Национальная академия наук Кыргызской Республики
институт математики

Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи

УДК 517.97

Доулбекова Салтанат Байызбековна

Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний методом факторизации

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2022

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского университета имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Научный руководитель: **Керимбеков Акылбек,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского университета имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Официальные оппоненты: **Искандаров Самандар,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории интегро-дифференциальных уравнений Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики
Белеков Кенжебек Жолдошевич,
кандидат физико-математических наук, и.о. доцента кафедры естественно-математических дисциплин Институт повышения квалификации и переподготовки кадров им. М. Р. Рахимовой при кыргызском государственном универститете им. И.Арабаева

Ведущая организация: кафедра математического моделирования механико математического факультета Евразийского Национального университета имени Л.Н. Гумилева, Казахстан, 010000, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2.

Защита диссертации состоится 20 мая 2022 г. в 14.00 часов на заседани диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты – https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына, 720033, г. Бишкек ул. Фрунзе, 547, и на сайте: www.math.kg, vak.kg.

Автореферат разослан 19 апреля 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук доцент Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. Общая теория оптимального управления распределенными системами изучается на протяжении многих лет и не теряет своей актуальности из-за разнообразия распределенных систем, описывающих процессы самых различных областей физики, механики, экономики.

В приложениях встречаются прикладные задачи, описываемые интегро-дифференциальным уравнением в частных производных, которые можно исследовать методами теории оптимального управления для распределенных систем. В настоящей работе рассматриваются задачи управления колебательными процессами, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейна, относительно управляющих параметров. Такие задачи мы называем *задачей нелинейной оптимизации*. Исследования проводились при наличии ограничения на управляющих параметрах.

Несмотря на обилие исследований управляемых процессов, описываемых системами с распределёнными параметрами, такие задачи мало исследованы и не разработаны конструктивные методы их решения. Поэтому исследование разрешимости нелинейных задач оптимизации и разработка конструктивных методов их решения являются одной из актуальных задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

В этом направлении исследования задач нелинейной оптимизации без ограничения на управляющих параметров проводились в диссертации Сейдакмат к. Э. (2016), где исследованы тепловые процессы, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Вольтерра, в научных статьях Керимбекова А. и Абдылдаевой Э.Ф. (2015), Дуйшеналиевой У.Э. (2016) , где были исследованы колебательные процессы, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма, и другие.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Исследование по диссертации проводилось в рамках научных проектов № КР-05 (номер гос.регистрации № 0006988) «Математическое обеспечение процессов управления энерго-массопереносами, происходящими в линиях передач, и продукционными почво-растительными системами», № КР-03 (номер гос.регистрации № 0007436) «Оптимальное управление нежелательными колебательными процессами, возникающими в линиях передач» МОиН КР.

Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование разрешимости задач нелинейной оптимизации колебательных процессов с управлениями разной структуры и установление достаточных условий существования и единственности решения задачи оптимизации, когда

- функция внешнего источника по управлению нелинейна и монотонна, т.е. когда между элементами пространства управлений $\{u(t,x)\}$ и пространства состояний управляемого процесса $\{V(t,x)\}$ имеет место взаимно однозначное соответствие;
- функция внешнего источника по управлению нелинейна и не монотонна, т.е. когда между элементами пространства управлений $\{u(t,x)\}$ и пространства состояний управляемого процесса $\{V(t,x)\}$ нарушается условие взаимно однозначного соответствия. В этом случае пространство управлений (по отношению значений функции внешнего источника) распадается на классы смежности, т.е. образуется взаимно непересекающиеся фактор - множества $\{u_i(t,x)\}$, $i=1,2,3,...$. Заметим, что каждое фактор-множество единственным образом определяет одно состояние управляемого процесса $V(t,x)$, т.е. в этом случае взаимно однозначное соответствие устанавливается между элементами пространства состояний $\{V(t,x)\}$ и фактор-пространства управлений $\{\tilde{u}(t,x)\}$;

Решены следующие задачи нелинейной оптимизации:

- на основе нового определения построить обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса в случаях, когда колебательный процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с интегральным оператором Фредгольма;
- получить нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и исследовать вопросы существования и единственности искомого «оптимального» управления;
- построить полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Научная новизна.

- Установлено, что в нелинейной задаче оптимизации при наличии ограничении на управление искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода;
- Найдены достаточные условия существования решения системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода и разработан алгоритм построения ее решения;

– Разработан алгоритм построения полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника является монотонной по функциональной переменной;
– Разработан алгоритм построения полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника не является монотонной по функциональной переменной (случай появления фактор множеств).

