1. Пусть выполняются условия *а), е) - з)* (из § 2.1 и 2.3), и $\varepsilon = O(h^\alpha)$ для всех $0 < \alpha < 1/2$, $q = max(q_1, q_2) < 1$. Тогда, при $\varepsilon \to 0$, решение $u_{\varepsilon,i}$, определенное по правилу (25) равномерно сходится к решению уравнения (1) – функции $u(x_i)$.

Величины q_1, q_2 определяются как в § 2.3 (см. теорему 2.3.1).

С помощью разработанной программы на языке программирования Delphi получены численные данные реализации вычислений по методам (23) и (24) для примера 2.3.1. Результаты вычислений подтверждают теоретические выводы.

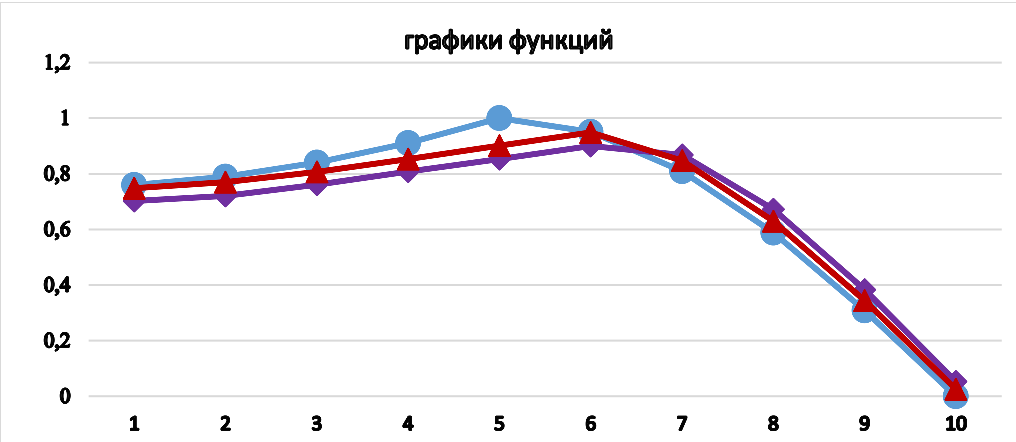

Рис.1. ●– точное решение; приближенные решения: ♦– при *h=0,1*, ▲–при *h=0.01*.

На рис.1 приведены значения точного решения примера 2.2.1 и приближенных решений, полученных алгоритмами (23) и (24). Расчеты показывают, что при шаге *h*=0.1 погрешность не превосходит *R*=0.14698429, при *h*=0.01 *R*=0.05918113.

В §4.3 получено численное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода (12) в постановке задачи §2.4.

Доказана сходимость предложенного численного решения к точному решению уравнения (12), рассмотрен частный случай метода, для которого построен тестовый пример и получены численные данные с помощью разработанной программы на языке Delphi.

ВЫВОДЫ

В рамках постановки задачи доказана регуляризируемость интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на невозрастающую (неубывающую) функцию в пространстве непрерывных функций. Установлены достаточные условия единственности решения линейных и нелинейных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций.

Получены численные методы для приближенного решения линейных и нелинейных уравнений Вольтерра третьего рода. Проведены численные эксперименты, которые показали, что построенные численные решения являются устойчивыми, эффективно реализуемыми.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертационной работы носят теоретический характер и могут быть применены при регуляризации и численном решении нелокальных краевых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, а также при чтении специальных курсов в вузах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Бугубаева, Ж. Т. Эквивалентные преобразования и регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Вестн. КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2012. – С. 29-33.
2. Бугубаева, Ж. Т. Регуляризация нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Ж. Т. Бугубаева // Вестн. КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек, 2013. – Вып. 4. – С. 13-20.
3. Бугубаева, Ж. Т. Приближенные методы решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова, Ж. Т. Бугубаева // Материалы междунар. науч.-практ. конф. «Наука и образование». – Прага, 2014. – С. 6-10.
4. Бугубаева, Ж. Т. Об одном методе регуляризации системы линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев,

Ж. Т. Бугубаева // Вестн. Евраз. нац. ун-т (ЕНУ) им. Л. Н. Гумилева. – Астана, 2014. – Вып. 4. – С. 51-56.
5. Bugubaeva, Zh. T. Numerical Solution of Volterra Linear Integral Equation of the Third Kind [Текст] / T. T. Karakeev, D. K. Rustamova, Zh. T. Bugubaeva // Advances in Intelligent Systems and Computing / Intelligent Systems for Computer Modelling / Proceedings of the 1st European-Middle Asisan Conference on Computer Modelling 2015 / Springer, Vol. 423, 2016. - Warsaw, Poland 2016. - P. 111-119.
6. Бугубаева, Ж. Т. Метод конечных сумм для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Наука, техника и образование. – М., 2016. – Вып. 1 (19). – С. 6-10.
7. Бугубаева, Ж. Т. Регуляризация системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Проблемы современной науки и образования. – М., 2016. – Вып. 3 (45). – С. 1-15.
8. Бугубаева, Ж. Т. Метод конечных сумм для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Науч. журн. – М., 2016. – № 3 (4). – С. 9-14.
9. Бугубаева, Ж. Т. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра с невозрастающей функцией [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, - Бишкек, 2020, № 2, – С. 3-10.
10. Бугубаева, Ж. Т. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с оператором умножения на неубывающую функцию [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA, 2020. – Issue 21. – P. 39-44.
11. Бугубаева, Ж. Т. О сходимости метода конечных сумм для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Ж. Т. Бугубаева // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA, 2020. – Issue 21. – P. 33-38.
12. Бугубаева, Ж. Т. Решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка [Текст] / Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Науч. исслед. в Кырг. Респ. (ВАК Кырг. Респ.). – Бишкек, 2020. – № 4. – С. 67-78.
13. Бугубаева, Ж. Т. Регуляризация системы линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д.К. Рустамова, Ж. Т. Бугубаева // Journal of Advanced Research in Technical Science. – Seattle, USA, 2021. – Issue 23. – P. 30-37.