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при дальнейших исследованиях по теории оптимального управления, интегро-дифференциальным уравнениям, уравнений математической физики и при разработке спецкурсов для студентов математических специальностей Вузов КР: КНУ им. Ж. Баласагына, КРСУ им. первого Президента Российской Федерации Б. Н. Ельцина, КГТУ им. И.Раззакова.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.
– доказательство, что в нелинейной задаче оптимизации при наличии ограничении на управление искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода;
– достаточные условия существования решения системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода и разработан алгоритма построения ее решения;
– доказательство существования полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника является монотонной по функциональной переменной;
– доказательство существования полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника не является монотонной по функциональной переменной (случай появления фактор множеств);
– апробация теоретических выводов на примере простейшей нелинейной задачи оптимизации (без интегрального оператора Фредгольма), при присутствии состояния упраляемого процесса и ее обобщенной производной в ограничениях на управления.

Личный вклад соискателя. Постановка задач и обсуждение полученных результатов проводились при непосредсвенном участии научного руководителя. Результаты исследований диссертации получены автором.

Апробации результатов исследований. Результаты исследований доказывались и обсуждались на семинарах Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики (руководитель - академик А.А.Борубаев) и на следующих конференциях:

– международная юбилейная научная конференция, посвященная 15-летию образования КРСУ, «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», Бишкек, 2008 г.;
– международном симпозиуме «Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование», 7-11 октября 2019 г., г. Иркутск, Россия;
– 7-й международной конференции по управлению и оптимизации промышленных приложений, 26-28 август 2020 г., г. Баку, Азербайджанская Республика (онлайн);
– международной конференции «Инновации в науке и технике» КРСУ, 25-ноября 2020 г., г. Бишкек.

А также регулярно были обсуждены на научных семинарах кафедры прикладной математики и информатики КРСУ (научный руководитель проф. Керимбеков А.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 12 научных статьях [1]-[12], приведенных в списке опубликованных работ. Статьи [11],[12], входят в базу данных Web of Science, статьи [3]-[6], [8]-[10] входят в базу данных РИНЦ. В совместных работах постановка задач принадлежит научному руководителю, полученные основные результаты и оценки – соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, трех глав, выводов, списка используемых источников из 72 наименований. Нумерация разделов - тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый в разделе. Объем текста 94 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» приведены примеры задач, приводящих к интегро-дифференциальным уравнениям и сделан краткий обзор работ, примыкающих по содержанию к данной теме диссертационной работы.

Во второй главе «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» описываются объект и предмет исследования, использованные методы для решения поставленных задач.

В третьей главе «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССООВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ И УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ

ПРОИЗВОДНЫХ» исследованы задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма и дифференциальными уравнениями в частных производных в случае, когда функция внешнего источника нелинейна относительно управляющих параметров и при наличии ограничения на управление.

В разделе 3.1. подробно изложена процедура построения обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса.

Пусть функция $V(t,x)$ описывает состояние колебательного процесса и в области $Q=(0,1)\times(0,T)$ удовлетворяет краевой задаче

$$V_{tt}=V_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+f\left[t,x,u(t,x)\right],\ 0<x<1, 0<t\le T, \tag{1}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\qquad 0<x<1, \tag{2}$$

$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\qquad 0<t<T\ . \tag{3}$$

Здесь заданная функция $K(t,\tau)$ является определенной в области $D=(0,T)\times(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$K_0=\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt<\infty; \tag{4}$$

функции $\psi_1(x)\in H_1(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ заданы, нелинейная по функциональной переменной $u(t,x)\in H(Q)$ функция $f\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$, $Q=(0,1)\times(0,T)$ известна, λ параметр, $H_1(0,1)$ - Соболева пространства первого порядка, T - фиксированный момент времени.

Исследования проводились с использованием обобщенного решения краевой задачи.

Определение. Под обобщенным решением краевой задачи (1)-(3) называется функция $V(t,x)\in H_1(Q)$, которая удовлетворяет начальным условиям в слабом смысле, т.е. для любой функции $\Phi_0(x)\in H(Q),\Phi_1(x)\in H(Q)$ имеют место равенства

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 V(t,x)\Phi_0(x)dx=\int_0^1\psi_1(x)\Phi_0(x)dx,$$

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 V_t(t,x)\Phi_1(x)dx=\int_0^1\psi_2(x)\Phi_1(x)dx,$$

и коэффициенты Фурье удовлетворяют линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t,s) V_n(s) ds + q_n(t), \tag{10}$$

где функция

$$K_n(t,s) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t-\tau) K(\tau, s) d\tau, \quad K_n(0,s) = 0 \tag{11}$$

является ядром, а функция

$$q_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t-\tau) f_n[\tau, u] d\tau \tag{12}$$

является свободным членом.

Далее коэффициенты Фурье $V_n(t)$, как решение уравнение (10), определяются по формуле

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) q_n(s) ds + q_n(t). \tag{13}$$

Здесь резольвента интегрального уравнения $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, ...$ определяется по формуле

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{14}$$

где повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формулам

$$K_{n,i+1}(t,s) = \int_0^T K_n(t,\eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad K_n(t,s) = K_{n,1}(t,s) \quad i = 1, 2, 3, ... \tag{15}$$

Непосредственными вычислениями установлены следующие оценки

$$|K_{n,i}(t,s)|^2 \le \frac{K_0^{i-1} T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i} \int_0^T K^2(\eta, s) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, ..., \quad \forall t \in [0, T] \tag{16}$$

$$\int_0^T |K_{n,i}(t,s)|^2 \, ds \le \frac{K_0^{i-1} T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i} \int_0^T \int_0^T K^2(\eta, s) d\eta ds = \frac{K_0^i T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i},$$

которые используются при доказательстве сходимости ряда (14). Доказаны, что при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, ...$, согласно оценкам (16), при значениях параметра λ удовлетворяющих оценке

$$|\lambda| < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}, \text{ где } n = 1, 2, 3, ... , \tag{17}$$

имеют места следующие неравенства

$$\left|R_n(t,s,\lambda)\right| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left|K_{n,i}(t,s)\right| \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\left(\int_0^T K^2(y,s)\,ds\right)^{1/2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_n}\right)^{i-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\left(\int_0^T K^2(y,s)\,ds\right)^{1/2}\frac{1}{1-|\lambda|\dfrac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_n}} = \sqrt{T}\left(\int_0^T K^2(y,s)\,ds\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}} \tag{18}$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\,ds \le T\int_0^T\int_0^T K^2(y,s)\,ds\frac{1}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2} = \frac{TK_0}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что интервал сходимости ряда (14) увеличивается с увеличением значения индекса $n = 1,2,3,...$, т.е. $|\lambda| < \dfrac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}} \to \infty$.

И установлено, что этот ряд (14) абсолютно сходится только для тех значений параметров λ, которые удовлетворяют условию

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}. \tag{19}$$

Таким образом, формальное решение краевой задачи (1)-(3), находим по формуле

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n(t,\lambda) + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \varepsilon_n(t,\eta,\lambda)\, f_n[\eta,u]d\eta\right]z_n(x), \tag{20}$$

где

$$\varepsilon_n(t,\eta,\lambda) = \begin{cases} \sin\lambda_n(t-\eta) + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, \quad 0 \le \eta \le t, \\ \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, \quad t \le \eta \le T. \\ \text{при } t=\eta, \quad \varepsilon_n(t,t,\lambda) - \text{непрерывна.} \end{cases}$$

$$\psi_n(t,\lambda) = \psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right] +$$

$$\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right],$$

$$f_n[t,u] = \int_0^1 f[t,x,u(t,x)]z_n(x)dx.$$

Доказаны, что функция состояния $V(t,x)$ и ее обобщенная производная $V_t(t,x)$

являются элементами гильбертово пространства квадратично суммируемых функций $H(Q)$.

Таким образом, в раделе 3.1. использовано новое определение обобщенного решения и установлено интервал изменения значений параметра λ, для которых существует единственное обобщенное решение.

В разделе 3.2. исследована разрешимость задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с ограничениями на управления, когда функция внешнего источника является нелинейной относительно распределенного и равномерно распределенного управления.

1. Постановка задачи нелинейной оптимизации и уравнения искомого оптимального управления. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется найти управление, которое минимизирует функционал

$$J\left[u(t,x)\right]=\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt, \tag{21}$$

при условии

$$V(T,x)=\xi(x), \tag{22}$$

где $V(t,x)\equiv V\left[t,x,u(t,x)\right]$ является обобщенным решением краевой задачи (1-3), заданная функция $\xi(x)\in H(0,1)$.