Бугубаева Жумгалбүбү Тукеновнанын 01.01.02 – дифференциалдык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн “Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелерин жакындаштырып чыгаруу” деген темадагы диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: Вольтерранын интегралдык тендемеси, чыгарылыштын жалгыздыгы, бир калыпта жыйналуучулук, регуляризация методу, сандык чыгаруу, квадратуралык формула, кичине параметр.

Изилдөөнүн объектиси: Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелери жана алардын системалары изилденет.

Изилдөөнүн предмети. Интегралдын сыртындагы изделүүчү функциянын алдындагы белгилүү функция кесиндинин ички чекиттеринде нөлгө айланган учурунда Вольтерранын үчүнчү түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык тендемелери жана алардын системалары.

Изилдөөнүн максаты: Интегралдын сыртындагы изделүүчү функциянын алдындагы белгилүү функция кесиндинин ички чекиттеринде нөлгө айланган учурунда Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелерин регулярдаштыруу жана сандык чыгаруу.

Изилдөөнүн усулдары. Регулярдаштыруу, подобласттар методдору, удаалаш жакындаштыруу жана квадратуралык формула эсептелет.

Иштин илимий жаңылыгы:

– интегралдын сыртындагы изделүүчү функциянын алдындагы белгилүү функция кесиндинин ички чекиттеринде нөлгө айланган учурунда Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелеринин жана алардын системаларынын регулярдаштырылуусу далилденди;

– интегралдын сыртындагы изделүүчү функциянын алдындагы белгилүү функция кесиндинин ички чекиттеринде нөлгө айланган учурунда Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелеринин чыгарылышынын жалгыздыгын камсыздаган шарттар белгиленди;

– Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык тендемелеринин сандык чыгарылышы алынды, сандык чыгарууну ишке ашыруу үчүн Delphi тилинде программалардын пакети түзүлдү жана сандык эксперимент жүргүзүлдү.

Колдонуу боюнча сунуштар. Алынган жыйынтыктарды интегралдын сыртындагы изделүүчү функциянын алдындагы белгилүү функция кесиндинин ички чекиттеринде нөлгө айланган учурунда Вольтерранын үчүнчү түрдөгү көп өлчөмдүү интегралдык тендемелерин регулярдаштыруу жана сандык чыгаруу үчүн колдонууга болот.

Колдонуу аймагы. Локалдык эмес четтик маселелер жана жекече туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн тескери маселелер теориясы.

РЕЗЮМЕ

диссертации Бугубаевой Жумгалбүбү Тукеновны на тему «Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра, единственность, равномерная сходимость, регуляризация, квадратурная формула, малый параметр.

Объект исследования: Интегральные уравнения Вольтерра третьего рода и их системы.

Предмет исследования. Интегральные уравнения Вольтерра третьего рода и их системы в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

Цель работы: исследование вопросов регуляризации и численного решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

Методы исследования: методы регуляризации, методы подобластей, последовательных приближений и метод квадратурных формул.

Полученные результаты и их новизна:

– доказана регуляризируемость интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и их систем в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка;

– установлены достаточные условия единственности решения интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних отрезка;

– получено численное решение интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка; составлен пакет программ на языке Delphi для реализации численного решения и проведен численный эксперимент.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты могут применяться для регуляризации и численного решения многомерных интегральных уравнений Вольтерра третьего в случае вырождения известной функции при искомой функции вне интеграла во внутренних точках отрезка.

Область применения. Теория интегральных уравнений Вольтерра, теория нелокальных краевых задач и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

SUMMARY

on the dissertation on the "Approximate solution of Volterra integral equations of the third kind" by Bugubaeva Zhumgalbubu Tukenovna submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: Volterra integral equation, uniqueness, stability, uniform convergence, regularization, quadrature formula, small parameter.

Object of research: Volterra integral equations of the third kind and their systems.

Subject of research. Volterra equations of the third kind and their systems in the case of degeneration of a known function for the desired function outside the integral at the interior points of the segment.

Aim of research: development regularization methods and methods for the numerical solutions of Volterra integral equations of the third kind in the case of degeneration of a known function for the desired function outside the integral at the interior points of the segment.

Research methods: regularization methods, subdomain methods, successive approximations and the method of quadrature formulas were used.

The scientific results and novelty:

– the regularizability of Volterra integral equations of the third kind and their systems is proved in the case of degeneration of a known function for the required function outside the integral at the interior points of the segment;

– sufficient conditions for the uniqueness of the solution of Volterra integral equations of the third kind are established in the case of degeneration of a known function for the desired function outside the integral at the interior points of the interval;

– a numerical solution of Volterra integral equations of the third kind is obtained in the case of degeneration of a known function for the required function outside the integral at the interior points of the segment; a package of programs in the Delphi language was compiled for the implementation of a numerical solution and a numerical experiment was carried out.

Recommendations on using. The results can be used to regularization and numerical solution of Volterra multidimensional integral equations of the third kind in the case of degeneration of the known function for the sought function outside the integral at the interior points of the segment.

Field of applications. The theory of Volterra integral equations, the theory of nonlocal boundary value problems and inverse problems for partial differential equations.

Формат 60х84 1/16. Объем 1,5 п.л.
Бумага офсет. Офсетная печать. Тираж 100.

«Сарыбаев Т.Т.» И.П.
г. Бишкек, ул. Раззакова, 49
т. 0 708 058 368
e-mail: talant550@gmail.com