В этой задаче искомое управление следует находить так, чтобы управляемый процесс $V(t,x)$ от начального состояния $V(0,x)=\psi_1(x)$ за конечное время T перешел в конечное состояние (22).

Здесь функции $\psi_1(x)\in H_1(0,1), \psi_2(x)\in H(0,1)$, $p\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ и $f\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ заданы, и функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и $p\left[t,x,u(t,x)\right]$ нелинейно зависят от функции управления.

Далее условие (22) перепишем в виде

$$\begin{gathered} V(T,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(T)\right]z_n(x)= \\ =\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n z_n(x)=\xi(x), \quad \xi_n=\int_0^1\xi(x)z_n(x)dx, \end{gathered} \tag{23}$$

и отсюда учитывая линейную независимость системы собственных функций $\left\{z_n(x)\right\}$, получим систему равенств

$$\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(T)=\xi_n, \quad n=1,2,3,.... \tag{24}$$

Эти равенства с учетом (12), после несложных вычислений, перепишем в виде

$$\int_0^T\int_0^1 G_n(t,x,\lambda)\, f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt = h_n\left(\lambda\right),\ n=1,2,3,... \tag{25}$$

где

$$G_n(\tau,x,\lambda)=\frac{z_n(x)}{\lambda_n}\left\{\sin\lambda_n(T-\tau)+\lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right\}, n=1,2,3,\ldots, \tag{26}$$

$$\begin{gathered} h_n\left(\lambda\right)=\xi_n-\psi_{1n}\left\{\cos\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right\}- \\ -\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left\{\sin\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right\},\ n=1,2,3,.... \end{gathered} \tag{27}$$

Таким образом, в пункте 1 установлено, что искомое оптимальное управление следует находить как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода (25).

2. Исследование разрешимости операторного уравнения (25).

Как было выше отмечено, искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Для исследования разрешимости таких систем будем использовать операторные методы. С этой целью систему (25) перепишем в операторной форме

$$\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)\, f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt = h\left(\lambda\right),\ n=1,2,3,..., \tag{28}$$

где

$$G(t,x,\lambda)=\left\{G_1(t,x,\lambda),...,G_n(t,x,\lambda),...\right\}, \tag{29}$$

$$h\left(\lambda\right)=\left\{h_1\left(\lambda\right),...,h_n\left(\lambda\right),...\right\}. \tag{30}$$

Введем обозначение

$$f\left[t,x,u(t,x)\right]=\nu(t,x) \tag{31}$$

и операторное уравнение (28) перепишем в виде

$$G\left[\nu\right]=\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)\nu(t,x)dxdt=h\left(\lambda\right). \tag{32}$$

Далее доказаны:

Лемма 1. Вектор $h\left(\lambda\right)$ является элементом пространства

$$\ell_2=\left\{a=(a_1,a_2,..,a_n,..)\ /\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty\right\}.$$

Лемма 2. Оператор $G[\nu]:H(Q)\to \ell_2.$, т.е. $G[\nu]$ является пространством ℓ_2 при любом $\nu(t,x)\in H(Q)$.

Таким образом, на основе доказанных лемм операторное уравнение (32) будем рассматривать в пространстве ℓ_2.

Его решение ищем в виде

$$\nu(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(t,x,\lambda\right)\alpha_n+\gamma=G^*(t,x,\lambda)\alpha+\gamma\,, \tag{33}$$

где $\alpha=\{\alpha_1,...,\alpha_n,...\}$ неизвестный вектор пространства ℓ_2, γ - произвольная постоянная. (33) подставим в (32) и имеем соотношение

$$\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)\left[G^*(t,x)\alpha+\gamma\right]dxdt=h\left(\lambda\right), \tag{34}$$

или

$$\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)G^*(t,x,\lambda)dxdt\cdot\alpha=h(\lambda)-\gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)dxdt. \tag{35}$$

Введем обозначения

$$M\left(\lambda\right)=\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)G^*(t,x,\lambda)dxdt\,,\quad h(\lambda,\gamma)=h\left(\lambda\right)-\gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)dxdt \tag{36}$$

и уравнение (35) перепишем в операторной форме следующего вида

$$M\left[\alpha\right]=M(\lambda)\cdot\alpha=h\left(\lambda,\gamma\right), \tag{37}$$

где $M(\lambda)$ бесконечномерная симметричная постоянная матрица, $h(\lambda,\gamma)$ бесконечномерный постоянный вектор.

Доказаны следующие леммы:

Лемма 3. Вектор $h(\lambda,\gamma)$ является элементом пространства ℓ_2 при любом фиксированном γ.

Лемма 4. Оператор $M[\alpha]$ отображает пространство ℓ_2 в себя, т.е. $\forall\alpha\in\ell_2\Rightarrow M\left[\alpha\right]\in\ell_2$.

Лемма 5. Оператор $M\left[\alpha\right]$ является положительно – определенным, т.е имеет место неравенство $\left\langle\alpha,M\alpha\right\rangle_{\ell_2}\geq 0$ и $\left\langle\alpha,M\alpha\right\rangle_{\ell_2}=0$ тогда и только тогда когда $\alpha=\theta=\left(0,...,0,..\right)$, т.е. когда α нулевой вектор

Согласно леммам 3 и 4 операторное (алгебраическое) уравнение рассматривается в пространстве ℓ_2. Согласно лемме 5 используя свойство положительно – определенного оператора утверждаем, что опреатор $M\left[\alpha\right]$ имеет обратный ограниченный оператор N, такой что

$$\alpha = Nh(\lambda,\gamma) = N\left(h(\lambda) - \gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)dxdt \right) \tag{38}$$

и $\|Nh(\lambda,\gamma)\|_{\ell_2} \le N_0 \|h(\lambda,\gamma)\|_{\ell_2}$, const $N_0 > 0$.

Теперь найденное решение (38) подставим в (33) и получим функцию

$$\nu(t,x) = G^*(t,x,\lambda)N\left(h(\lambda) - \gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)dxdt \right) + \gamma \tag{39}$$

которая, является решением бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода (32). Легко видеть, что при различных значениях параметру γ получим различные решения уравнения (32), т.е. уравнение (32) имеет бесконечно много решений.

Далее если (39) подставить в (31), то получим функцию

$$f\left[t,x,u(t,x)\right] = G^*(t,x,\lambda)N\left(h(\lambda) - \gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)dxdt \right) + \gamma, \tag{40}$$

которая является решением операторного уравнения (28).

Таким образом, в третьем пункте установлено, что искомое оптимальное управление находится среди решений нелинейного операторного уравнения (28), которое имеет бесконечно много решений удовлетворяющие условию (40).

3. Минимизация функционала в случае монотонности функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]$.

Таким образом, искомое оптимальное управление следует находить согласно соотношению (40). Поскольку функция $f\left[t,x,u(t,x)\right] \in H(Q)$ монотонная функция по функциональной переменной $u(t,x)$, то выполняется условие

$$f_u\left[t,x,u(t,x)\right] \ne 0, \quad \forall (t,x) \in Q \tag{41}$$

Тогда согласно теореме о неявных функциях соотношение (40) однозначно разрешается относительно переменной $u(t,x)$, т.е. при каждом фиксированном γ, существует функция $\varphi(\cdot)$ такая, что

$$u(t,x) = \varphi\left(G^*(t,x,\lambda)N\left(h(\lambda) - \gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)dxdt \right) + \gamma \right) \equiv u(t,x,\gamma). \tag{42}$$

Теперь найденную функцию $u(t,x,\gamma)$ подставим в функционал (18) и имеем скалярную функцию

$$J\left[u(t,x,\gamma)\right] = \int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u(t,x,\gamma)\right]dxdt = \Phi(\gamma), \tag{43}$$

где $\gamma \in R$. Далее исследуем функцию $\Phi(\gamma)$ на экстремум. Решение этой задачи находим из соотношений

$$\Phi'(\gamma) = \beta \int_0^T \int_0^1 p_u \left[t, x, u(t, x, \gamma) \right] u_\gamma (t, x, \gamma) dx dt = 0,$$

$$\Phi''(\gamma) = \beta \int_0^T \int_0^1 \Big(p_{uu} \left[t, x, u(t, x, \gamma) \right] \big(u_\gamma (t, x, \gamma) \big)^2 + \tag{44}$$

$$+ p_u \left[t, x, u(t, x, \gamma) \right] u_{\gamma\gamma} (t, x, \gamma) dx dt > 0.$$

Задача (44) может иметь одно или несколько решений.

1) Случай: пусть задача (44) имеет единственное решение $\gamma = \gamma^0$. Тогда согласно (42) искомое управление $u^0(t, x)$ находим по формуле

$$u^0(t, x) = u\left(t, x, \gamma^0\right) \tag{45}$$

которое, является единственным управлением, на котором функционал достигает минимального значения, т.е.

$$J\left[u^0(t, x)\right] = J\left[u\left(t, x, \gamma^0\right)\right] \le J\left[u\left(t, x, \gamma\right)\right], \quad \forall \gamma \in R. \tag{46}$$

В этом случае искомое управление $u^0(t, x)$ определяется единственным образом и является оптимальным.

2) Случай: пусть задача (44) имеет несколько решений $\gamma_1^0, ..., \gamma_m^0$, где m натуральное число. В этом случае имеем несколько управлений

$$u_1^0(t, x) = u\left(t, x, \gamma_1^0\right), ..., u_m^0(t, x) = u\left(t, x, \gamma_m^0\right). \tag{47}$$

Вычислим значение функционала (21) соответствующее управлению $u\left(t, x, \gamma_k^0\right)$

$$J\left[u_k^0(t, x)\right] = J\left[u\left(t, x, \gamma_k^0\right)\right], \quad k = 1, ..., m. \tag{48}$$

Далее из решения задачи

$$J\left[u^0(t, x)\right] = \min\{J\left[u_1^0(t, x)\right], ..., J\left[u_m^0(t, x)\right]\} \tag{49}$$

находим $u^0(t, x)$. В этом случае $u^0(t, x)$ является оптимальным управлением. Оно может быть единственным, если $J\left[u\left(t, x, \gamma_k\right)\right]$ принимает различные значения, в противном случае оптимальными могут быть несколько управлений, на которых функционал $J\left[u\left(t, x, \gamma_k\right)\right]$ принимает одно и тоже значение, т.е.

$$J\left[u^0(t, x)\right] = J\left[u_i^0(t, x)\right], \quad i = 1, 2, ..., r \le m. \tag{50}$$

Из выше изложенного следует, что если функция $f\left[t, x, u(t, x)\right]$ монотонная, то в случае, когда решение задачи (44) единственно, искомое оптимальное управление определяется по формуле (45), а в случае, когда решение задачи (44) не единственно искомое оптимальное управление определяется согласно соотношению (49). Таким образом, при моно тонности функции $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$ искомое управление определяется единственным образом, так как оба случая друг друга исключают.

5. Минимизация функционала в случае не монотонности функции $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$.

Поскольку функция $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]\in H(Q)$ не монотонная по функциональной переменной $u\left(t,x\right)$, то условие (43) не выполняется и имеет место соотношение

$$f_u\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]=0. \qquad (51)$$

В этом случае уравнение (42), может иметь несколько решений

$$u_k(t,x)=u_k(t,x,\gamma) \quad k=1,2,3,...,r,\ \gamma\in \boldsymbol{R}, \qquad (52)$$

где r любое натуральное число.

Теперь найденную функцию $u_k(t,x,\gamma)$ подставим в функционал (21) и имеем скалярные функции

$$J\left[u_k\left(t,x,\gamma\right)\right]=\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u_k\left(t,x,\gamma\right)\right]dxdt=\Phi_k(\gamma), \qquad (53)$$

где $k=1,2,...m.$. Далее функцию $\Phi_k\left(\gamma\right)$ исследуем на экстремум. Возможны случаи, т.е. когда экстремум достигается в одной точке или в нескольких точках.

По методике определения «оптимального» управления, изложенной для случая монотонности функции $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$, находим «оптимальное» управление $u_k^0(t,x,\gamma_k^0)$.

Теперь искомое оптимальное управление $u^0\left(t,x\right)$ находим из условия

$$J\left[u^0\left(t,x\right)\right]=\min\{J\left[u_1^0\left(t,x\right)\right],...,J\left[u_r^0\left(t,x\right)\right]\}. \qquad (54)$$

Таким образом, если функция $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$ не монотонная, то уравнение (42), может иметь несколько решений. С каждым решением поступая, как и в монотонном случае находим искомое оптимальное управление $u^0\left(t,x\right)$, которое может быть единственным, если из чисел $\{J\left[u_1^0\left(t,x\right)\right],...,J\left[u_r^0\left(t,x\right)\right]\}$ нет равных.

В этом разделе также изложены результаты исследований и для случая, когда функция внешнего источника является нелинейной относительно равномерно распределенного управления.

В разделе 3.3. изложены результаты исследований простейшей нелинейной задачи оптимизации для случаев, когда функция внешнего источника является нелинейной относительно распределенного управления и равномерно распределенного управлений и ограничение на управление содержит только функцию состояния.

В разделе 3.4. изложены результаты исследований простейшей нелинейной задачи оптимизации для случаев, когда функция внешнего источника является нелинейной относительно распределенного управления и равномерно распределенного управлений и ограничение на управление содержит обобщенную производную функции состояния.

ВЫВОДЫ

В ходе исследования задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функция внешнего источника нелинейна относительно управляющих параметров и при наличии ограничения на управление:

- установлено, что в нелинейной задаче оптимизации при наличии ограничении на управление искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода;
- установлены достаточные условия существования решения системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода и разработан алгоритма построения ее решения;
- доказано существование полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника является монотонной по функциональной переменной;
- доказано существование полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника не является монотонной по функциональной переменной (случай появления фактор множеств);

Полученные результаты являются новыми и могут быть полезными при разработке новых методов решения нелинейных задач теории оптимального управления.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при дальнейших исследованиях по теории оптимального управления, интегро-дифференциальным уравнениям, уравнений математической физики.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Доулбекова, С.Б. Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний методом обобщенного управления [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Труды международной конференции ИПС РАН «Программные системы: теория и приложения». – Переславль – Залесский, – М.: физматлит, 2006. – Т.2. – С. 113-120.
2. Доулбекова С.Б. Применение метода факторизации при решении задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Международная юбилейная научная конференция, посвященная

15-летию образования КРСУ «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – Бишкек. 2008. – С. 90-94.
3. Доулбекова С.Б. Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний методом факторизации [Текст] / С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ им. Ельцина. – Бишкек,. 2010. Т.10, № 9. - С. 56-61.
4. Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний в классе немонотонных функций [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. – Бишкек. 2014. Т.10, №1. – С. 157-161.
5. Доулбекова С.Б. Исследование одного случая при решении задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний [Текст] / С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. – Бишкек, 2015. Т.15, №5. – С. 65-68.
6. Доулбекова С.Б. О случаях появления особых управлений при решении задачи нелинейной упругих колебаний [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ. – Бишкек,. 2015. Т.15, №5. – С. 74-77.
7. Доулбекова С.Б. Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Материалы международной научно – практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании», – Актөбе. 2015. – С. 157-160.
8. Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний описываемых Фредгольвыми интегро-диффеоенциальными уравнениями [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Материалы международного симпозиума «Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование», – Иркутск. 2019. – С. 216-219.
9. Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Математика. Компьютерные науки. Механика, 2020. Том 132, № 3. – С. 8 -16.
10. Доулбекова С.Б. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов с ограничениями на управления [Текст] / А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова // Вестник КРСУ им. первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина. – Бишкек. 2021. Т. 21, № 12. – С. 11-19.
11. Doulbekova, S. B. On the solvability of a nonlinear optimization problem with a given control constraint [Текст] / A. Kerimbekov, S.B. Doulbekova // Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2020) Volume II. 2020. – P. 224 -227.
12. Doulbekova, S. B. On solvability of the nonlinear optimization problem with the limitations on the control [Текст] / A. Kerimbekov, S.B. Doulbekova // AIP Conference Proceedings 2325, 020043. 2021.

Доулбекова Салтанат Байызбековнанын 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий окумуштуулук даражасын алуу үчүн “Факторизация методу менен серпилгич термелүүлөрдү сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин чыгаруу” темасында жазылган диссертациялык ишинин

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: Термелүү процесси, жалпыланган чыгарылыш, функционал, оптималдык башкаруу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, оператордук теңдеме, жыйналуучулук.

Изилдөө объекти: фредгольмдун интегро-дифференциалдык теңдемелери менен мүнөздөлгөн, башкарылуучу термелүү процесстери.

Изилдөө предмети: Изилдөөнүн предмети башкаруу функциясына чектөөлөр коюлган учурда Фредгольмдун интегралдык оператору менен жеке туундуларда интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселелеринин чыгарылышынын алгоритмин иштеп чыгуу болуп саналат.

Изилдөөнүн максаты: Иштин максаты башкаруусунда чектөөлөрү бар термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселелеринин чыгарылышын изилдөө жана бар болушунун жетиштүү шарттарын жана оптималдаштыруу маселесинин жалгыз чыгарылыш бар экендигин белгилөө болуп саналат.

Изилдөөнүн усулдары: оптималдык башкаруу теориясынын методдору, оператордук теңдемелердин теориясынын методдору жана вариациялык эсептөөнүн методдору.

Иштин илимий жаңылыгы:

- Башкарууда чектөөлөр болгон учурда оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесинде изделген оптималдык башкаруу биринчи түрдөгү Фредгольмдун сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин чексиз өлчөмдүү системасынын чыгарылышы катары аныкталганы белгиленди;
- Биринчи түрдөгү Фредгольм сызыктуу эмес интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылышы бар экендигинин жетиштүү шарттары табылды жана аны чыгаруунун алгоритми иштелип чыкты;
- Булактын сызыктуу эмес функциясы алмашуучу функционал боюнча бир түрдө жана бир түрдө эмес болгон учурда оптималдаштыруунун сызыктуу эмес маселесин толук чыгаруунун алгоритми иштелип чыкты;

Изилдөөнүн практикалык мааниси. Башкаруусунда чектөөлөрү бар термелүү процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселелерин чыгаруунун иштелип чыккан алгоритми тиркемелерде термелүү процесстерин башкарууга байланыштуу практикалык маселелерди чыгарууда колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу аймагы. Оптималдык башкаруу теориясы, интегро-дифференциалдык теңдемелер, математикалык физиканын теңдемеси.

РЕЗЮМЕ

диссертации Доулбековой Салтанат Байызбековны на тему «Решение задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний методом факторизации» представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: колебательный процесс, обобщенное решение, функционал, оптимальное управление, нелинейное интегральное уравнение, операторное уравнение, сходимость.

Объект исследования: Управляемые колебательные процессы, описываемые интегро-дифференциальными фредгольмовыми уравнениями.

Предмет исследования: Предметом исследования являются разработка алгоритма построения решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма, при наложениях ограничений на функцию управления.

Цель работы: исследование разрешимости задач нелинейной оптимизации колебательных процессов с ограничениями на управления и установление достаточных условий существования и единственности решения задачи оптимизации.

Методы исследования: Методы теории оптимального управления, методы теории операторных уравнений и методы вариационного исчисления.

Полученные результаты и их новизна:

– Установлено, что в нелинейной задаче оптимизации при наличии ограничении на управление искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода;
– Найдены достаточные условия существования решения системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода и разработан алгоритм построения ее решения;
– Разработан алгоритм построения полного решения нелинейной задачи оптимизации в случае, когда нелинейная функция источника является монотонной и не монотонной по функциональной переменной;

Рекомендации по исследованию. Разработанный алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов с ограничениями на управления может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с управлением колебательных процессов.

Область применения. Теория оптимального управления, интегро-дифференциальные уравнения, уравнение математической физики.

SUMMARY

Dissertations "Solving the problem of nonlinear optimization of elastic oscillations by the factorization method" by Doulbekova Saltanat Bayzbekovna is submitted for the scientific degree of physical-mathematical sciences candidate, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control.

Keywords: oscillatory process, generalized solution, functional, optimal control, nonlinear integral equation, operator equation, convergence.

Object of research controlled oscillatory processes described by Fredholm integro-differential equations.

Subject of research the subject of the research is the development of an algorithm for constructing a solution to the problem of nonlinear optimization of oscillatory processes, described by partial integro-differential equations with an integral Fredholm operator, when imposing restrictions on the control function.

Aim of research the aim of the work is to study the solvability of problems of nonlinear optimality of oscillatory processes with restrictions on control and the establishment of sufficient conditions for execution and unique solutions to the problems.

Research methods methods of the theory of optimal control, methods of the theory of operator equations and methods of the calculus of variations.

The scientific results and their novelty:

– It has been established that in a nonlinear optimization problem in the presence of a control constraint, the desired optimal control is defined as a solution to an infinite-dimensional system of nonlinear Fredholm integral equations of the first kind;
– Sufficient conditions for the existence of a solution to a system of nonlinear Fredholm integral equations of the first kind are found and an algorithm for constructing its solution is developed;
– An algorithm has been developed for constructing a complete solution to a nonlinear optimization problem in the case when the nonlinear source function is monotonic and not monotonic in a functional variable;

Recommendations on using. The developed algorithm for constructing a solution to the problem of nonlinear optimization of oscillatory processes with restrictions on controls can be used in applications for solving practical problems related to the control of oscillatory processes.

Field of applications. Theory of optimal control, integro-differential equations, equation of mathematical physics.